CONTINUITA' E DISCONTINUITA'
Un'attività con insegnanti in formazione[1]

Achille Maffini[2]

Premessa

Il problema della continuità di una funzione viene affrontato, nella prassi didattica italiana, durante il corso di analisi (che solitamente, nella scuola media superiore, viene proposto al quinto e ultimo anno) e, in generale, dopo aver introdotto il concetto di limite.
Di fatto, come del resto è noto, l'introduzione dei numeri reali e soprattutto il piano cartesiano utilizzano pesantemente il concetto di continuità per la rappresentazione delle curve, tanto è vero che nella introduzione intuitiva del concetto di limite molti libri di testo utilizzano implicitamente proprio la continuità per "giustificare" la definizione di limite.
Il problema, a mio avviso, risiede in una non sempre ben evidenziata relazione-separazione tra il concetto di continuità in senso globale e il concetto in senso locale.
Il lavoro proposto è frutto di un'attività, impostata sotto forma di riflessione, in un laboratorio didattico[3] di Matematica presso la Scuola di Specializzazione per l'Insegnamento Secondario dell'Università di Parma. L'obiettivo principale in tal senso, al di là del contenuto specifico, era quello di indurre "un atteggiamento" verso i possibili approcci nei confronti di un argomento[4] e tale obiettivo costituiva di fatto l'ossatura di tutto il laboratorio.
Il gruppo con cui si è lavorato è costituito da 17 specializzandi (15 presenti) con lauree in matematica, fisica, ingegneria, tutti con esperienze (più o meno significative) di insegnamento.

Impostazione dell'attività.

Come attività propedeutica a questa, si era proposta in precedenza un'attività sul concetto e sul senso di una definizione matematica in cui si sono fatte alcune precisazioni sulla sua struttura. In generale una definizione si presenta come implicazione, in cui l'antecedente è formato dalle proprietà che indicano l'ente da definire (posto come conseguente). Di fatto si tratta di un se e solo se, dove l'altra implicazione è implicita sul piano sintattico, mentre sul piano semantico è esplicitata dalla caratterizzazione dell'ente definito attraverso le condizioni poste. Questa precisazione può essere "letta" anche in altri termini: se con A indichiamo il concetto da definire e con B le proprietà che lo definiscono, la struttura delle definizioni è del tipo $B \rightarrow A$; ma risulta anche opportuno, nella prassi didattica, evidenziare come gli enti che non verificano le proprietà B non sono del tipo A, cioè che $\neg B \rightarrow \neg A$; in una logica classica la congiunzione delle due proposizioni porta appunto alla doppia implicazione nella definizione.
Ad esempio se definisco un parallelogramma come un quadrilatero con i lati opposti paralleli, sto dicendo che

se un quadrilatero ha i lati opposti paralleli **allora** è un parallelogramma.

---

[1] Una versione del seguente lavoro uscirà negli atti del convegno "Regards et perspectives sur l'enseignement de L'Analyse au lycée et dans la formation universitarie de base " tenuto presso L'Université de l'Haute Alsace di Moulhouse (Francia) l'8-9 marzo 2002.

[2] Liceo Scientifico G. Falcone – Asola (MN) e Unità Locale di ricerca in Didattica della Matematica dell'Università di Parma. E-mail: a.maffini@libero.it

[3] All'interno della SSIS lo scopo del laboratorio (Area 3) è quello di favorire la progettazione e realizzazione di attività didattiche spendibili nel tirocinio o, più in generale, a livello metodologico, nella futura carriera di insegnanti.

[4] Nel decreto (istitutore delle SSIS) MURST 26/5/98 si chiarisce come sia importante nella formazione iniziale del docente l'atteggiamento del ricercatore: "*…possedere adeguate conoscenze nell'ambito dei settori disciplinari di propria competenza, anche con riferimento agli aspetti storici ed epistemologici; […] continuare a sviluppare e approfondire le proprie conoscenze e le proprie competenze professionali, con permanente attenzione alle nuove acquisizioni scientifiche; rendere significative, sistematiche, complesse e motivanti le attività didattiche attraverso una progettazione curricolare flessibile che includa decisioni rispetto a obiettivi, aree di conoscenza, metodi didattici; […]*"

Questo a priori non esclude che possa chiamare parallelogramma anche altri oggetti (ad esempio non esclude che i trapezi siano parallelogrammi, in quanto l'antecedente della proposizione sarebbe falso, rendendo vera la proposizione stessa e non escludendo, trattandosi di una definizione, che il conseguente sia vero)[5]. Didatticamente si disegna, in questi casi, un trapezio per dire che quello non è un parallelogramma, cioè

se è un quadrilatero **non** ha i lati opposti paralleli **allora non** è un parallelogramma

In sostanza si vuole che i parallelogrammi siano tutti e soli i quadrilateri con i lati opposti paralleli.

Ritornando all'attività sulla continuità, sono stati distribuiti agli specializzandi alcuni libri di testo di licei scientifici e alcuni testi universitari ed è stato chiesto loro di dare una formalizzazione logica schematica delle definizioni così come erano presentate. Con "logica schematica" si intendeva una schematizzazione che tenesse conto della struttura generale della definizione da un punto di vista proposizionale. Gli scopi di questa prima consegna erano essenzialmente due:

1) far notare che le definizioni non sono tutte dello stesso tipo;
2) far ricavare la struttura logica di una definizione.

Se il primo obiettivo è stato facilmente raggiunto, qualcuno ha trovato difficoltà nel secondo caso, a testimoniare una scarsa dimestichezza, anche da parte di laureati di matematica, con gli strumenti della logica.

Le definizioni emerse

Prima di analizzare le definizioni di funzioni continue tratte dai libri di analisi considerati (il riferimento tra parentesi quadre rimanda al testo indicato in bibliografia), riportiamo alcune definizioni tratte da libri universitari.

Innanzi tutto, per parlare di funzioni continue, occorre considerare una funzione definita da un insieme X ad un insieme X' dotati di una struttura topologica. Per i nostri scopi, abbiamo trattato funzioni reali definite in sottoinsiemi di R con all'ordinaria topologia su R.

[CTV] Siano X e X' due spazi topologici e sia $f: X \to X'$ un'applicazione di X in X'. Diremo che f è un'applicazione continua se l'immagine inversa $f^{-1}(A')$ di ogni aperto A' di X' è un aperto di X

[pag. 21]

Più avanti [pag. 22], nello stesso testo, viene proposta una proposizione in cui si dimostra che una funzione tra spazi topologici è continua se e solo se la controimmagine di un chiuso è un chiuso. In questa definizione la "topologia ordinaria", definita ad esempio con gli intervalli, gioca un ruolo decisivo, nel senso della continuità di R.

[P] Siano E, F due spazi topologici e sia $f: E \to F$ un'applicazione. L'applicazione f si dice continua in $x_0 \in E$ se, per ogni intorno V di $y_0=f(x_0)$, esiste un intorno U di x_0 tale che $f(U) \subset V$. Ciò equivale a dire: per ogni intorno V di y_0, $f^{-1}(V)$ è un intorno di x_0. [pag. 113]

[AB] Se $f:A \to R$ (la scrittura sta per "f è una funzione da A ad R"), si dice che f è continua in x_* se[6]

$\forall U \in F_{f(x^*)}\ \exists V \in F_{x^*}\ \forall x \in A \cap V\ f(x) \in U$ [pag. 281]

Più avanti (pag. 282) nello stesso testo si dimostra una proposizione in cui si afferma che la definizione di continuità è equivalente ad altre quattro così sintetizzabili:

a) $\forall U \in F_{f(x^*)}\ \exists V \in F_{x^*}\ f(A \cap V) \subset U$
b) la controimmagine di un intorno di $f(x_*)$ è un intorno di x_*

[5] Per fare un esempio extramatematico: dire che un uccello è un animale che vola non è una buona definizione di uccello. Qui la cosa è semplice perché la nostra definizione si basa su un modello reale di uccello e vogliamo indicare con il termine "uccello" una ben definita (da altre proprietà caratterizzanti!) tipologia di animale.

[6] Con F_x viene indicata la famiglia degli intorni di x.

c) c1) x_* è un punto isolato di A oppure c2) $\lim_{x \to x_*} f(x) = f(x_*)$ [7]

d) la solita definizione ε-δ relativa al concetto di limite

Osservazioni sul concetto di continuità.
Le tre definizioni precedenti non indicano tutte "la stessa cosa". In particolare [P] e [AB], prese da testi di analisi, si rifanno a condizioni locali (l'estensione di continuità ad un sottoinsieme del dominio viene data come continuità in ogni punto del sottoinsieme), mentre [CTV], presa da un testo di topologia, fa riferimento a condizioni globali. Il concetto di continuità in senso globale viene ripreso in [N] in cui lo si contrappone non tanto a quello di discontinuità, quanto a quello di discreto[8]. [N], in questo senso, fa chiaramente riferimento al concetto di continuità che caratterizza i numeri reali e che si ritrova poi nei vari ambiti che utilizzano tale insieme numerico come modello[9]. Nella prassi didattica italiana, soprattutto a livello di scuola media superiore, la condizione di continuità viene data a livello locale, comportando non pochi problemi di significatività. E' indubbio infatti che in questo modo si tende a perdere non solo il concetto globale di continuità, ma anche, con esso, il senso intuitivo di continuità. E' anche indubbio però che in questo modo viene dato un maneggevole strumento operativo per trattare il concetto di continuità e questo costituisce una buona motivazione di carattere didattico.
L'analisi della definizione di continuità riportata sulla maggior parte dei libri di testo liceali ha mostrato che è di fatto deducibile dalla forma equivalente c2 a quella proposta da [AB] (cioè l'uguaglianza tra il limite e il valore della funzione calcolata nel punto x_*). E' qui però che l'analisi fatta dagli specializzandi ha evidenziato le varie differenze che portano poi al concetto di discontinuità.
Le condizioni che vengono esplicitate da c2 sono tre:

a) che la funzione sia definita in x_0
b) che x_0 sia un punto di accumulazione
c) che $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Indicando con
C: la funzione f è continua in x_0
D: $x_0 \in D_f$
A: $x_0 \in D(D_f)$
L: $\lim_{x \to x_*} f(x) = f(x_*)$
la definizione di continuità formalizzata dagli specializzandi può essere espressa dalle seguenti proposizioni[10]
(1) $C \leftrightarrow (D \wedge A \wedge L)$ (vedi [BM], [CGV], [CM], [DBM], [PMA], [VB], [ZS])
oppure
(2) $C \leftrightarrow (D \wedge A \rightarrow L)$ (vedi [AMP] [11], [B], [C], [CBM], [OCT])
In [B] la definizione è data nella forma (3) $D \wedge A \rightarrow (C \leftrightarrow L)$; in questo caso sembra esplicitato il fatto che la condizione di continuità dipenda solo dal limite per valori del dominio che siano anche di accumulazione per il dominio stesso. E' il caso di osservare che, supposto C vero, la (2) e la (3) sono equivalenti.
Le strutture logiche precedenti meritano qualche osservazione, soprattutto in riferimento a (2). L'implicazione che vi compare è da intendere, in senso logico, in modo classico. Se del resto così

---

[7] E' opportuno sottolineare che con in questo contesto con "oppure" si intende, in termini logici, l'aut.
[8] Questo tipo di questione esula comunque dagli scopi del presente lavoro.
[9] Il problema dell'uso dell'aggettivo "continuo" in contesto 'funzioni' ed in contesto 'numeri reali' viene trattato in [L].
[10] Alcune di queste proposizioni sono state dedotte implicitamente dai libri di testo dalle condizioni di discontinuità, vista quest'ultima come negazione della continuità.
[11] La condizione è esplicitata nelle discontinuità in cui però mantiene la classificazione classica (I, II e III specie) e solo nella discontinuità di III specie suppone che il punto possa non appartenere al dominio della funzione.

fosse, una funzione risulterebbe continua anche in punti isolati (e questo non è visto come problema), ma anche in punti non appartenenti al dominio: quest'ultimo, invece, è un problema!
Gli antecedenti dell'implicazione sembrano quindi essere più premesse (ipotesi) che antecedenti in senso stretto. Ciò che comunque gli specializzandi hanno immediatamente evidenziato è che le condizioni (1) e (2) non sono equivalenti, cosa ancor più evidente se si passa alle proposizioni (equivalenti rispettivamente a (1) e (2) nella logica classica, ma anche formulazioni che meglio possono far comprendere il ruolo degli antecedenti nella (2))

(1') $\neg C \leftrightarrow (\neg D \vee \neg A \vee \neg L)$

oppure

(2') $\neg C \leftrightarrow (D \wedge A \wedge \neg L)$

Nella (1) e (1') in particolare le tre condizioni che caratterizzano la continuità sono poste sullo stesso piano (evidenziato questo dalla congiunzione); è sufficiente quindi che una delle tre non venga verificata per parlare di funzione non continua in un punto.
L'analisi delle definizioni in questa forma ha permesso di far emergere con gli specializzandi una serie di questioni che sono state alla base del successivo lavoro: funzione non continua equivale a discontinua (ovviamente sempre in senso puntuale)?[12] Rispetto alla condizione (1') non nel modo "classico": per una funzione di dominio $]-5;0[\cup]0;5[$, chi si preoccuperebbe di stabilire la discontinuità in 10, ad esempio? Secondo la classificazione della didattica usuale (I, II, III specie) in quale categoria rientrerebbe? Non solo; in un punto isolato, secondo questa definizione, una funzione non sarebbe continua.
Per contro la (2') richiede che si possa parlare di funzione non continua solo in punti del dominio e di accumulazione per lo stesso[13].

Come procedere, quindi? E soprattutto, che "peso" dare alle condizioni che definiscono la continuità?
Come prima cosa è stato chiesto agli specializzandi quanti richiederebbero, per parlare di discontinuità, che il numero appartenga al dominio della funzione e quanti invece ne parlerebbero anche per numeri non appartenenti al dominio. Su 15 presenti, 4 limitano il concetto di discontinuità per numeri del dominio, 11 anche per numeri non del dominio.
Tutto questo sempre nell'ottica che il concetto di discontinuità coincida con la negazione della continuità.
Da queste considerazioni il problema che ci si è posti è perché può essere importante (se lo è) stabilire "qualcosa" relativamente a punti non appartenenti al dominio di una funzione. E' chiaro che questo "qualcosa" (chiamiamolo genericamente informazione) può essere stabilito per punti di accumulazione; cioè l'informazione è locale[14].
Come detto, nella prassi didattica usuale, generalmente si parte dal concetto di limite (la cui introduzione intuitiva utilizza le continuità delle funzioni) per arrivare alla continuità (in termini formali, ma dopo!). Un percorso inverso probabilmente sarebbe più intuitivo (è chiaro che quando

---

[12] Nella lingua italiana il prefisso dis esprime qualcosa di negativo; si tratterebbe di vedere, dal punto di vista linguistico, la connessione tra negativo e negazione. Ad esempio, in "disequazione" il prefisso dis viene utilizzato con la stessa valenza con cui compare in "discontinuità" (vedi Dizionario Devoto-Oli) pur non indicato, nel caso specifico, la negazione del termine "equazione".
[13] In [CBM], parlando della discontinuità (pag. 64), si mette in evidenza in nota come non abbia senso parlare di discontinuità (intesa come negazione della continuità) in valori non appartenenti al dominio, per la definizione data dagli autori; la scelta fatta, viene detto, *è seguita dalla maggior parte dei testi di Analisi ad indirizzo più moderno*.
[14] Se la condizione che il numero sia un punto di accumulazione è prioritaria rispetto alle altre (come del resto viene ampiamente confermato dalla usuale prassi didattica), anche la definizione (2) presenta anomalie rispetto alla logica classica. Infatti la proposizioni $D \wedge A \rightarrow L$ è equivalente a $A \rightarrow (D \rightarrow L)$ ma anche a $D \rightarrow (A \rightarrow L)$. Mentre la prima esprime una condizione legittima anche sul piano premesse-ipotesi ("mi preoccupo che x_o sia di accumulazione, poi del resto…"), non così si può dire della seconda, in cui il fatto che $x_0 \in D$ nulla dice sulla possibilità di calcolare il limite. In sostanza la prima mette meglio in evidenza la priorità dell'essere valore di accumulazione per il dominio della funzione.

si parla di continuità intuitiva la si intende in senso globale) per arrivare poi a giustificare il limite come "ripristino" delle continuità[15] (quando è possibile, ad esempio per la terza specie) o per la classificazione dei punti in cui tale continuità non è ripristinabile; parleremo in questo caso di discontinuità (I e II specie)[16]. Questo tipo di percorso ha portato a criticare entrambe le formulazioni canoniche della discontinuità: nella (1') le tre condizioni non hanno lo stesso peso: in particolare non si contempla il caso che x_0 debba essere un punto di accumulazione; nella (2') si parlerebbe solo di discontinuità per punti del dominio. Quest'ultima, ovviamente, potrebbe essere una scelta (si veda ad esempio il punto di vista dei quattro specializzandi), ma se il problema è "ripristinare" (dove è possibile) la continuità, come fare a sapere, a priori, in quali punti? Come interpretare un risultato che non porti allo scopo?

Una definizione di discontinuità

La conclusione a cui si è arrivati è che la discontinuità sia, in un certo senso, "altra cosa" rispetto alla continuità[17]. E' stata vista come una continuità potenziale che "a volte" si traduce in atto ed in questo senso può servire per comprendere meglio la continuità (puntuale) stessa.

Una volta negata l'opportunità di considerarla una negazione della continuità, ci si è preoccupati di darle una definizione propria.

E' stato quindi chiesto agli specializzandi di proporre una definizione di discontinuità di una funzione in un valore x_o.

L'aspetto interessante di questa fase è stata proprio l'idea che si decidesse, in quel contesto, per una definizione autonoma di un concetto matematico.

I risultati ottenuti possono essere sintetizzati come segue (si parla sempre di 15 specializzandi):

14 hanno richiesto come premessa che x_o fosse di accumulazione per il dominio della funzione;

Per le successive condizioni di discontinuità:

9 (rispetto agli undici che si sono "dichiarati") hanno messo tra le condizioni che x_o non appartenga al dominio;

tutti hanno posto come condizione che i limiti destro e sinistro non coincidano oppure che non esista il limite

12 che almeno uno dei due limiti sia infinito

8 che, nel caso in cui la funzione sia definita in x_o, che il valore del limite sia finito ma diverso da $f(x_o)$. A questo proposito uno specializzando ha introdotto la definizione di "funzione alternata" in x_o: data una funzione $y=f(x)$ di dominio A e codominio R diremo che è alternata in $x_o \in D(D_f)\cap D_f$ se e solo se $\lim_{x\to x_0} f(x)=l$, $l\in R$.

Secondo questa definizione, se la funzione è continua in x_o allora è anche alternata, mentre il viceversa non vale. Questa implicazione giustifica, secondo lo specializzando, il nome dato, tratto dal concetto di corrente: una corrente continua può essere vista come corrente alternata di frequenza nulla, mentre una corrente alternata non è in generale continua.

---

[15] "Il ripristino della continuità" passa in genere attraverso l'individuazione di un valore "candidato" a diventare l'immagine di un valore in cui la funzione non è definita; l'operazione in sé non è difficile, ma il problema è che sia significativa, dove questa significatività passa attraverso la definizione (o ridefinizione) in modo che risulti continua.
In incontri precedenti con gli specializzandi è stato chiesto di preparare un percorso didattico su limiti e continuità, lavorando, per gruppi, su due percorsi alternativi. Un gruppo ha così lavorato seguendo il percorso continuità-limiti con le giustificazioni sopra esposte.

[16] La classificazione delle discontinuità non è ritenuta da tutti i libri di testo significativa. In questo caso (come del resto in altri casi della prassi didattica) si confondono a volte gli obiettivi con le opportunità. Un obiettivo significativo è quello di ridefinire una funzione in un punto con continuità. Nel caso in cui questo obiettivo non venga raggiunto, può essere opportuno classificare i risultati ottenuti, chiamandoli in un qualche modo.

[17] E' in un certo senso quanto viene fatto in [B] in cui la definizione è data in questi termini:
" Sia f una funzione definita e continua in un intorno di x=c, ad eccezione eventualmente, di x=c stesso; se la funzione f non è definita per x=c o se essa, pur essendo definita per x=c, non è continua in x=c, allora il punto x=c si *dice punto di discontinuità* per la funzione f."
E' solo il caso di osservare che questa definizione è a sua volta "altra cosa" rispetto alla negazione della (3).

Il concetto di funzione alternata varrebbe la pena fosse ripreso.
Infine va osservato come qualcuno abbia dato la definizione in relazione alla classificazione classica delle discontinuità, confondendo l'esigenza della definizione con il problema (successivo) della classificazione.
Nella successiva discussione si è evidenziato come alcune di queste condizioni fossero deducibili da altre il che ha giustificato l'omissione di condizioni da parte di qualche specializzando.
In particolare si è osservato che la condizione che il limite sia infinito rientra o in quella che il valore non appartenga al dominio o che il limite sia diverso da $f(x_o)$, così come la condizione che il limite non esista congloba anche quella della non coincidenza dei limiti destro e sinistro.
Fissata quindi come condizione imprescindibile che x_o sia un punto di accumulazione per il dominio della funzione, si è discusso se tale condizione, in senso logico, fosse da porre come antecedente di una implicazione o con una congiunzione. Per evitare l'ambiguità logica (in ottica classica) dell'implicazione si è optato per la congiunzione.
Si è quindi giunti alla seguente

Definizione. Sia $D_f \subseteq R$ e sia f una funzione da D_f ad $\Re$. Dato $x_0 \in D(D_f) \cap \Re$ diremo che la funzione è discontinua in x_0 se
1) non esiste $\lim_{x \to x_0} f(x)$ oppure
2) $x_0 \notin D_f$ oppure
3) $x_0 \in D_f$ e $\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$
In simboli, indicato con
Dis: funzione discontinua in x_0
D: $x_0 \in D_f$
A: $x_0 \in D(D_f)$
L: esiste il limite
L_f: esiste il limite L_f finito
la definizione precedente diventerebbe
$Dis \leftrightarrow (A \wedge (\neg D \vee (\neg L) \vee (D \wedge L_f \neq f(x_0))))$

E' il caso di ribadire che se si sostituisce la prima congiunzione con un'implicazione questa non è da intendersi secondo la logica classica ma come una premessa che deve essere verificata per poter parlare di discontinuità.
Ovviamente la condizione posta è poco operativa; la sua finalità formale è legata al fatto di contrapporla alle formalizzazioni precedenti per metterne in evidenza le sostanziali differenze.
Inoltre è da sottolineare che nelle condizioni poste sono recuperabili le classificazioni delle discontinuità così come solitamente sono presentate nella prassi didattica.
Si possono infine presentare alcuni esempi di funzioni discontinue secondo la definizione proposta:

a) la funzione da R_0 ad R $y=1/x$ è discontinua in $x_o=0$ per la 2)
b) la funzione da R in R $y = \begin{cases} x+1 & x \geq 2 \\ 2x-3 & x < 2 \end{cases}$ è discontinua in 2 per la 1)
c) la funzione da R in R $y = \begin{cases} \dfrac{senx}{x} & x \neq 0 \\ 2 & x = 0 \end{cases}$ è discontinua in 0 per la 3)

Come qualche specializzando ha fatto osservare, sganciare la definizione di discontinuità da quella di continuità poteva creare qualche problema a livello intuitivo; per questo si è ritenuto che questa attività dovesse essere accompagnata a livello didattico da numerosi esempi soprattutto grafici.
Va infine evidenziato come una specializzanda abbia mostrato scetticismo sull'intero percorso in quanto, a suo dire, era stata semplicemente messa in evidenza una condizione, privilegiandola rispetto ad altre. A questo proposito le è stato fatto osservare come non solo questo non fosse

scontato nella prassi normale, ma anche come fossero state fatte alcune scelte (come il parlare di discontinuità in valori non appartenenti al dominio) non univocamente condivise.

Conclusione

Le conclusioni su questo lavoro non possono che essere su due fronti: il problema (didattico) del rapporto continuità-discontinuità e come la questione è stata affrontata nel laboratorio.

Partiamo dalla prima. Se è vero che la condizione di continuità è "culturalmente intuitiva", questo in un certo senso giustifica la difficoltà nell'introduzione delle discontinuità, viste appunto come "accidenti". La stessa dicitura di "funzione a tratti" fa pensare che la non immediata possibilità di "saldare" i pezzi di una funzione le diano una patente di anomalia. Se così è, diventa comprensibile, nella prassi didattica, la "preoccupazione" per le discontinuità di terza specie; molto meno per le altre, se non nell'ottica di dare un nome ai casi, diciamo così, irrecuperabili. In effetti se non fosse per questa esigenza potrebbe risultare poco significativo preoccuparsi di discontinuità in valori non appartenenti al dominio; tutto questo ovviamente nell'ottica che la discontinuità sia una negazione della continuità e non "altra cosa". Sottolineare questo aspetto, nella prassi didattica, credo sia quanto meno opportuno per evitare pericolose ambiguità.

Per quanto riguarda l'attività di laboratorio, come detto, questa si inseriva in un percorso generale in cui si tendeva a mostrare il significato di dare una definizione e come le scelte (matematiche) in tale senso condizionino le proprietà dell'ente definito. Il percorso che, partendo dalla messa in discussione di impostazioni canoniche, ha portato ad una definizione "nostra" è servito per illustrare come da una parte la presentazione dei concetti sui libri di testo vada vista in modo critico e dall'altra si può "osare" la percorrenza di strade alternative avendo presente dei precisi obiettivi didattici.

BIBLIOGRAFIA

[A] Groupe aha.: 1999, *Vers l'infini pas à pas, approche heuristique de l'analyse* de boeck-wesmael, Bruxelles.

[AB] Acerbi E., Buttazzo G.: 1997, Primo corso di Analisi matematica, Pitagora

[CTV] Checcucci V., Tognoli A. , Vesentini E.: 1972, Lezioni di topologia generale, Feltrinelli.

[L] Leonelli A.: Novembre 1990, Continuità e connessione, Archimede.

[LAC&A] Leozun D., Amit M., Ceaushu C., ecc.: 2000, 'Pratique en classe ou formation intellectuelle. Appréhension différentes entre enseignants et enseignés dans la formation permanente', *in Cultural diversity in mathematics (education): CIEAEM 51*, Horwood Publishing.

[N] Nordon N.: 1995, Le continu quand il n'etait qu'attribut, *Actes de l'Universitè d'été: Epistémologie et Histoire des Mathématiques*, Besancon

[P] Prodi, G.: 1970, *Analisi matematica*, Boringhieri.

Testi della Scuola Media Superiore

[AMP] Andreini M., Manara R., Prestipino F.: 1999, Matematica controluce per i programmi sperimentali, McGraw Hill, 158

[B] Bagni G.T.: 1996, Corso di Matematica 3, Zanichelli, 1371

[BM] Battelli M., Moretti U.:1992, Corso di matematica sperimentale e laboratorio, Le Monnier, 184

[C] Cedrazzi F.:1985, Analisi Matematica, Zanichelli, 79

[CBM] Cateni L., Bernardi C., Maracchia S.: 1987, Analisi matematica, Le Monnier, 63

[CGV] Castelnuovo E., Gori Giorni C., Valenti D.: 1988, Elementi di analisi matematica, La Nuova Italia, 85

[CM] Ciolli M., Michelassi L.:2000, Corso di matematica 3, Principato, 44

[DBM] Dodero N., Barboncini P., Manfredi R.: 1991, Elementi di Matematica 5, Ghisetti e Corvi, 101 e 115

[OCT] Oriolo P., Coda A., Tess L.:1996, Matematica, Bruno Mondatori, 144

[PMA] Progetto Matematica Archimede :1999, I matemoduli F, Archimede edizioni, 52
[VB] Venè M., Betti F. (a cura di) :1998, Matematica, Sansoni, 30
[ZS] Zwirner G., Scaglianti L.: 1998, Analisi Infinitesimale, CEDAM, 94