Esercizi laboratorio di geometria 1A

1) Sia $C^{\infty}(\mathbb{R})$ lo spazio delle funzioni $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ che sono derivabili infnite volte e aventi tutte le derivate continue. Dimostrare che la derivazione

$$\begin{gathered} \tfrac{d}{dt} : C^{\infty}(\mathbb{R}) \longmapsto C^{\infty}(\mathbb{R}) \\ \tfrac{d}{dt}(f(t)) = f'(t) \end{gathered}$$

è un'applicazione lineare. Calcolarne il nucleo.

2) Sia $C^{\infty}(\mathbb{R})$ lo spazio delle funzioni $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ che sono derivabili infnite volte e aventi tutte le derivate continue. Dimostrare che la derivazione

$$\begin{gathered} \tfrac{d^2}{dt^2} : C^{\infty}(\mathbb{R}) \longmapsto C^{\infty}(\mathbb{R}) \\ \tfrac{d^2}{dt^2}(f(t)) = f''(t) \end{gathered}$$

è un'applicazione lineare. Calcolarne il nucleo.

3) Sia $F : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^3$, $F(x; y) = (x + 1; 2y; x + y)$. F è un'applicazione lineare?

4) Sia M una matrice arbitraria 2×2. Sia $F : \mathbb{R}^{2\times 2} \longmapsto \mathbb{R}^{2\times 2}$, $F(A) = A \cdot M + M \cdot A$. F è un'applicazione lineare?

5) Sia M una matrice arbitraria 2×2. Sia $F : \mathbb{R}^{2\times 2} \longmapsto \mathbb{R}^{2\times 2}$, $F(A) = M + A$. F è un'applicazione lineare?

6) Trovare base e dimensione del nucleo e dell'immagine della seguente applicazione lineare:

$$\begin{gathered} G : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^2, \\ G(x; y; z) = (x + y; y + z). \end{gathered}$$

7) Trovare base e dimensione del nucleo e dell'immagine della seguente applicazione lineare:

$$\begin{gathered} G : \mathbb{R}^4 \longmapsto \mathbb{R}^3, \\ G(x; y; z; w) = (x + 2y + w; 2x - y + 2z - w; x - 3y + 2z - 2w). \end{gathered}$$

8) Trovare base e dimensione del nucleo e dell'immagine della seguente applicazione lineare:

$$\begin{gathered} G : \mathbb{R}^4 \longmapsto \mathbb{R}^3, \\ G(x; y; z; w) = (x + 2z - w; 2x + 3y - z + w; -2x - 5z + 3w). \end{gathered}$$

Soluzioni

1) $\mathrm{Ker}\left(\frac{d}{dt}\right) = \{\text{funzioni costanti}\}$.
2) $\mathrm{Ker}\left(\frac{d^2}{dt^2}\right) = \{\text{polinomi di grado } 1\}$.
3) F non è lineare.
4) F è lineare.
5) F è lineare se e solo se $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
6) $Im\,(G) = \mathbb{R}^2$. $\dim(Ker\,(G)) = 1$. Base di $Ker\,(G)$: $\{(1;-1;1)\}$.
7) $dim\,(Im\,(G)) = 2$. Base di $Im\,(G)$: $\{(1;2;1)\,;(0;1;1)\}$.
$dim\,(Ker\,(G)) = 2$. Base di $Ker\,(G)$: $\{(4;-2;-5;0)\,;(1;-3;0;5)\}$.
8) $Im\,(G) = \mathbb{R}^3$.
$dim\,(Ker\,(G)) = 1$. Base di $Ker\,(G)$: $\left\{\left(1;\frac{2}{3};1;1\right)\right\}$.