

UN'ANALISI DEL CONCETTO DI FUNZIONE NELLA SCUOLA MEDIA SUPERIORE

Lavoro svolto dagli alunni **Baresi Francesca, Bazzana Valeria, Cavallari Giulia, Doninelli Alessandro, Mazzanti Luca, Pelizzari Federico, Savoldini Giovanni, Tognon Fabio**, coordinati da **Maffini Achille**¹

1. COMPOSIZIONE DEL GRUPPO DI RICERCA E FINALITA'

Il gruppo di ricerca è costituito da studenti del liceo scientifico di Asola così suddivisi:

2 di seconda, 2 di terza, 2 di quarta e 2 di quinta
coadiuvati da quattro insegnanti di matematica.

Il lavoro di ricerca del gruppo si è posto come obiettivo quello di vedere non tanto cosa sanno gli studenti del concetto di funzione in termini tecnici, quanto quale idea hanno o si sono fatti di tale concetto, per certi aspetti a prescindere dalla prassi didattica.

2. FASI DI SVOLGIMENTO E METODOLOGIA DI LAVORO

Per cercare di capire questo, si è innanzi tutto cercato di vedere se la propria conoscenza (legata alla definizione appresa) concorda con la propria idea; si è così discusso sul significato delle definizioni proposte (non tutte uguali) e su situazioni che potessero essere ricondotte o no al concetto di funzione.

Successivamente si sono analizzati 33 libri di testo delle superiori (17 del biennio e 16 del triennio) per vedere come veniva trattato il concetto di funzione. A questa si è aggiunta una ricerca fatta su testi non 'specialistici' come dizionari o enciclopedie.

L'analisi di tali definizioni ha portato a notare che non tutti i libri di testo trattano il concetto allo stesso modo e si è osservato come nelle varie dizioni ci possa essere una visione anche molto diversa del concetto stesso.

I risultati raccolti sono sintetizzati nella tabella sottostante:

CARATTERISTICHE EVIDENZIATE	TRIENNIO	BIENNIO
richiedono le proprietà ovunque definita e funzionale	12	14
richiedono la sola funzionalità	3	4
indicano il dominio come primo insieme del prodotto cartesiano	14	14
indicano il codominio come secondo insieme del prodotto cartesiano	2	5
riportano nella definizione il termine 'legge', 'proprietà' o 'criterio'	8	8
danno una definizione 'insiemistica'	7	9
utilizzano espressioni 'dinamiche' (tipo 'da A a B', 'di A in B', ecc.)	12	13
utilizzano espressioni 'statiche' (tipo 'fra A e B', 'tra A e B', ecc.)	2	4
cambiano dizione statica/dinamica nel passare dalla definizione di relazione a quella di funzione	5	9
utilizzano le variabili x e y nella definizione	7	10

Rispetto al prospetto precedente sono opportune alcune osservazioni.

La maggior parte dei libri di testo richiede per le funzioni entrambe le proprietà (ovunque definita e funzionale). Successivamente si è fatto un confronto fra la propria definizione di funzione e quelle presenti sui libri di testo, soffermandosi soprattutto sulle dizioni tipo "tra A e B" e quelle del tipo "da A a B". Le dizioni come la prima fanno pensare che non ci sia un ruolo privilegiato di uno rispetto all'altro, mentre con la seconda si privilegia A rispetto a B (in un certo senso viene dato "un

¹ Si ringraziano le professoresse, Agazzi Cristina, Marastoni Patrizia e Vellucci Katty per la collaborazione e il prezioso contributo fornito al lavoro.

ordine”). Solo in una discussione successiva sono stati introdotti termini quali *visione statica* e *visione dinamica* per visualizzare il concetto di funzione rispetto alle due dizioni.

E’ in ogni caso rilevante il numero di libri (5 al triennio e 9 al biennio) che passano da una espressione statica ad una dinamica quando passano dal concetto di relazione a quello di funzione. Anche se non espressamente detto, sembra quindi che la funzione non sia solo una particolare relazione, ma abbia qualche altra valenza, che non viene però specificata.

Un’ultima osservazione particolarmente significativa riguarda l’uso delle variabili: più della metà (e anche in questo caso sorprende soprattutto il dato del biennio) usa x e y per indicare le variabili, assegnando quindi a queste lettere un ruolo privilegiato.

Un altro aspetto della discussione iniziale ha riguardato il modo con cui potevano essere date le funzioni ed i termini che sono usciti per rispondere a questa domanda sono stati

Legge	Relazione	Corrispondenza	Regola
Proprietà	Formula	Equazione	

In particolare si è cercato di capire

- 1) se e quali differenze ci fossero tra questi termini;
- 2) se l’uso di questi termini presuppone sempre un ‘legge’ (intesa genericamente come legame di un certo tipo) associata al concetto di funzione.

Nel tentativo di rispondere alla prima domanda si sono esaminati espressioni, ‘scritture’ o concetti che potessero rientrare in ciascuna categoria per vedere se, in opportuni contesti e rispetto ad opportuni insiemi, potessero dare origine a funzioni. In questa fase si è anche fatta una distinzione tra gli aspetti sintattici e gli aspetti semantici insiti nel concetto di funzione.

In prima battuta, di fronte alla domanda se una funzione richieda sempre una legge la risposta del gruppo è stata ‘sì’ (a tale proposito è da osservare che circa la metà dei testi consultati utilizza esplicitamente termini quali ‘legge’, ‘proprietà’ o ‘criterio’ per definire una funzione). Successivamente si sono analizzati grafici empirici (ad esempio andamento delle quotazioni di un fondo azionario, immatricolazioni auto in Italia, ecc.) e si è messa in discussione tale idea. In particolare ci si è soffermati su alcuni problemi:

- 1) il ruolo specifico svolto dalla rappresentazione ed in particolare dalle linee che raccordano i dati (tendenza alla continuità?);
- 2) la rappresentazione dei grafici sui giornali non è sempre in sintonia con la prassi didattica (ruolo dei pallini vuoti);
- 3) il ruolo del tipo di rappresentazione grafica riferita al messaggio che si vuole dare.

Per quanto riguarda le formule, ci si è chiesti se il loro significato semantico (richiamato dal nome delle variabili coinvolte) poteva condizionarne il riconoscimento come funzioni. Sono state in particolare considerate le formule geometriche.

Un discorso a parte merita la discussione relativa al ruolo del concetto di equazione rispetto a quello di funzione e verrà trattato a proposito del quesito 3.

A questo punto si è fatta una breve analisi storica per vedere come il concetto sia stato presentato e si sia evoluto nei secoli. In particolare ci si è riferiti alla definizione di Eulero (grosso modo, funzione come legge) e a quella insiemistica (funzione come terna formata da due insiemi e da un sottoinsieme del loro prodotto cartesiano).

I problemi emersi e le domande che ci si è posti sono serviti come base per la costruzione di un questionario il cui scopo era quello di vedere non quello che gli alunni fanno, quanto piuttosto l’idea che essi hanno del concetto di funzione, per certi aspetti al di là della prassi didattica, rispetto ai dubbi sorti nelle varie discussioni.

3. COSTRUZIONE DEL QUESTIONARIO: SCOPI DEI QUESITI E RISPOSTE ATTESE

1. Serve semplicemente per vedere qual è le definizioni di funzione e di dominio note allo studente. Inoltre si vuole vedere se questa definizione è legata ad una visione più euleriana o più insiemistica.

Il dubbio sorto é che le risposte siano state condizionate dall'ordine con cui sono state indicate le alternative.

2. Come visto, sui libri di testo si ritrovano sia visioni 'dinamiche' che 'statiche' del concetto di funzione. Si è così voluto vedere quale delle due prevale nei ragazzi.

La risposta che si attendeva con maggior frequenza è la A.

Nei quesiti successivi si è trattato in modo significativo il ruolo svolto da formule, equazioni, ecc.

In particolare le domande che ci si è posti sono state

- 1) Per riconoscere una 'scrittura' come possibile funzione è necessaria la presenza di una equazione?
- 2) Tutte le funzioni sono rappresentabili con un'equazione?
- 3) Da ogni funzione è possibile dedurre una legge?
- 4) In un'equazione o in una formula si può sempre riconoscere l'espressione di una funzione? Quando sì e quando no?
- 5) Il nome delle variabili può condizionare la risposta? Se sì, che tipo di processo c'è sotto? Se no, quali altri fattori influenzano la risposta? Cosa c'è sottointeso?
- 6) Quindi equazioni equivalenti (cioè con le stesse soluzioni) possono individuare o no una funzione solo in base al nome delle variabili?
- 7) Quali problemi di carattere semantico sono sottesi alla determinazione delle soluzioni di un'equazione e quali al concetto di funzione?

Venendo più specificatamente ai quesiti:

3. Lo scopo del quesito è vedere se
 - a) il nome delle variabili può rimandare al piano cartesiano (vedi **a**, **d**, **e**), con un chiaro riferimento semantico, per la risposta;
 - b) se il polinomio viene visto come funzione (**g**), cioè se un'espressione può essere vista come funzione;
 - c) se una scrittura che rimanda esplicitamente ad un'equazione in una variabile può essere vista come funzione (**b**, più che **a**, **d**, **f**);
 - d) il comportamento di fronte all'uso di variabili non canoniche (**c**, **f**).

4. Anche in questo caso si insiste sul ruolo delle variabili; in particolare si vuole vedere quanto il concetto di formula può condizionare quello di funzione sia in termini semantici (interpretazione delle formule nel contesto geometrico che le richiama) che come regola in sé. In quest'ottica va intesa anche la valutazione che viene fatta del quesito (anche in modo implicito). Si vuole in sostanza vedere se la risposta

- a) denota un'interpretazione geometrica, sia esplicita (tipo 'è una funzione perché rappresenta l'area del cerchio'), sia implicita (ad esempio attraverso l'insieme preso come dominio). I punti che si riferiscono a questo aspetto sono **b**, **e**, **f**, **g**, **i** i quali ricordano formule geometriche (dirette, inverse o 'sbagliate' nelle variabili o nel suo significato); a questo proposito **c** è stato messo pensando al teorema di Pitagora;
- b) denota un'interpretazione analitica (**h**, che si contrappone, per la forma, a **b**);
- c) denota una visione insiemistica e quindi legata alle proprietà delle relazioni (ovunque definita, funzionale).

A queste esigenze si aggiunge una esplicita condizione legata alla 'scrittura' delle funzioni: spesso, anche nella prassi didattica, si passa indifferentemente da $y=...$ a $f(x)=...$ (o

viceversa) senza chiarire, anche a livello di testi, se e quale differenza c'è tra le due scritture. Nel quesito si vuole vedere se il diverso modo di indicare può influenzare la risposta.

5. Il quesito si pone due scopi fondamentali: vedere se una tabella viene vista come funzione e se la presenza o l'assenza di una legge esplicita può condizionare la risposta.

Si comincia inoltre a porre il problema del dominio, nel senso che si vuole vedere se avviene un'estensione implicita del dominio ad intervalli, anche quando il dominio è dato da insiemi discreti.

L'aspettativa è che avendo messo prima la tabella in cui compare un esplicito legame tra le variabili, questo possa condizionare la risposta sulla tabella successiva, pur avendo, dal punto di vista delle proprietà, le stesse caratteristiche.

Successivamente il quesito è stato confrontato, sul piano della coerenza, con la risposta data al quesito 1 per vedere se e come viene confermata l'idea di funzione espressa in quel contesto.

6. Il quesito ha come scopo quello di indagare come può essere visto un grafico rispetto al concetto di funzione.

All'interno del gruppo l'idea di legge associata al concetto di funzione è andata in crisi proprio di fronte all'analisi di grafici relativi a dati empirici come quelli proposti. In particolare si è voluto vedere se

- a) la rappresentazione (con la distinzione cromatica fra punti e linee di raccordo) può indurre problemi, soprattutto sul dominio;
- b) la rappresentazione con i pallini vuoti (grafico B) può indurre in errore sempre sul dominio, visto che nella prassi didattica il pallino vuoto indica l'assenza dell'elemento. In quest'ottica si è volutamente tolta l'indicazione relativa all'origine dei dati riportati (immatricolazioni di auto in Italia).
- c) Infine si ripropone anche in questo contesto il problema del dominio se visto in modo continuo o discreto.

Anche rispetto a questo quesito si è effettuato un test 'di coerenza' rispetto alla risposta data al quesito 1.

7. Lo scopo del quesito, come quello del successivo, è vedere se la rappresentazione di una funzione può condizionarne la lettura (e quindi eventuali scelte).

Il modo con cui si è scelto di presentarlo ha sollevato parecchie discussioni: secondo alcuni mettere gli stessi valori sull'asse delle ordinate avrebbe reso palese l'uguaglianza dei due grafici. La proposta era di mettere valori camuffati (tipo 19/5 al posto di 3,8). L'obiezione a questa proposta è che in questo modo, a fronte di risposte che privilegiano un grafico anziché un altro, non si capirebbe se tale diversità sia dovuta al grafico o a difficoltà rispetto ai numeri razionali, perdendone così lo scopo. Al termine della discussione si è raggiunto il compromesso di cambiare il modo di indicare i valori sull'asse delle ordinate, oltre che di cambiare lo sfondo.

8. E' strettamente legato al precedente: si vuole vedere se il modo con cui vengono raccordati i punti (con una curva anziché con dei segmenti) può cambiare sia il modo di vedere il grafico (e di associarlo al concetto di funzione) che il modo di vedere il dominio.

9. Si vogliono vedere sostanzialmente due cose:

- a) se il parlare esplicitamente di equazione può 'disturbare' le questioni relative al concetto di funzione (se in sostanza è sentita in modo marcato la differenza tra equazione e funzione);

b) se la mancata espressione del contesto semantico (non vengono indicati gli insiemi in cui la funzione è definita) è notata dagli alunni e ne condiziona, come tale, le risposte.

Relativamente al punto b) precedente ci si attende una prevalenza di risposte **b** al triennio (in cui è più immediata l'interpretazione in R) e del tipo **a** al biennio (in cui sono più forti gli aspetti legati al calcolo algebrico).

10. In questo quesito, come del resto nel precedente, si vuole vedere in quali ambiti si esprime il concetto di uguaglianza tra funzioni (se cioè a livello di dominio, di grafico o di espressione formale).

NB. Il questionario è riportato in appendice alla fine del lavoro

4. DESCRIZIONE CAMPIONE

Il questionario è stato somministrato a 262 alunni (107 del biennio e 155 del triennio) provenienti dalle seguenti classi²

Una prima Liceo scientifico;

Due seconde Liceo scientifico

Due seconde Istituto Tecnico Commerciale

Una terza Liceo Scientifico

Una quarta ITIS

Una quarta Geometri

Una quarta ITC

Due quinte Liceo Psico-pedagogico

Una quinta Liceo Classico

Una quinta Istituto d'Arte

Una quinta ITIS

5. RISULTATI TROVATI E ANALISI RISULTATI

1. In (i) prevale la risposta **a** (50%) legata alla definizione di legge ovunque definita e funzionale. Non è escluso che l'ordine delle risposte e la formulazione un po' più complessa di **d** abbia spinto per questa risposta. Rimane comunque significativa la differenza tra le percentuali del biennio e del triennio (39% contro 57%) a segnare una presenza (che verrà confermata anche in seguito) dell'idea di legge presente al triennio più che al biennio. Nel complesso, inoltre, sono circa 20% che parlano di sola funzionalità per la funzione (con prevalenza nel biennio), ma più del 50% (con prevalenza sempre nel biennio) considerano il dominio come l'insieme degli elementi che hanno un'immagine, come se l'ovunque definita, rispetto alla funzionalità, sia comunque meno importante (da osservare, al proposito, come la maggior parte dei libri di testo richieda per le funzioni entrambe le proprietà e indichi nel primo insieme del prodotto cartesiano il dominio).
2. Come era atteso, la maggioranza degli alunni (74%) ha scelto una visione dinamica per illustrare 'didatticamente' il concetto di funzione. Anche in questo caso si nota comunque la netta differenza tra le risposte del biennio (84%) e quelle dei ragazzi del triennio (68%) a nostro avviso imputabili alla maggior dimestichezza col piano cartesiano da parte di questi ultimi.
3. Le 'scritture' **a**, **d**, ed **f** sono trattate al biennio allo stesso modo (percentuali di risposte positive che si aggirano sul 55%) con scarse motivazioni legate al piano cartesiano (1-3%);

² Si ringraziano tutti gli insegnanti che hanno collaborato somministrando il questionario alle loro classi: Astori Elena, Bonifazi Patrizia, Cerusco Antonio, Damiani M.Livia, Delfrate M.Grazia, Ferrari Daniela, Genevini Angela, Cozzani M. Rosa, Rizzardelli Elena, Santi Lucia, Petrini Fulvia, Volpi Claudio, oltre alle già citate Agazzi Cristina, Marastoni Patrizia e Vellucci Katty.

al contrario al triennio le risposte positive ad **a** sono in netta maggioranza (60% contro 36% di **d** e 37% di **f**), con un consistente aumento delle motivazioni legate al piano cartesiano.

L'uso di variabili non canoniche in **c** non crea invece differenze tra biennio e triennio (63% al biennio e 70% al triennio i 'sì', con qualche motivazione in più al biennio, motivazioni legate alla legge, 12%, o alle proprietà delle relazioni, 11%).

L'incidenza del piano cartesiano al triennio si nota anche in **e** che il 58% dei ragazzi vede una funzione, con circa il 10% che fornisce motivazioni legate al piano cartesiano. Le motivazioni positive legate al piano cartesiano costituiscono la maggioranza al triennio, mentre al biennio questo ruolo è svolto dalle motivazioni legate alle proprietà delle relazioni. Tra le motivazioni alle risposte negative, le più frequenti (con percentuali attorno al 10% sia al biennio che al triennio per **a**, **b**, **d** ed **f**) si riferiscono al fatto che manchi una variabile. Infine circa il 70% (senza significative differenze tra biennio e triennio) non considera il polinomio una funzione.

E' il caso di osservare come la tra le altre motivazioni legate al fatto che **b** e **h** non siano funzioni, le più frequenti sono 'perché è un'equazione' (**b**) e 'perché è un sistema' (**h**); in particolare la prima ha ottenuto circa un 7% complessivo, quasi tutto però concentrato al biennio.

4. Le risposte legate a motivazioni geometriche non sono molte in positivo (tranne la **b** che al triennio totalizza un 17% a fronte di un 54% complessivo). Nel complesso l'interpretazione geometrica delle formule non sembra abbia condizionato molto, anche se è da notare che al biennio nella **b** la differenza tra i 'sì' e i 'no' non è così marcata (41% contro 39%) denotando una maggiore incertezza.

Le motivazioni positive del triennio sono distribuite su motivazioni di carattere analitico oppure legate alle proprietà delle relazioni, mentre al biennio si concentrano soprattutto su quest'ultima. Parecchie motivazioni, soprattutto al triennio, sono deducibili dal dominio.

Le risposte al quesito sembrano essere caratterizzate soprattutto dal diverso uso delle variabili o del modo di indicare le funzioni. Infatti ad **e**, **f**, **g** le percentuali di chi dice che sono funzioni sono molto diverse: 18%, 19%, 44% al triennio e 27%, 14% e 47% al biennio. L'unica motivazione plausibile sembra essere legata alla forma con cui le tre 'scritture' sono presentate: indubbiamente $f(\cdot)=\dots$ sembra fare pensare più alla funzione che le altre. E' da osservare al proposito che il maggior numero di risposte positive (sia al triennio che al biennio) si ha proprio per quelle funzioni che sono presentate in questa forma.

Non dovrebbe sorprendere che il quesito col maggior numero di risposte negative sia il **c** (sia al biennio che al triennio); forse un po' di più dovrebbero sorprendere al proposito le risposte negative ad **e** e ad **f** (soprattutto al triennio, dove sono dell'ordine del 65%).

Da osservare che alcuni alunni hanno risposto che **b**, **e**, **f** e **g** non sono funzioni poiché mancano le variabili!

In generale nei quesiti 3 e 4 si può notare una prevalenza degli aspetti semantici al triennio (con un ruolo forte giocato dal piano cartesiano), mentre al biennio prevalgono gli aspetti sintattici.

5. Il quesito evidenzia come l'idea di una legge possa condizionare il concetto di funzione, anche quando la richiesta non è esplicita. Infatti la prima tabella viene riconosciuta come una funzione sia dalla maggioranza dei ragazzi del triennio (81%) che del biennio (95%). Le percentuali cambiano per quanto riguarda le motivazioni: al biennio coloro che motivano la risposta con le proprietà delle relazioni sono in netta maggioranza rispetto a chi motiva per la presenza di una legge (52% contro 22%), mentre al triennio le due percentuali si equivalgono (36% contro 33%). La seconda viene riconosciuta come funzione solo dal 50% dei ragazzi del biennio e addirittura solo dal 28% dei ragazzi del triennio. Questa diminuzione delle percentuali è molto superiore rispetto a quella di coloro che avevano dato in precedenza motivazioni legate alla legge. Viene da pensare che, anche se non esplicitamente, l'idea di una legge possa condizionare il riconoscimento di una funzione (o il

considerare una 'cosa' come funzione). Questo vale soprattutto per il triennio (in cui risulta significativo pure il dato relativo a coloro che non rispondono per la B: il 45%), ma non è da trascurare neppure il dato del biennio.

Per quanto riguarda il dominio ed il codominio, è da osservare come molti sia al biennio (circa 30%) che al triennio (circa 20%) utilizzino le variabili per indicare l'insieme; inoltre al triennio sono circa il 10% coloro che utilizzano intervalli (molti di più che al biennio, dove la percentuale si attesta sul 3%), manifestando una tendenza alla continuità.

Sempre rispetto agli insiemi è da osservare come al triennio più che al biennio ci sia una tendenza ad estenderli ad insiemi 'più grandi' (N, P, a volte R), quasi una tendenza alla generalizzazione.

Infine è da osservare come ai punti **b** e **c** sia per la tabella A che per la B le percentuali del biennio siano praticamente identiche, mentre al triennio ci sono differenze anche significative relative ad A.

A questo quesito era collegato un test di 'coerenza' per confrontare la risposta ad 1 con concetto di funzione emerso nei due contesti. La percentuale dei coerenti è attorno al 20% sia al triennio che al biennio, mentre aumenta al biennio quella dei non coerenti. La percentuale più alta al triennio (37%) è quella di coloro che, malgrado le motivazioni legate alle proprietà delle relazioni, di fatto si fanno condizionare dalla presenza di una legge nella prima tabella; anche al biennio, in ogni caso, la percentuale non è trascurabile (26%) pur essendo decisamente più bassa.

6. Non ci sono grosse differenze nelle risposte relativamente ai due grafici, per cui non sembra avere influito molto né la forma diversa dei punti, né l'indicazione semantica sulla provenienza del grafico. Anche se molti non hanno risposto, generalmente come dominio viene indicato l'insieme dei vari elementi (anni o mesi), soprattutto al biennio. Al triennio aumenta il numero delle risposte non date (attorno al 50%) mentre la percentuale di coloro che indicano il dominio come intervallo è circa la metà delle risposte date. Questo, secondo Francesca, è frutto di una visione forse più dinamica, più complessiva: ogni punto non è visto a sé, ma come parte di un tutto (in questo caso un intervallo).

Infine, coloro che non pensano che ci sia una legge sottesa al grafico sono la maggioranza, ma con percentuali significativamente diverse tra biennio (circa 60%) e triennio (circa 45%). Anche in questo caso (essendo richiesto esplicitamente se c'era una legge sottesa al grafico) si è effettuato un test di coerenza col quesito 1; prevalgono non definibili (cioè coloro che non associano necessariamente una legge al concetto di funzione oppure dicono che i due grafici non rappresentano funzioni e per i quali non è possibile dare una precisa collocazione), mentre i non coerenti sono in misura molto maggiore (rispetto ai coerenti) al biennio (circa 25% contro 7-9%) che al triennio, in cui le due percentuali si equivalgono (attorno al 20%).

7. Come era atteso, la maggioranza ha risposto entrambi (o che i grafici sono uguali rispetto all'informazione richiesta), ma con percentuali non 'schiaccianti' (73% al triennio e soprattutto 61% al biennio). In questo caso sembra evidente l'influenza dell'andamento del grafico rispetto ai valori delle variabili. Giovanni si stupisce del fatto che circa la metà di coloro che non hanno risposto 'Entrambi' abbia risposto B: secondo lui, o si sono divertiti a prenderci in giro o qualcosa non va nel loro modo di pensare....
8. Anche in questo caso si riscontrano risposte già viste in 6. Rispetto ai due grafici le risposte sono date con percentuali analoghe, per cui la linea di unione dei punti evidenziati, anche quando è una curva, viene vista più come linea indicante l'andamento che parte della funzione. Questo è evidente soprattutto nel dominio e nel codominio, in cui la maggioranza, sia al biennio che al triennio, ha indicato l'insieme anziché l'intervallo, ma con percentuali nettamente diverse: circa il 50% al biennio contro il 30% del triennio (in cui tra l'altro le risposte non date sono dell'ordine del 50% contro il 33% del biennio). Questa differenza tra triennio e biennio si riscontra anche nella scelta del grafico: seppure la maggior parte (circa

- il 70%) non faccia differenza tra i due, tra i restanti preferiscono A il 12% dei ragazzi del triennio (a fronte di un 5% che preferisce B); al biennio le percentuali sono uguali (10%).
9. E' il quesito in cui il termine 'equazione' per indicare una funzione compare più esplicitamente. Questo non sembra aver disturbato più di tanto i ragazzi (solo il 10% risponde **d** o non fornisce risposte). Le differenze significative si notano tra biennio e triennio relativamente alle risposte **a** e **b**: nel biennio prevale **a** (49%), mentre nel triennio prevale **b** (67%). L'abitudine a lavorare in R ha sicuramente influenzato le risposte del triennio, per la tendenza a mettersi automaticamente in un insieme privilegiato. Nelle risposte del biennio sembra prevalere l'abitudine al calcolo algebrico. Anche in questo caso quindi sembra ci sia una tendenza più marcata verso ambiti semantici da parte dei ragazzi del triennio rispetto ai compagni del biennio più 'sintattici'.
10. Quello che si può osservare è che le risposte del biennio che ritengono **a**, **b**, **c** veri sono più 'compatte' attorno al 55%, mentre nel triennio ci sono 14 punti percentuali di differenza tra **b** e **c**, quest'ultima la risposta con più 'vero' (57%). A parte la maggioranza dei ragazzi del triennio che indica nel grafico l'elemento più caratterizzante di una funzione (di fatto) è da notare come la questione **b** sia la meno 'gettonata' sia al biennio che al triennio (54% al biennio e 43% al triennio), probabilmente per la difficoltà ad esprimere un concetto di uguaglianza tra funzioni (la maggiore dimestichezza con i grafici si è riscontrata anche in 6, 7 e 8). Il 62% dei ragazzi del biennio che affermano che **a** è vera conferma la tendenza già evidenziata nel quesito precedente.

6. CONCLUSIONI (dell'insegnante)

Nel lavoro che si è fatto e nel successivo questionario prodotto si è cercato di coinvolgere diversi temi e aspetti non necessariamente didattici legati al concetto di funzione. Al di là dei risultati conseguiti, ve ne sono di sicuramente importanti da ricondurre alle fasi del lavoro:

- a) discussioni preliminari: in queste fasi si è passati da una circospezione generale e naturale da parte dei ragazzi nei confronti di un argomento che fa parte della loro prassi didattica e che, come tale, tendevano a considerare come 'da sapere' ad una fase in cui il rapporto è diventato paritario non solo tra di loro, ma anche tra loro e gli insegnanti che hanno partecipato al lavoro. Quando è risultato chiaro che nessuno aveva o poteva avere delle risposte, si è entrati nel vero lavoro di ricerca: cercare cose che prima non ci sono. Questo ha comportato, col passare del tempo, una maggiore sicurezza, non per quello che si sapeva, ma per le questioni che continuamente uscivano, rendendo chiaro come lo scopo non fosse dare delle risposte, ma porre soprattutto delle domande.

I quesiti che sono stati infine scelti sono stati proposti e selezionati dai ragazzi in base all'idea che alla fine si sono fatti relativamente alle finalità del lavoro.

- b) Stesura del questionario. La successiva stesura del questionario ha rispecchiato appieno questo spirito, per cui anche l'analisi delle risposte non è stata fatta andando a cercare la risposta giusta, quanto piuttosto nel cercare di capire cosa potesse significare quel tipo di risposta. Durante l'analisi dei risultati poi, com'è ovvio, ci si è resi conto di come certe questioni potessero essere scritte in modo più semplice (tipo il quesito 1 nella parte relativa alla funzione come sottoinsieme di un prodotto cartesiano; si teme che chi non ha data come risposta questa possa essere stato condizionato da difficoltà di comprensione) o come altre abbiano comportato risposte diverse da quelle previste.

Un aspetto non trascurabile riguarda la parte relativa alla valutazione del questionario. Dopo aver concordato la griglia di valutazione e dopo averla testata su alcuni questionari, ci si è suddivisi il lavoro, lasciando ad una discussione in comune i casi più ambigui (legati soprattutto alla presenza di motivazioni). Ciò non toglie che il senso di alcune risposte sia legato all'interpretazione o meglio al concetto di funzione presente nel correttore. Questo aspetto risulta comunque in linea con il senso del lavoro: alla fine in effetti non è stata data

una visione privilegiata di funzione, ma è prevalsa l'idea che il concetto si potesse prestare a diverse prospettive.

- c) Questioni legate alla somministrazione del questionario: nel gruppo si è discusso anche sul modo di somministrare il questionario. A tale proposito sono emerse varie ipotesi:
- 1) somministrarlo per gruppi;
 - 2) somministrarlo individualmente, ma a gruppi selezionati (dagli insegnanti in base alle motivazioni personali)
 - 3) somministrarlo a tutta la classe.

La prima ipotesi nasceva dall'esigenza di un confronto, lo stesso, per certi aspetti, che il gruppo ha fatto per arrivare a queste conclusioni. Si voleva in sostanza che i ragazzi usassero il questionario come strumento di riflessione.

La seconda ipotesi nasceva dall'esigenza che il questionario 'fosse preso sul serio'.

Alla fine, non senza discussione, ha prevalso la terza ipotesi, visto che il concetto di funzione dovrebbe essere trasversale e che lo scopo era anche quello di vedere quale l'idea è rimasta al di là della prassi didattica.

E' inoltre corretto riportare una critica rivolta da alcuni insegnanti di altre scuole al lavoro, secondo cui tale questionario era 'tarato' su realtà liceali. Chiediamo di dare una risposta a tale obiezione, vedendola rispetto a quello che si ritiene dovrebbe essere noto del concetto di funzione, per studenti di qualunque ordine di scuola se, come si sostiene, risulta essere un concetto-cardine (e appunto trasversale) della matematica.

E' sicuramente da sottolineare l'importanza didattica del lavoro: la costruzione del questionario ha 'costretto' i ragazzi a confrontarsi con questioni quali la conoscenza di un concetto al di là della definizione nota, la ricerca di significati sottesi (ponendosi quindi il problema se tali significati esistono o possono esistere), confrontarsi con compagni di altre classi (di maggiore o di minore età) e con gli insegnanti su un piano (quello della mancanza di certezze e della ricerca) paritario, il problema della costruzione di uno strumento d'indagine e quello successivo dell'interpretazione e della valutazione. Tutto ciò ha comportato una maggiore responsabilizzazione ed un coinvolgimento diretto che si è consolidato con la convinzione di una crescita nella coscienza del lavoro.

Per quanto riguarda gli aspetti più strettamente legati al lavoro, sono opportune alcune considerazioni.

Anche nella prassi didattica ci si muove spesso su piani ambigui e non ben definiti: si introduce la funzione come relazione, per poi passare, soprattutto al triennio, ad un'idea di legge che si radica con il piano cartesiano. L'uso stesso di termini come equazione (riferita da alcuni autori alla funzione e non solo alla curva da essa individuata) trova la sua giustificazione nell'introduzione degli insiemi attraverso proprietà caratteristiche.

Il percorso didattico è a grandi linee il seguente:

- 1) insieme \Leftrightarrow proprietà caratteristica (enunciato aperto o proposizione, a seconda dei testi)
- 2) relazione \Leftrightarrow proprietà caratteristica (enunciato aperto o proposizione in due variabili)
- 3) equazione \Leftrightarrow proposizione con predicato di uguaglianza
- 4) equazione in due variabili \Leftrightarrow proposizione in due variabili con predicato di uguaglianza

Quindi un'equazione (in due variabili) può portare alle relazioni e da qui alle funzioni, pur partendo da problemi diversi. In particolare la funzione, soprattutto quando risulta legata a problemi o esprime un legame tra grandezze, viene vista in modo sicuramente diverso rispetto alla funzione espressa da un'equazione.

Le scritture più comunemente usate sono

- a) $f(x)=\dots$
- b) $y=\dots$

c) $x \longrightarrow \dots\dots$ (più raro)

Rispetto al lavoro fatto, potremmo riferire la terza forma ad una visione dinamica del concetto di funzione, mentre la prima fa pensare alla funzione come ‘macchinetta’ che, dato un valore di x , ne fornisce il risultato. Questa forma, utilizzata soprattutto nei problemi in cui si cercano legami o variazioni tra grandezze, non esprime esplicitamente una seconda variabile e quindi fa allontanare in un certo senso dall’idea di funzione come insieme di coppie ordinate, idea invece pesantemente presente in (b) in cui si passa ad una visione chiaramente statica: la funzione è data in atto (il suo grafico ne è la migliore espressione), laddove in (c) e in (a) è data in potenza.

Viene quindi da chiedersi: se il concetto di equazione porta con sé una visione statica di funzione, il passaggio, che spesso si fa e che viene fatto anche dai libri di testo dalla forma (a) alla forma (b) (e che fa scrivere poi cose del tipo “..... la funzione $f(x)$” come nel testo dell’ultima maturità scientifica) viene vissuto in modo indolore dai ragazzi? Il passaggio dalla funzione come ‘macchinetta’ alla funzione come insieme di coppie (e quindi grafo, col ruolo decisivo svolto dal piano cartesiano, come si è visto anche nel questionario, soprattutto al triennio) è sufficientemente chiarito e chiaro, non tanto e non solo rispetto agli ambiti, quanto rispetto all’idea di quali richieste e quali esigenze siano sottese in una rispetto all’altra? Il piano cartesiano, col pesante ruolo svolto dalle variabili ‘canoniche’ porta ad **una** idea di funzione o, soprattutto al triennio, **all’**idea di funzione?

Le riflessioni che come insegnati dovremmo fare sono anche di altro tipo: il concetto di funzione è visto allo stesso modo da tutti i matematici (analisti, logici, geometri, statistici, ecc.)? La risposta è ovviamente negativa: per gli analisti ad esempio l’importanza della continuità (della derivabilità e in generale della legge) è diversa rispetto ad un logico, così come è diverso l’aspetto grafico per un geometra e un logico. Noi, come insegnanti, a quale modello pensiamo nel corso dell’attività didattica? E, soprattutto, gli alunni a quale idea, mediata da noi, giungono? L’indubbio salto da una visione sintattica ad una semantica nel passare dal biennio al triennio è voluto in modo cosciente (dagli insegnanti) o diventa una inconscia conseguenza della presentazione dei programmi? Credo che siano queste le domande a cui cercare di rispondere, al di là delle definizioni che possiamo scegliere di dare.

ALUNNO.....CLASSE.....
 ISTITUTO.....

Indicazioni operative:

- 1) leggi con attenzione i seguenti quesiti e rispondi in base alle tue conoscenze (non necessariamente scolastiche);
- 2) dove ti viene richiesto, fornisci motivazioni semplici e brevi alle tue risposte (cerca di non uscire dagli spazi predisposti).

Hai a disposizione un'ora di tempo.

QUESTIONARIO

1) Segna la/e risposta/e che ritieni corretta/e

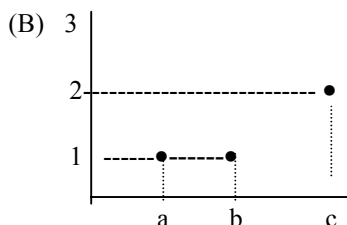
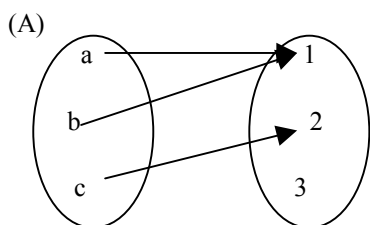
i) Una funzione è

- a) una relazione tra due insiemi A e B che associa tramite una legge a ogni elemento di A uno ed un solo elemento di B;
- b) una relazione tra due insiemi A e B che associa tramite una legge a ogni elemento di A al massimo un elemento di B;
- c) un sottoinsieme del prodotto cartesiano $A \times B$ che associa ad ogni elemento di A al massimo un elemento di B;
- d) un sottoinsieme del prodotto cartesiano $A \times B$ che associa ad ogni elemento di A uno ed un solo elemento di B.

ii) Riferendoti alla risposta data in (i), il dominio di una funzione è:

- a) A
- b) B
- c) insieme degli elementi di A che sono in relazione con un elemento di B
- d) insieme degli elementi di B che sono in relazione con almeno un elemento di A

2) I due grafici seguenti rappresentano una funzione. Quale useresti per spiegare il concetto ad un tuo amico? Risposta: _____



3) Le seguenti 'scritture' possono indicare delle funzioni ?

	SI	NO	Non so	Motiva brevemente
a) $1=y$	—	—	—	_____
b) $x^2-3x+2=0$	—	—	—	_____
c) $k=\frac{z^2+1}{2}$	—	—	—	_____
d) $x=1$	—	—	—	_____
e) $x^2+y^2=1$	—	—	—	_____
f) $z=1$	—	—	—	_____
g) x^2+3x-5	—	—	—	_____
h) $y=\begin{cases} 2x+1 & x>0 \\ x & x>0 \end{cases}$	—	—	—	_____

4) Rispondi rispetto alle seguenti 'scritture':

'SCRITTURE'	Rappresenta una funzione?		Variabile/i del dominio e dominio (se è una funzione)	Motiva brevemente la tua risposta
	SI'	NO		
a) $f(x)=\sqrt{x}$				
b) $S=\pi r^2$				
c) $a^2+b^2=c^2$				
d) $f(r)=\sqrt{(r+3)}$				
e) $A=\frac{bh}{2}$				
f) $A=\frac{bh}{4} (-2)$				
g) $f(A,h)=\frac{2A}{h}$				
h) $x=y^2$				
i) $f(y)=2\pi y$				

5) Relativamente alle seguenti tabelle, rispondi :

- E' una funzione? Perché?
- Se si, qual è il suo dominio?
- E il suo codominio?

Tabella (A)

n	p
1	2
2	4
3	6
4	8
5	10
6	12

a) _____

b) _____

c) _____

Tabella (B)

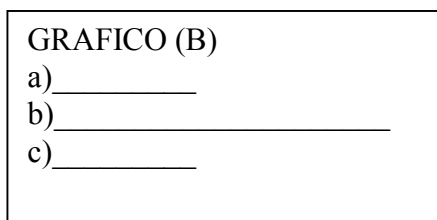
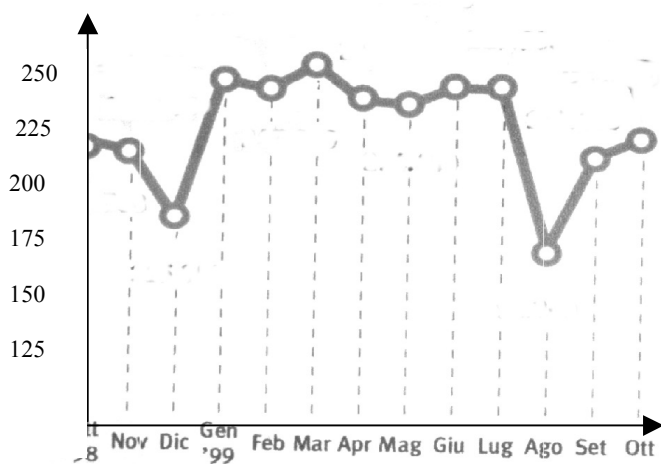
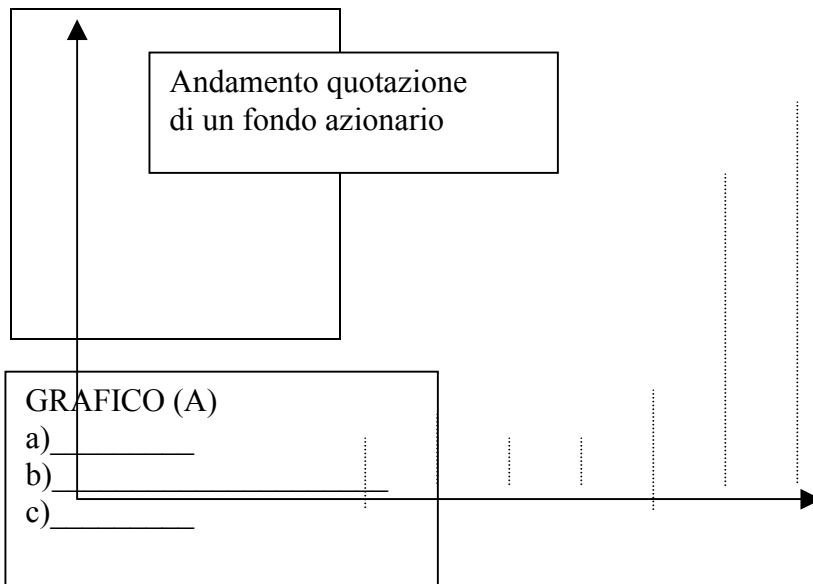
z	t
0,162	3,69
0,171	3,78
0,183	3,84
0,197	3,95
0,285	3,96
0,297	4,02

a) _____

b) _____

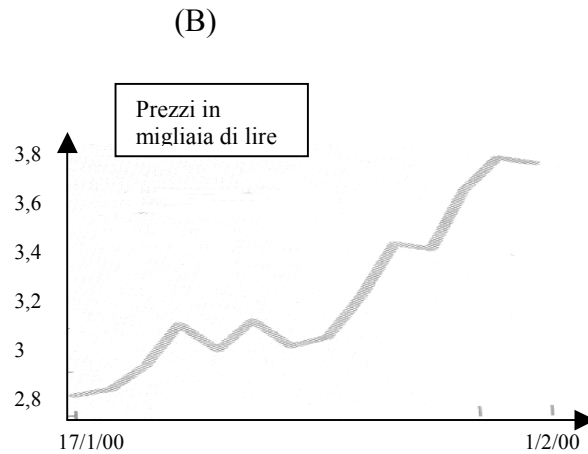
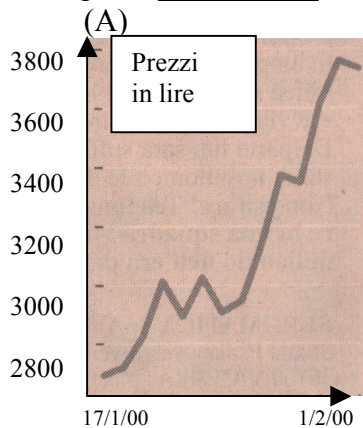
c) _____

- 6) Guardando i seguenti grafici e tenendo presente la risposta data al quesito 1, stabilisci
- se sono grafici di funzioni (rispondi sì oppure no)
 - il dominio
 - se secondo te c'è una legge associata al grafico (sì oppure no)



7) Nelle figure sottostanti sono rappresentati i grafici degli andamenti di due azioni. Su quale avresti investito più volentieri?

Risposta: _____

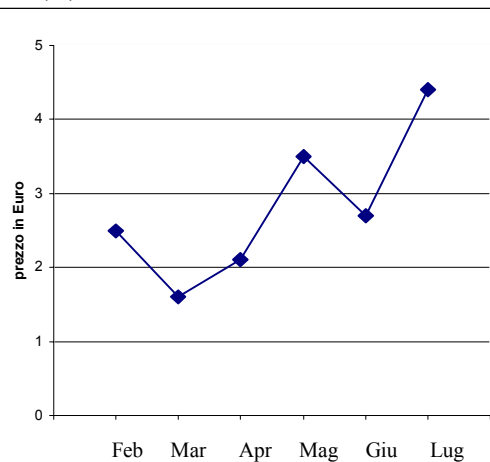
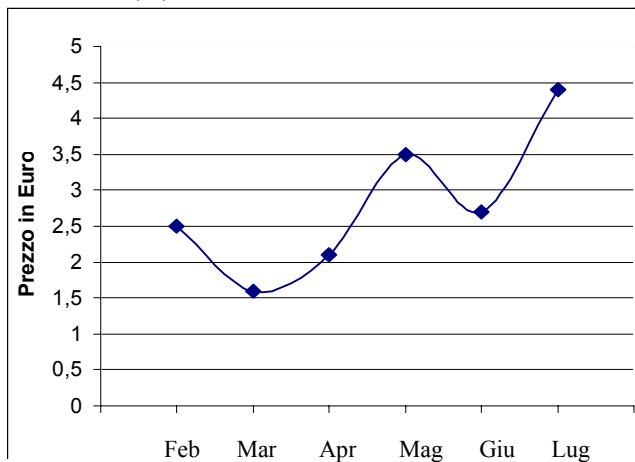


8) Nei grafici (A) e (B) è evidenziato l'andamento di due azioni. Rispondi (una risposta per ogni grafico)

- a) Rappresenta una funzione? _____ a) _____
 b) Se sì, qual è il dominio? _____ b) _____
 c) E il codominio? _____ c) _____
 d) In quale azione avresti investito più volentieri? _____

(A)

(B)



9) Le equazioni $y = \frac{(x+2)^2}{x^2-4}$ e $y = \frac{x+2}{x-2}$

sono le equazioni di due funzioni (indica la risposta che ritieni corretta) i cui domini

- a) sono uguali;
 b) sono diversi;
 c) non si può rispondere;
 d) non sono funzioni.

10) Le funzioni $y = \frac{x+3}{x^2-9}$ e $y = \frac{1}{x-3}$ definite in \mathbb{N}

(rispondi vero o falso)

- a) hanno lo stesso dominio _____
 b) sono uguali _____
 c) hanno lo stesso grafico _____
 d) non sono funzioni _____