CONTINUITE ET DISCONTINUITE
Une activité avec des enseignants en formation

Achille Maffini[1]

0. Prémisse

Le problème de la continuité d'une fonction est affronté dans la didactique italienne pendant le cours d'analyse (qui d'habitude au lycée est proposée en cinquième et dernière année) et, en général, après avoir introduit le concept de limite.
En effet, comme du reste on le sait, l'introduction des nombres réels et surtout le plan cartésien utilisent énormément le concept de continuité pour la représentation des courbes. C'est tellement vrai que dans l'introduction intuitive du concept de limite beaucoup de textes utilisent implicitement justement la continuité pour «justifier» la définition de limite.
Le problème, à mon avis, réside en une relation- séparation entre le concept de continuité dans un sens global et le concept dans un sens local.
Le travail proposé est le fruit d'une activité, établie sous forme de réflexion, dans un laboratoire didactique[2] de Mathématiques auprès de l'Ecole de Spécialisation pour l'Enseignement Secondaire de l'Université de Parme. L'objectif principal dans ce sens, au delà du document spécifique, était celui d'induire «une attitude» vers les approches possibles par rapport à un sujet[3] et un tel objectif constituait en fait le squelette de tout le laboratoire.
Le groupe avec lequel nous avons travaillé est constitué de 17 personnes en formation (15 présents) avec des maîtrises en mathématiques, physique, profession d'ingénieur, tous avec des expériences (plus ou moins significatives) d'enseignement.

1. Orientation de l'activité

Comme activité introductive à celle-ci, on avait proposé précédemment une activité sur le concept et sur le sens d'une définition mathématique dans laquelle nous avons donné quelques précisions sur la structure. En général une définition se présente comme implication, où l'antécédent est formé par les propriétés qui indique l'entité à définir (posé comme conséquence). En fait il s'agit d'un si et seulement si, où l'autre implication est implicite sur le plan syntaxique, tandis que sur le plan sémantique elle est explicitée à travers la caractérisation de l'entité à définir à travers les conditions posées. Cette précision peut être 'lue' aussi d'une autre manière; si avec A nous indiquons le concept à définir et avec B les propriétés qui le définissent, la structure de la définition est du type $B \rightarrow A$; mais il est aussi opportun, dans la pratique didactique, de mettre en évidence comme les entités qui ne vérifient pas les propriétés B ne sont pas de type A, c'est à dire $\neg B \rightarrow \neg A$; dans une logique classique la conjonction des deux propositions porte justement à la double implication dans la définition.
Par exemple si je définis un parallélogramme comme un quadrilatère avec les côtés opposés parallèles, je suis en train de dire que

---

[1] Lycée scientifique G. Falcone- Asola (MN) et Unité locale de recherche en Didactique des Mathématiques de l'Université de Parme. E mail: a.maffini@inwind.it

[2] A l'intérieur de la SSIS le but du laboratoire (Aire 3) est celui de favoriser les projets et la réalisation d'activités didactiques utilisables pendant le stage ou, plus généralement , d'un point de vue méthodologique, dans la future carrière des enseignants.

[3] Dans le décret (instituteur des SSIS) MURST 26/5/98 qu'on clarifie comme dans la formation initiale de l'enseignant l'attitude du chercheur est importante: «*….posséder des connaissances adéquates dans le domaine des secteurs disciplinaires de sa compétence, avec également des références aux aspects historiques et épistémologiques; [...] continuer à développer et approfondir ses connaissances et ses compétences professionnelles, avec une attention pour les acquisitions scientifiques ; rendre significatives, systématiques, complexes et motivantes les activités didactiques à travers un projet curriculaire flexible qui incluse les décisions par rapport aux objectifs, aires de connaissance, méthodes didactiques; [...]*»

Si un quadrilatère a ses côtés opposés parallèles **alors** c'est un parallélogramme.
Ceci à priori n'exclut pas que je puisse appeler parallélogramme aussi d'autres objets (par exemple cela n'exclue pas que les trapèzes soient des parallélogrammes, vu que l'antécédent de la proposition serait faux et rendrait vrai la proposition même en n'excluant pas , s'agissant d'une définition que la conséquence soit vraie).

Sur le plan didactique, on dessine , dans ce cas un trapèze pour dire que ce n'est pas un parallélogramme, c'est-à-dire

Si c'est un quadrilatère il **n'**a **pas** ses côtés opposés parallèles **alors** ce **n'**est **pas** un parallélogramme .
En substance on veut que les quadrilatères soient tous et seulement les quadrilatères avec les côtés opposés parallèles.

En revenant sur l'activité de la continuité, on a distribué aux personnes en spécialisation certains textes de lycées scientifiques et certains textes universitaires et on leur a demandé de donner une formalisation logique schématique des définitions comme elles étaient présentées. Avec «logique schématique» on entendait une schématisation qui tienne compte de la structure générale de la définition d'un point de vue propositionnel. Les buts de cette première remise étaient essentiellement deux:

1) faire remarquer que toutes les définitions ne sont pas toutes du même type;
2) faire trouver la structure logique d'une définition.

Si le premier objectif a été facilement atteint, certains ont rencontré des difficultés dans le second cas, ceci montrant le peu de familiarité, même de la part des étudiants avec une maîtrise de mathématiques, avec les instruments de la logique.

2. Les définitions trouvées

Avant d'analyser les définitions de fonctions continues tirées des livres d'analyse considérés (la référence entre parenthèses carrées renvoie au texte indiqué en bibliographie), nous citons quelques définitions tirées de livres universitaires.
Avant tout, pour parler de fonctions continues, il faut considérer une fonction définie par un ensemble X à un ensemble X' dotés d'une structure topologique. Pour nos buts, nous avons traité des fonctions réelles définies dans des sous systèmes de R avec l'ordinaire topologie sur R.

[CTV] Soit X et X' deux espaces topologiques et soit f: $X \rightarrow X'$ une application de X en X'. Nous dirons que f est une application continue si l'image inverse $f^{-1}(A')$de chaque A' ouvert de X est un ouvert de X [page 21]
Après [page 22], dans le même texte, on donne une proposition où on démontre qu'une fonction entre espaces topologiques est continue si et seulement si la contre-image d'un fermé est un fermé. Dans cette définition, la «topologie ordinaire», définie par exemple avec les intervalles , joue un rôle décisif, dans le sens de la continuité de R.

[P] Soit E, F deux espaces topologiques et soit f: $E \rightarrow F$ une application. L'application f se dit continue en $x_0 \in E$ si, pour chaque espace autour V de $y_0=f(x_0)$, existe un espace autour U de x_0 que $f(U) \subset V$. Ce qui équivaut à dire: pour chaque espace autour V de y_0 $f^{-1}(V)$ est un espace autour de x_0. [page 113]
[AB] Si f: $A \rightarrow R$ (l'écriture est pour "f est une fonction de A à R"), on dit que f est continue en x*si[4]

$$\forall U \in F_{f(x^*)}\ \exists V \in F_{x^*}\ \forall x \in A \cap V\ f(x) \in U \qquad [pag. 281]$$

[4] Avec F_x nous dénoteron la famile des espaces autours de x

Par la suite (p. 282) dans le même texte on démontre une propositionoù on affirme que la définition de continuité équivant à trois autres:

a) $\forall U \in F_{f(x^*)}\ \exists V \in F_{x^*}\ f(A \cap V) \subset U$
b) la contre image d'un espace autour de f (x*) est un espace autour de x*
c) c1) x* est un point isolé de A ou bien c2) $\lim_{x \to x_*} f(x) = f(x^*)$

3. Observations sur le concept de continuité.

Les trois définitions précédentes n'indiquent pas toutes 'la même chose'. En particulier [P] et [AB], tirées de textes d'analyse, se réfèrent à des conditions locales (l'extension de continuité à un sous-ensemble du domaine est donnée continuité à chaque point du sous-ensemble) tandis que [CTV], prise d'un texte de topologie, se réfère à des conditions globales. Le concept de continuité de manière globale est repris en [N] où on l'oppose pas tellement à celui de discontinuité mais à celui de discret. [N], en ce sens se réfère clairement au concept de continuité qui caractérise les nombres réels et qui se retrouve ensuite dans les différents domaines qui utilisent un tel ensemble numérique comme modèle[5].

Dans la didactique italienne surtout au niveau du collège, la condition de continuité est donnée au niveau local, et comporte non peu de problèmes de signification. Il n'y a pas de doute en effet que de cette manière on tend à perdre non seulement le concept global de continuité, mais aussi, avec celui-ci, le sens intuitif de continuité. Il n'y pas de doute également que de cette manière on donne un instrument opératif maniable pour traiter le concept de continuité et ceci constitue une bonne motivation de caractère didactique.

L'analyse de la définition de continuité que l'on trouve sur la plus grande partie des textes de lycée a montrée qu'il en fait déductible de la forme équivalente c2 à celle proposée par [AB] (c'est-à-dire l'égalité entre la limite et la valeur de la fonction calculée dans le point x*). C'est ici cependant que l'analyse faite par les étudiants en spécialisation a mis en évidence les toutes les différences qui portent ensuite au concept de discontinuité.

Les conditions explicitées par c2 sont trois:

a) que la fonction soit définie en x_0
b) que x_0 soit un point d'accumulation
c) que $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

En indiquant avec
C: la fonction f est continue en x_0
D: $x_0 \in D_f$
A: $x_0 \in D(D_f)$
L: $\lim_{x \to x_*} f(x) = f(x_*)$
la définition de continuité formalisé par les étudiants en formation peut être exprimée par les différentes propositions[6]

(1) $C \leftrightarrow (D \wedge A \wedge L)$ (vois [BM], [CGV], [CM], [DBM], [PMA], [VB], [ZS])

Ou bien

(2) $C \leftrightarrow (D \wedge A \rightarrow L)$ (vois [AMP], [B], [C], [CBM], [OCT])

En [B] la définition est donnée par la forme (3) $D \wedge A \rightarrow (C \leftrightarrow L)$; dans ce cas le fait que la condition de continuité dépende seulement de la limite pour les valeurs du domaine même s'elles sont d'accumulation pour le domaine même semble explicite. Cela vaut la peine d'observer que, si on suppose C vrai, la (2) et la (3) sont équivalentes.

---

[5] Le problème de l'usage de "continu" quand on parle de 'foctions' et quand on parle de 'nombres réels' est traité en [L]

[6] Quelques-unes de cettes propositions sont étées déduites des manuels da la conditions de discontinuité (negation de la continuité).

Les structures logiques précédentes méritent quelques observations, surtout par rapport à (2).
L'implication qui y apparaît est à comprendre, dans le sens logique, de manière classique. S'il du reste il en était ainsi, une fonction résulterait continue même en des points isolés (et ceci n'est pas perçu comme problème), mais aussi en des points qui n'appartiennent pas au domaine: ce dernier, par contre est un problème!
Les antécédents de l'implication semblent donc être plus des prémisses (hypothèses) que des antécédents au sens strict. Ce que cependant les étudiants en formation ont mis immédiatement en relief est que les conditions (1) et (2) ne sont pas équivalentes, chose encore plus évidente si on passe aux propositions (équivalents respectivement à (1) et (2) dans la logique classique, mais aussi des formules qui peuvent mieux faire comprendre le rôle des antécédents dans la (2))

(1') $\neg C \leftrightarrow (\neg D \vee \neg A \vee \neg L)$

ou bien

(2') $\neg C \leftrightarrow (D \wedge A \wedge \neg L)$

Dans la (1) et (1')en particulier les trois conditions qui caractérisent la continuité sont mises sur le même plan (ceci étant mis en relief par la conjonction); il est suffisant donc que une des trois ne soit pas vérifiée pour parler de fonction non continue en un point.
L'analyse des définitions sous cette forme a permis de faire émerger avec les étudiants une série de questions qui ont été à la base du travail successif: fonction non continue équivaut à discontinue (évidemment toujours de manière ponctuelle)? Par rapport à la condition (1') pas de manière 'classique': pour une fonction de domaine]-5;0[$\cup$]0;5[, qui s'inquiéterait par exemple d'établir la discontinuité en 10? Selon la classification de la didactique usuelle (I, II III espece) dans quelle catégorie il rentrerait? Pas seulement; en un point isolé, selon cette définition, une fonction ne serait pas continue.
Par contre la (2')demande qu'on puisse parler de fonction non continue seulement en des points du domaine et d'accumulation pour celui-ci même[7].

Comment procéder donc? Et surtout quel 'poids' donner aux conditions qui définissent la continuité?
Comme première chose, on a demandé aux étudiants combien demanderaient, pour parler de discontinuité, que le numéro appartienne au domaine de la fonction et combien par contre en parleraient pour des nombres n'appartenant pas au domaine. Sur 15 présents, 4 limitent le concept de discontinuité pour des nombres du domaine, 11 pour des nombres non appartenant au domaine.
Tout cela toujours dans l'optique que le concept de discontinuité coïncide avec la négation de la continuité.
A partir de ces considérations, le problème qu'on s'est posé est pourquoi il peut être important (si ça l'est) d'établir 'quelque chose' de relatif aux points qui n'appartiennent pas au domaine d'une fonction. Il est clair que ce 'quelque chose' (appelons-le de manière générique information) peut être établi par points d'accumulation; c'est-à-dire l'information est locale.
Comme évoqué, dans la didactique usuelle, généralement on part du concept de limite (dont l'introduction intuitive utilise les continuités des fonctions) pour arriver à la continuité (dans des termes formels, mais après!). Un parcours inverse probablement serait intuitif (il est clair que quand on parle de continuité intuitive on l'entend dans un sens global) pour arriver ensuite à justifier la limite comme 'rétablissement' des continuités (quand c'est possible par exemple pour le troisième espece) ou pour la classification des points dans lesquels une telle continuité n'est pas à rétablir; nous parlerons dans ce cas de discontinuité (I et II espece)[8]: Ce type de parcours a amené à critiquer

---

[7] [CBM] à la page 64 parle de la discontinuitè et il mit en evidence en note comment ne soit pas possible parler de discontinuité (vue comme negation de la continuité) quand le numéro n'appartienne pas au domaine de la fonction. Selons les autours le chiox fait *est suite pour une bonne part des manuels d'Analyse les plus modernes.*
[8] La classifications des discontinuités n'est pas estimée significative par tous les manuels. Ceci est un exemple de confusion entre **les objectives** et **les opportunitées**. Un obiectif significatif est celui de **redéfinir** d'une façon continue

les formultions canoniques de la discontinuité: dans la (1') les trois conditions n'ont pas le même poids: en particulier on ne contemple pas le cas que x_0 doivent être un point d'accumulation; dans la (2') on parlerait seulement de discontinuité par point de domaine. Cette dernière, évidemment, pourrait être un choix (voir par exemple les réponses des quatre en formation), mais si le problème est 'rétablir' (où c'est possible) la continuité, comment faire pour savoir, à priori, en quels points? Comment interpréter un résultat qui n'amène pas au but?

4. Une définition de discontinuité

La conclusion à laquelle on est arrivé est que la discontinuité est, en un certain sens 'autre chose' par rapport à la continuité. Elle a été vue comme une continuité qui 'parfois' se traduit en acte et en ce sens peut servir à comprendre mieux la continuité (ponctuelle).
Une fois niée l'opportunité de la considérer une négation de la continuité, on s'est occupé de lui donner une définition propre.
Il a donc été demandé aux étudiants de proposer une définition de discontinuité d'une fonction en une valeur x_0.
L'aspect intéressant de cette phase a été justement l'idée qu'on décide, dans ce contexte, une définition autonome d'un concept mathématique.
Les résultats obtenus peuvent être résumés comme suit (on parle toujours de 15 personnes en formation):
14 ont demandé comme prémisse que x_0 soit en accumulation pour le domaine de la fonction.
Pour les conditions successives de discontinuité:
9 (par rapport aux 11 qui se sont 'déclarés') ont mis parmi les conditions que x_0 n'appartienne pas au domaine;
tous ont posé comme condition que les limites droite et gauche ne coïncident pas ou bien qu'il n'existe pas la limite
12 qu'au moins un des deux limites soient infinies
8 que, dans le cas où la fonction est définie en x_0, que la valeur de la limite soit finie mais diverse de $f(x_0)$. A ce propos un étudiant a introduit la définition de «fonction alternée»en x_0:
vue une fonction y= f(x) de A en R nous dirons qu'elle est alternée en $x_0 \in D(D_f) \cap D_f$ si et seulement si $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$, $l \in R$.
Selon cette définition, si la fonction est continue en x_0 alors elle est aussi alternée, tandis que le contraire n'est pas valable. Cette implication justifie , selon l'étudiant ,le nom donné, tiré du concept courant: un courant continu peut être vu comme un courant alterné de fréquence nulle, tandis qu'un courant alterné n'est en général pas continu.
Il vaut la peine de reprendre le concept de fonction.
Enfin on observe comme certains ont donné la définition par rapport à la classification classique des discontinuités , en confondant l'exigence de la définition avec le problème (successif) de la classification.
Dans la discussion successive on a mis en évidence comme certaines de ces conditions étaient à déduire d'autres ce qui a justifié l'omission de conditions de la part de quelque étudiant.
En particulier on a observé que la condition que la limite soit infinie rentre ou dans celle que la valeur n'appartienne pas au domaine ou que la limite soit différente de $f(x_0)$ comme la conditione que la limite n'existe pas et englobe aussi celle de la non coïncidence des limites droite et gauche.
Une fois fixé que x_0 comme condition dont il faut tenir compte que soit un point d'accumulation pour le domaine de la fonction, on a discuté si une telle condition, dans un sens logique, était à donner comme antécédent d'une implication ou avec une conjonction. Pour éviter l'ambiguïté logique (dans une optique classique) de l'implication on a opté pour la conjonction.
On est donc arrivé à la suivante

---

une fonction en un point. Si cet objectif ne se réalise pas, **une opportunité** est celle de classifier les résultats obtenus, en les appellant d'une façon ou d'une autre.

Définition. Vu la fonction y= f(x) et étant donné $x_0 \in D(D_f) \cap \Re$ nous dirons que la fonction est discontinue en x_0 si

1) il n'existe pas $\lim_{x \to x_0} f(x)$ ou bien
2) $x_0 \notin D_f$ ou bien
3) $x_0 \in D_f$ et $\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$

En symboles indiqués avec
Dis: fonction discontinue en x0
D: $x_0 \in D_f$
A: $x_0 \in D(D_f)$
L: la limite existe
L_f: la limite L_f existe finie
la définition précédente deviendrait
$Dis \leftrightarrow (A \wedge (\neg D \vee (\neg L) \vee (D \wedge L_f \neq f(x_0))))$

C'est le moment de rappeler que si on substitue la première conjonction avec une implication, on ne doit l'entendre selon la logique classique mais comme prémisse qui doit être vérifiée pour pouvoir parler de discontinuité.
Evidemment la condition posée est peu opérative; sa finalité formelle est liée au fait de l'opposer aux formalisations précédentes pour en mettre en évidence les différences substantielles.
En outre il faut souligner que dans les conditions posées les classifications des discontinuités sont récupérables comme d'habitude elles sont présentées dans la pratique didactique.
On peut enfin présenter quelques exemples de fonctions discontinue selon la définition proposée :

a) la fonction de R_0 à R y=1/x est discontinue en x_0=0 pour la 2)
b) la fonction de R en R $y = \begin{cases} x+1 & x \geq 2 \\ 2x-3 & x < 2 \end{cases}$….est discontinue en 2 pour la 1)
c) la fonction de R en R $y = \begin{cases} \frac{senx}{x} & x \neq 0 \\ 2 & x = 0 \end{cases}$ est discontinue en 0 pour la 3)

Comme quelque étudiant l'a fait remarquer, détacher la définition de discontinuité de celle de continuité pouvait créer quelque problème au point de vue intuitif; pour cela on a pensé que cette activité devait être accompagnée sur le plan intuitif; c'est pour cela qu'on a pensé que cette activité devait être accompagnée sur le plan didactique par de nombreux exemples surtout graphiques.
Il faut enfin souligner le scepticisme d'une étudiante sur tout le parcours, car selon elle, on avait mis en évidence seulement une condition, en la privilégiant par rapport à d'autres. A ce sujet on lui a fait observer que ceci est évident dans la pratique normale, mais aussi comment avaient été fait certains choix (comme parler de discontinuité en valeurs qui n'appartiennent pas au domaine) non partagées de manière univoque.

5. Conclusion
Les conclusions sur ce travail peuvent être sur deux fronts: le problème (didactique) du rapport continuité-discontinuité et comment la question a été affrontée dans le laboratoire.
Partons de la première. S'il est vrai que la condition de continuité est 'culturellement intuitive', ceci justifie la difficulté dans l'introduction des discontinuités, vues justement comme 'accidents'. La même expression de 'fonction à traits' fait que la possibilité non immédiate de 'souder' les pièces d'une fonction lui donne un permis d'anomalie. Si c'est ainsi, il devient compréhensible, dans la didactique, la 'préoccupation' pour les discontinuités de troisième type; beaucoup moins pour les autres, si ce n'est dans l'optique de donner un nom aux cas, si nous pouvons dire, irrécupérables. En

effet si ce n'était pas pour cette exigence, cela pourrait résulter peu significatif de se préoccuper de discontinuité en valeurs non appartenant au domaine; tout ceci évidemment dans l'optique que la discontinuité soit une négation de la continuité pas 'autre chose'. Souligner cet aspect de la didactique n'est pas opportun pour éviter des ambiguités dangereuses.
Pour ce qui concerne l'activité de laboratoire, comme on l'a dit, celle-ci s'insérait dans un parcours général dans lequel on tendait à montrer la signification à donner une définition et comment les choix(mathématiques) dans ce sens conditionnent les propriétés de l'entité définie. Le parcours qui partant de la discussion de données canoniques, nous a amené à 'notre'définition et a servi à illustrer comme d'un côté la présentation des concepts sur les livres soit vue de manière critique et d'un autre côté on peut 'oser'le parcours de routes alternatives qui ont des objectifs didactiques précis.

BIBLIOGRAPHIE

[A] Groupe aha – Vers l'infini pas à pas, approche heuristique de l'analyse, De Boeck-Wesmael, Bruxelles 1999
[AB] Acerbi, Buttazzo –Primo corso di Analisi matematica, Pitagora 1997
[CTV] Checcucci, Tognoli, Vesentini - Lezioni di topologia generale, Feltrinelli 1972.
[L] A. Leonelli – Continuità e connessione, Archimede, Novembre 1990
[LAC&A] Leozun, Amit, Ceaushu, ecc. – Paratique en classe ou formation intellectuelle. Appréhension différentes entre enseignants et enseignés dans la formation permanente, in Cultural diversity in mathematics (education): CIAEM 51, Horwood Publishing 2000
[N] Nordon – Le continu quand il n'etait qu'attribut, Contribution à une aproche historique de l'enseignement des mathématiques – Besancon 8-13 Juillet 1995
[P] Prodi – Analisi matematica, Boringhieri 1970

Textes de lycées scientifiques

[AMP] Andreini, Manara, Prestipino – Matematica controluce per i programmi sperimentali, McGraw Hill 1999 [pag. 158]
[B] Bagni – Corso di Matematica 3, Zanichelli 1996 [pag. 1371]
[BM] Battelli, Moretti – Corso di matematica sperimentale e laboratorio, Le Monnier 1992 [pag. 184]
[C] Cedrazzi – Analisi Matematica, Zanichelli, 1985 [pag. 79]
[CBM] Cateni, Bernardi, Maracchia – Analisi matematica, Le Monnier 1987 [pag. 63]
[CGV] Castelnuovo, Gori Giorni, Valenti – Elementi di analisi matematica, La Nuova Italia 1988 [pag. 85]
[CM] Ciolli, Michelassi – Corso di matematica 3, Principato 2000 [pag. 44]
[DBM] Dodero, Barboncini, Manfredi – Elementi di Matematica 5, Ghisetti e Corvi 1991 [pag. 101 e 115]
[OCT] Oriolo, Coda, Testa – Matematica, Bruno Mondatori, 1996 [pag. 144]
[PMA] Progetto Matematica Archimede – I matemoduli F, Archimede edizioni 1999 [pag. 52]
[VB] Venè M., Betti F. (a cura di) – Matematica, Sansoni, 1998 [pag. 30]
[ZS] Zwirner, Scaglianti – Analisi Infinitesimale, CEDAM 1998 [pag. 94]