Le origini dell'analisi non-standard:
quattro passi nel mondo degli infiniti e degli infinitesimi in atto[1]

ACHILLE MAFFINI

Agli inizi degli anni sessanta un matematico dell'università di Yale, Abraham Robinson, formulò un nuovo tipo d'analisi, detta non-standard (contrapposta all'usuale analisi "standard") in cui si rendevano "reali" (naturalmente dal punto di vista matematico) alcuni enti che dal seicento se non addirittura dall'antichità avevano abitato il mondo della matematica, anche se, secondo alcuni, in modo improprio. Il presente articolo ha lo scopo non tanto di descrivere l'analisi non-standard (di cui comunque si fornirà un breve cenno alla fine), quanto di vedere come il lavoro di Robinson sia più che una scoperta una riformulazione in una logica coerente di risultati risalenti già agli inizi dell'analisi e che durante i secoli avevano risentito di una graduale accettazione, pur senza una piena giustificazione logica. In questo senso, mi preoccuperò soprattutto del periodo che va dalla disputa tra Leibniz e Newton in poi, dopo aver dato un breve cenno alle questioni precedenti questi due pensatori.

Partiamo con due semplici problemi:
a) Supponiamo che un punto materiale si muova con una legge oraria $s=t^2$, essendo s misurato in metri e t in secondi. Determinare il valore della velocità istantanea per $t=2$.
b) Si consideri la parabola di equazione $y=x^2$. Determinare il coefficiente angolare della tangente alla parabola nel punto di ascissa *2*.

Quali sono le analogie e quali le differenze fra i due tipi di problemi (perché in fondo si tratta di "tipi" di problemi o, meglio, di problemi-tipo)?

Com'è noto a chi si occupa di matematica i quesiti proposti sono presentati durante un normale corso di analisi matematica nel momento in cui si vuole introdurre il concetto e il successivo calcolo delle derivate, quando cioè ci si preoccupa di studiare come varia una grandezza al variare di un'altra quando queste sono legate da una legge. La soluzione ai due problemi è data utilizzando il concetto di limite nella versione formalizzata da Weierstrass nella seconda metà dell'ottocento nel tentativo di risolvere il problema relativo all'uso degli infiniti e degli infinitesimi.

Nel presente lavoro si cercherà di ripercorrere quel cammino, individuando i punti in cui si sono fatte delle scelte che oggi suddivideremmo in "*standard*" e "*non-standard*".

Ci si è chiesto in precedenza le analogie e le differenze fra i due problemi proposti; se le analogie sembrano evidenti, la differenza più immediata, verrebbe da dire, sembra essere legata al fatto che uno è un problema di fisica, l'altro di matematica. Vedremo in seguito quali conseguenze potrebbe avere questa banale osservazione.

La nascita dell'analisi infinitesimale è fatta risalire alla disputa fra Leibniz e Newton sulla paternità del nuovo calcolo, sebbene sia noto come alcuni concetti fossero già conosciuti ed utilizzati anche da fisici e matematici (soprattutto geometri) precedenti (basti ricordare Democrito, Eudosso, Archimede, Galileo, Keplero, Cavalieri, Fermat, Pascal, Torricelli, Barrow, ecc.). Ciò che mancava a questi studiosi era soprattutto un linguaggio comune ed una teoria unitaria in cui inserire i risultati trovati; ma nel momento in cui ci si preoccupa di colmare questa lacuna si incappa inevitabilmente in problemi di carattere logico ed epistemologico.

Consideriamo come esempio un problema noto: la determinazione dell'area di un cerchio di raggio unitario. Un tipico ragionamento che fa uso degli infinitesimi procederebbe così:

La circonferenza può essere pensata come composta di un numero **infinito** di segmenti rettilinei tutti uguali tra loro e **infinitamente** corti. L'area del cerchio è data allora dalla somma delle aree di triangoli **infinitesimi** aventi tutti altezza 1. Poiché l'area del triangolo è data dal semiprodotto della base per l'altezza e poiché la somma delle basi dei triangoli fornisce la circonferenza, l'area del cerchio è data dal semiprodotto del raggio per la circonferenza.

Questo ragionamento proposto da **Nicola Cusano** (1407-1464) nel XV secolo porta ad un risultato corretto, ma con una forma ed una terminologia che sarebbero state respinte da Euclide e da tutta la cultura greca in quanto presupponeva la presenza di infiniti ed infinitesimi in atto[2].

---

[1]Lavoro eseguito nell'ambito del contratto CNR n° CN 95.00705CT01

[2]Il modo di procedere di Cusano è da collegare strettamente al concetto di infinito presente nella sua filosofia. La mente umana (finita) può indagare solo nell'ambito delle cosa finite per le quali le risulta possibile (anche se a volte può risultare difficile) esprimere un giudizio conoscitivo. L'infinito, in quanto tale, non ha "proporzione" rispetto alle cose finite e quindi resta precluso alla nostra capacità di analisi. La consapevolezza di questa distanza tra la mente umana e l'infinito, cui essa tuttavia tende, e la ricerca che si mantiene comunque nell'ambito di questa consapevolezza critica, costituiscono quella che Cusano chiama "la dotta ignoranza". In questo concetto di un infinito a cui l'uomo tende ma che gli risulta insondabile, c'è l'idea dell'esistenza di tale infinito in atto. Dice Cusano ne *"La dotta ignoranza"* (1440): "*L'intelletto finito non può intendere in modo preciso la verità delle cose per via di somiglianza. La verità non è né un più né un meno, consiste in qualcosa di indivisibile e non può con precisione misurarla tutto ciò che esiste diverso dal*

D'altra parte anche senza scomodare Euclide le obiezioni ad un siffatto modo di procedere vengono spontanee: innanzi tutto non è chiaro cosa si intenda con triangolo di base infinitesima: è zero o è diversa da zero? Nel primo caso l'area del triangolo è zero e quindi la somma di termini nulli darebbe sempre zero; nel secondo caso avremmo la somma di infiniti termini non nulli e quindi, per la proprietà archimedea dei numeri reali[3], avremmo una somma infinitamente grande. In sostanza, se esistessero triangoli siffatti, la loro area sarebbe un numero non archimedeo. Il problema che, come vedremo, si trascinerà sino al novecento, è dunque questo: esistono numeri di questo tipo?

Un'altra obiezione che si può fare è di carattere più filosofico: è possibile ricavare le proprietà di una figura nella sua interezza a partire dalle proprietà delle infinite parti che la compongono? E' chiaro come una risposta positiva porterebbe a pericolose conclusioni legate ad una sorta di induzione che dall'infinito (o dall'infinitesimo) porterebbe al finito.

Archimede (287 a.C.-212 a.C.) risolve il problema rimanendo nella tradizione classica usando il metodo di esaustione:

"Supponiamo che l'area del cerchio non sia metà del prodotto del raggio per la sua circonferenza; sia allora *d* la differenza fra la maggiore e la minore delle due quantità. Se circoscriviamo alla circonferenza un poligono di *n* lati, l'area di tale poligono sarà la somma delle aree degli *n* triangoli che lo compongono, tutti di altezza 1, e quindi l'area complessiva sarà *p*, essendo *p* il semiperimetro del poligono. Preso *n* sufficientemente grande, possiamo far sì che l'area del poligono differisca dall'area del cerchio meno della metà di *d*. Poiché il perimetro del poligono differirà dalla circonferenza per meno della metà di *d*, l'area del cerchio e il semiprodotto del raggio per la circonferenza differiranno meno di *d*, contro l'ipotesi di partenza. Quindi *d* deve essere zero".

Come vedremo anche in seguito, questo metodo ricorda molto la nozione di limite proposta da Weierstrass. In questo contesto ci interessa osservare soprattutto due cose:
a) il metodo di esaustione può essere considerato il vero antecedente del calcolo dei limiti. Tale metodo consiste nel rinchiudere la quantità variabile tra altre due tali che la loro differenza diventi sempre più piccola, o **piccola a piacere**[4]. Secondo alcuni commentatori (cfr ad esempio Danzig in "Il numero: linguaggio della scienza") quello che mancò al metodo di esaustione per diventare il calcolo integrale fu un simbolismo appropriato e soprattutto un atteggiamento positivo da parte del mondo greco nei confronti dell'infinito;
b) a parte l'uso "disinvolto" di termini che si riferiscono ora a lunghezze, ora ad aree, un dubbio che potrebbe sorgere, leggendo il testo di Archimede è il seguente: chi garantisce che, fissati due numeri reali positivi a e b con a<b possa sempre trovare un numero naturale n tale che sia a>b/n ? La domanda è legittima e la sua risposta risiede ancora nella proprietà archimedea dei numeri reali. Se si accetta infatti tale proprietà come postulato (come farà ad esempio Hilbert) è immediato costatare come la formulazione

(1) $\forall a,b \in \Re^+ \qquad \exists n \in N \quad (a < b \to na > b)$ sia equivalente alla

(2) $\forall a,b \in \Re^+ \qquad \exists n \in N \quad \left(a < b \to a > \frac{b}{n}\right)$;

la differenza tra il modo di vedere il principio archimedeo nella formulazione (1) oppure (2) è sostanziale: nel primo caso si esprime la possibilità di far diventare un numero reale positivo, moltiplicandolo per un numero naturale, più

---

vero.... L'intelletto, dunque, che non è la verità, non comprende mai la verità in modo così preciso da non poterla comprendere più precisamente ancore all'infinito, perché sta alla verità come il poligono sta al cerchio. Quanti più angoli avrà il poligono inscritto, tanto più sarà simile al cerchio: tuttavia non sarà mai uguale, anche se avremo moltiplicato i suoi angoli all'infinito, a meno che non si risolva nell'identità con il circolo".
La corretta via per la ricerca della verità è quindi legata ad un metodo per **approssimazione**, incentrato sulla concezione secondo la quale nell'infinito avviene una *coincidentia oppositorum*. Per questa via, le cose finite possono apparire non tanto in antitesi con l'infinito, ma piuttosto come aventi una certa relazione simbolica, in qualche modo significativa e allusiva, rispetto all'infinito medesimo. Sempre Cusano afferma che:
"....Più cose non sono, dunque, in una qualsiasi cosa in atto, ma tutte sono senza pluralità questa cosa stessa. L'universo è nelle cose in modo contratto, e ogni cosa che esiste in atto contrae i suoi universi, affinché essi siano in atto ciò che essa è. Tutto ciò che esiste in atto è in Dio, perché Dio è l'atto di tutto. Ma l'atto è la perfezione e il fine della potenza. Ed essendo l'universo contratto in qualsiasi cosa esistente in atto, è chiaro che Dio, che è nell'universo, è in qualsiasi cosa e che qualsiasi cosa che esiste in atto è, come universo, immediatamente in Dio."
Ciò che emerge quindi è che l'uomo pensa all'infinito in termini potenziali, non potendo fare diversamente la finitezza della sua mente, ma ciò non toglie che esista un infinito in atto che Cusano identifica con Dio.

[3]La proprietà archimedea dei numeri reali afferma che comunque si prendano due numeri reali positivi a e b con a minore di b, esiste un numero naturale n tale che il prodotto na sia maggiore di b. In termini formali potremmo esprimere tale proprietà con l'enunciato

$\forall a,b \in \Re^+ \qquad \exists n \in N \quad (a < b \to na > b).$

[4]Col metodo di esaustione e sempre considerando una successione di poligoni regolari inscritti e circoscritti ad una circonferenza, Archimede pensò che il valore di π fosse compreso tra $3+\frac{1}{7} \quad e \quad 3+\frac{10}{71}$.

grande di un qualunque numero reale ; nel secondo caso, viceversa, si esprime la possibilità di far diventare un numero reale positivo, dividendolo per un numero naturale, più piccolo di qualunque numero reale positivo fissato.

La cosa comunque essenziale in questo modo di procedere è che Archimede evita il ricorso agli infinitesimi, utilizzando solo quantità che **possono** essere rese piccole a piacere, argomento che consentirà ai critici del calcolo infinitesimale del '600 e del '700 di chiedersi se fosse lecito o no utilizzare questioni che i greci avevano scrupolosamente evitato. Nelle intenzione degli assertori dell'analisi infinitesimale si sarebbe potuto passare da enti di una dimensione (esempio linee o segmenti) oppure due dimensioni (ad esempio superfici piane) a enti di due dimensioni (superfici) o tre dimensioni (volumi). Questo modo di procedere, tipico per esempio di **Cavalieri** (1598-1647), è criticato da Guldino che dall'analisi che compie di ogni teorema di Cavalieri stesso arriva alla medesima critica: "*Rispondo che il continuo è divisibile all'infinito, ma non consta di infinite parti in atto, bensì soltanto in potenza, le quali [parti] non possono essere mai esaurite*". In fondo Guldino mette in evidenza quello che sarà il reale problema alla base di tutte le successive disquisizioni: l'esistenza (o l'accettazione) dell'infinito e dell'infinitesimo in atto.

Rimaneva però un dubbio: come mai i ragionamenti con gli infinitesimi e gli infiniti (alla "Cusano", per intenderci) sembra funzionino? E se funzionano per risolvere taluni problemi non è possibile trascurarne l'aspetto prettamente epistemologico? A prescindere dal fatto che difficilmente un matematico accetta di buon partito una teoria od un metodo semplicemente perché "funziona", i problemi sono anche altri, riguardanti, ad esempio, una visione teologica del mondo. Ma procediamo per gradi.

Come spesso succede nel campo della matematica e della scienza in genere, è lo scontro fra due grosse personalità che mette in evidenza l'importanza di nuove scoperte o teorie; nel nostro caso, **Leibniz** (1647-1716) e **Newton** (1642-1727).

In precedenza si è osservato come alcuni strumenti dell'analisi fossero già noti ed utilizzati, anche se in maniera empirica, prima di Newton e Leibniz, pur mancando un linguaggio comune che li formalizzasse.

I due pensatori arrivarono al calcolo differenziale in modo diverso e separatamente: per Newton era uno strumento necessario per risolvere alcune questioni di cinematica e di dinamica, mentre per Leibniz tali studi si inserirono nel contesto generale della sua filosofia.

Esaminiamo come Newton e Leibniz avrebbero risolto ad esempio il problema a) posto all'inizio di questo scritto[5].

Leibniz si sarebbe mosso in questo modo: preso l'istante $t=2$ [6], si consideri la quantità "infinitesima" che indicheremo con Δt [7] e si valuti la posizione del punto materiale all'istante $t1=2+\Delta t$ data da $s1=4+4\Delta t+\Delta t^2$ e quindi $\Delta s=4\Delta t+\Delta t^2$, cioè, sempre per usare la terminologia di Leibniz , una quantità infinitesima. Poiché la velocità è data dal rapporto $\Delta s/\Delta t=4+\Delta t$, Leibniz ragiona come se 4 e $4+\Delta t$ fossero "la stessa cosa", cioè come se Δt fosse una quantità trascurabile rispetto a 4. Ma è possibile trascurare qualcosa in matematica?[8]

Newton cerca, attraverso riferimenti più espliciti alla fisica, di relativizzare il peso degli infinitesimi; così parla di quantità "evanescenti" ed asserisce che "....come ultima ragione di quantità evanescenti si deve intendere il rapporto di quantità né prima che esse scompaiano, né dopo, ma quel rapporto con cui esse scompaiono"[9]. Il tentativo di Newton è ovvio, ma, ricordiamolo, è fatto in ottica fisica. In effetti, ed è questa la differenza sostanziale tra i due problemi posti all'inizio: in fisica il concetto di trascurabile riferito alle grandezze non è strano, poiché è insito nel problema stesso della misura il presupposto dell'errore; d'altra parte in fisica spesso valori diversi vengono "confusi" ritenendo più importante ad esempio l'ordine di grandezza che la presunta correttezza del risultato. In matematica questo non è però possibile: due valori o sono uguali o, se differiscono anche di "poco", sono diversi; in sostanza, se in fisica attraverso il concetto di errore è possibile considerare approssimazioni "controllate", in matematica questa opportunità non è data, se non in certi problemi di analisi numerica. Non è detto che Newton avesse esattamente presenti questi concetti legati più alla fisica moderna, ma le sue parole sono sintomatiche di un "atteggiamento" tipico del fisico che tende a sfrondare un risultato dalle cose non ritenute essenziali.

Ma i motivi che inducono Newton a porsi in quest'ottica sono altri e, dal suo punto di vista, più importanti. Seppure il termine "evanescente" faccia riferimento esplicito al concetto di infinitesimo, il tentativo del fisico inglese era quello di evitare tale nozione per sottrarsi alle critiche che soprattutto il vescovo inglese **George Berkeley** (1685-1753) nella sua opera *L'Analista o discorso indirizzato ad un matematico incredulo* del 1734 aveva lucidamente rivolto alla teoria di Leibniz. Di fatto però considerando Δt come una quantità finita, il rapporto $\Delta s/\Delta t$ diventava $4+\Delta t$ e per eliminare il termine "trascurabile" Δt Newton lo pone uguale a zero. In sostanza Newton afferma che l'errore che si

[5]Nell'ottica della dinamica newtoniana il problema principale era quello di mettere in relazione "fluenti" e "flussioni", cioè posizione istantanea e velocità istantanea di un corpo o, più in generale, funzione e sua derivata prima.

[6]Per comodità ometteremo le unità di misura delle grandezze utilizzate.

[7]Quelle che seguono non sono le notazioni utilizzate da Leibniz e che saranno poste nel presente lavoro più avanti.

[8]"....e non servirà neppure dire che [il termine trascurato] è una quantità estremamente piccola; poiché ci hanno detto che *in rebus mathematicis errores quam minimi non sunt contemnendi*": G.Berkeley-L'Analista....

[9]Come esempio per far comprendere meglio quanto asserito Newton cita la velocità di un oggetto che cade "poco prima" che tocchi il suolo.

commette considerando *4* la velocità al tempo $t=2\ s$ è trascurabile, o meglio può essere reso talmente piccolo (verrebbe da dire "a piacere") da poterlo ritenere nullo.

La critica di Berkeley risulta persino banale nella sua ovvietà: Δt è uguale a zero oppure non lo è. Se è diverso da zero allora Δs è diverso da zero e quindi il rapporto non è *4*; se Δt è zero, anche Δs lo è e quindi il rapporto $\Delta s/\Delta t$ diventa 0/0, cioè privo di significato. In sostanza afferma Berkeley *"...una volta ammesso che gli incrementi scompaiono, cioè che gli incrementi siano nulli o che non vi siano incrementi, cade la precedente ipotesi che gli incrementi fossero qualcosa, o che vi fossero incrementi, mentre viene mantenuta una conseguenza di tale ipotesi, cioè un'espressione ottenuta mediante essa.......Che cosa sono queste flussioni? La velocità di incrementi evanescenti. E che cosa sono questi stessi incrementi evanescenti? Non sono né quantità finite , né quantità infinitamente piccole e neppure nulle*"[10].

Credo che risulti abbastanza ovvio come critiche analoghe si presentino se si vuole risolvere il secondo problema proposto, quello della tangente. Anche in questo caso si procede considerando due punti "infinitamente" vicini e definendo la tangente come la secante passante per questi punti. Analogamente alle obbiezioni di Berkeley potremmo chiederci se tali punti sono distinti o no. Se la risposta è negativa, si ottiene un punto e per un punto passano infinite rette; se la risposta è positiva, la continuità della retta ci assicura l'esistenza di infiniti punti tra i due; il tutto è ovviamente legato al fatto che non si ha una definizione del concetto di "infinitamente vicini".

Per oltre un secolo non si riuscì a dare risposta alle obiezioni di Berkeley, seppure i matematici continuassero ad operare (e con successo) con gli infinitesimi.

Soffermiamoci sulla critica di Berkeley per capire meglio lo spirito dell'atteggiamento di Leibniz e Newton.

La forza di tale critica risiede nel fatto che i ragionamenti degli analisti "funzionerebbero" se gli infinitesimi esistessero; il problema quindi non è solo di carattere logico, ma è anche e soprattutto un problema realista: se gli infinitesimi esistessero, avrebbero un corrispettivo nella realtà. Ma se così fosse esisterebbero degli infiniti e degli infinitesimi in atto[11]. Comunque si guardi la questione, il punto d'arrivo è sempre lo stesso: negare i presupposti su cui si era basata la geometria e la matematica in genere dei greci, matematica ritenuta comunque "della realtà".

Strettamente legato a questo c'è un altro aspetto che emerge dalle critiche di Berkeley e su cui è opportuno porre l'accento: egli rimprovera a Leibniz e Newton di uscire dal contesto dei numeri reali per ragionare in termini di infinitesimi "quando serve" per poi rientrarvi per trarre le conclusioni.

Il primo tentativo di pensare come reali gli enti dell'analisi infinitesimale si ha nel libro di testo scritto nel 1696 dal marchese **De l'Hôpital** (1661-1704), allievo di G. Bernoulli e amico di Leibniz[12].

Leibniz al riguardo aveva una posizione più prudente: non affermava che gli infinitesimi esistevano realmente, ma solo che "***si può ragionare come se esistessero***"; nella sua raffigurazione li aveva pensati come numeri positivi o negativi infinitamente piccoli che ancora godevano delle "stesse proprietà" degli usuali numeri della matematica. Dal punto di vista logico si hanno non poche difficoltà ad accettare un'idea di questo tipo: se godono di tutte le proprietà dei numeri reali, come possono essere positivi e minori di ogni numero reale positivo?

Per capire la posizione di Leibniz rispetto ai contenuti dell'analisi non si può prescindere dalla sua filosofia, il cui punto di partenza risiede nella critica al concetto di verità formulata da Cartesio. Per il filosofo francese, la verità di

---

[10]Nei *Commentari filosofici* Berkeley aveva affermato: "Le flussioni di Newton sono inutili. [....] Non si discute su cose di cui non abbiamo nessun'idea. Quindi non si discute sugli infinitesimi".

[11]Sempre nei Commentari filosofici Berkeley scrive nell'appunto 290 del taccuino B:

"*Il grande pericolo sta nel far che l'estensione esista fuori dalla mente. In quanto, se esiste fuori dalla mente, deve essere riconosciuta infinita, immutabile, eterna, ecc. Il che sarà o fare che Dio sia esteso (cosa che ritengo pericolosa), o fare che esista un essere eterno immutabile infinito increato accanto a Dio*."

Sempre nel taccuino B:

"*L'ignoranza delle menti fece pensare agli uomini che l'estensione fosse nei corpi [....] ..ammettendo che ci siano sostanze estese, solide, ecc. fuori dalla mente, è impossibile che la mente le conosca o percepisca: ché la mente, anche secondo i materialisti, percepisce solo le impressioni fatte sul cervello, o piuttosto le idee che accompagnano quelle impressioni*".

I passi riportati si inseriscono nel contesto più generale della filosofia di Berkeley secondo cui l'*esse* delle cose è un *percipi* ("l'esistenza di una idea consiste nel venir percepita"): poiché le idee possono esistere solo in una mente che le percepisce la non esistenza degli infiniti e degli infinitesimi in atto è perciò strettamente legata alla nostra impossibilità di percepirli. Ciò che risulta quindi criticabile è l'idea che si possa operare con gli infinitesimi come se fossero esterni alla nostra mente e dotati di un'esistenza propria.

[12] *"....La usuale analisi ha a che fare solo con quantità finite; questa invece si addentra tanto profondamente quanto la stessa infinità. Essa paragona le differenze infinitamente piccole di quantità finite; scopre le relazioni tra queste differenze e in questo modo rende note le relazioni che intercorrono tra le quantità finite che si comportano come fossero infinite in confronto alle quantità infinitamente piccole. Si potrebbe anche dire che questa analisi si estende oltre l'infinito, perché non si limita alle differenze infinitamente piccole, ma scopre anche le relazioni tra le differenze di queste differenze*." G. de l'Hôpital

un asserto è garantita dalla sua evidenza. Questa visione ha il limite, secondo Leibniz, di non permettere di cogliere la verità in se stessa, ma di limitarsi a considerare il modo con cui il soggetto la percepisce.

Leibniz distingue invece due tipi di verità: le verità di ragione e le verità di fatto.

Le prime risultano necessarie, ma non riguardano la realtà e si basano sul principio di identità (quando sono affermative) e sul principio di non contraddizione (quando sono negative; questo comporta, fra l'altro, che le realtà di ragione non possono essere contraddittorie). Le verità di ragione delineano il mondo della pura possibilità che è assai più vasto ed esteso di quello della realtà. Si passa così da un piano intuizionista ad uno rigorosamente formalista[13] e questo fa pensare ad una sorta di verità "in atto" (esistente indipendentemente dalla mia capacità di coglierla) contrapposta ad una verità cartesiana che sembrava più "in potenza" (legata cioè alla mia capacità di coglierla).

Accanto alle verità di ragione Leibniz pone le verità di fatto, di minore importanza rispetto alle prime, legate più a conoscenze di carattere storico e concernenti la realtà effettiva, e come tali deducibili a posteriori. Ritiene tuttavia che anche queste verità "con un procedimento infinito" potrebbero essere riportate a verità di ragione. Malgrado Leibniz non approfondisca a cosa si riferisca esattamente, questo pone il problema di cosa intenda per "infinito". Queste verità non sono fondate sul principio di non contraddizione (il che comporta che sia possibile anche il loro contrario), ma sul principio di ragion sufficiente[14].

C'è pero un altro aspetto che distingue le verità di fatto da quelle di ragione: quest'ultime, pur essendo assolute, riguardano solo le essenze possibili, non le esistenze. La loro assolutezza dipende dal carattere formale che hanno, dal riferirsi cioè a delle possibilità, non a delle realtà: la realtà contiene in sé un fattore di contingenza che non può essere eliminato. I due ordini della coerenza logica e dell'esistenza sono così ben distinti. Volendo trasportare questa visione in ambito matematico, risulta piuttosto evidente come la questione dell'esistenza o meno nella realtà di infiniti e infinitesimi non ha molta importanza se questi enti sono percepiti e compresi da un punto di vista logico.

Nella disputa con Newton relativa alla paternità del calcolo infinitesimale, Leibniz ebbe la peggio, ma è indubbio come possa essere ritenuto il precursore dell'analisi non-standard avendo per primo intuito la natura logica degli infinitesimi, senza avere i mezzi per formalizzarla.

All'interno della sua filosofia si può però riscontrare un possibile modello di una strutturazione logica del concetto matematico di infinitesimo "in atto"; d'altra parte se tale modello non esistesse sarebbe difficile ricondurre i concetti di carattere matematico ad un aspetto filosofico, come in fondo si vuol fare. Si arriva così alle monadi leibniziane che in modo semplicistico potremmo affermare che stanno ad indicare le sostanze indivisibili, atomi spirituali senza parti, privi di estensione e di figura[15]. Non è questa la sede per approfondire il concetto di monade; è interessante però chiederci: se gli atomi fisici non esprimono un modello per la monade (che, ricordiamo, è **sostanza**), a cosa si potrebbe pensare? Ai punti geometrici, forse, pur essendo enti astratti al contrario delle monadi che sono effettiva sostanza. Si può pensare ai numeri? Prima di rispondere esaminiamo brevemente alcune caratteristiche delle monadi.

Per avere una conoscenza perfetta della sostanza servirebbe un intelletto infinito[16] (gli intelletti finiti si possono limitare solo alle verità di fatto), ma la limitatezza dell'intelletto conoscente è irrilevante per la sostanza conosciuta poiché ciascuna monade non solo possiede in sé la ragione profonda del susseguirsi dei suoi attributi, ma è anche una sostanza in continuo movimento, movimento che scaturisce dall'interno della monade stessa e non dal suo esterno. Leibniz al proposito paragona una monade ad una casa priva di porte e di finestre: essa possiede la capacità di evolversi da uno stato all'altro, ma non di uscire fuori da sé. Può in particolare rappresentarsi le altre monadi, ma questa rappresentazione non costituisce un penetrarle, bensì un rispecchiarle[17].

In questo contesto filosofico si inseriscono gli studi di carattere matematico di Leibniz. In diversi matematici anche successivi a Leibniz[18] sarà preso in considerazione il concetto di infinito in atto, ma raramente (in Democrito, per certi aspetti) il concetto di infinitesimo in atto, poiché questo implicherebbe la possibilità, una volta introdotto il concetto di infinito in atto, di poter parlare del rapporto di due grandezze e vedremo in seguito che tipo di problemi concettuali ha comportato. L'idea di monade permette invece di affrontare a monte il problema, individuando gli infinitesimi senza fare ricorso agli infiniti. Per comprendere il legame tra infinitesimi e monade, consideriamo il problema b) posto all'inizio di questo scritto. Utilizzando le notazioni di Leibniz potremmo prendere un punto di ascissa

---

[13]A proposito del formalismo in Leibniz e dell'importanza che attribuisce alla logica vedi [SPFS], vol. II pag. 489-490.

[14]"*Nulla si verifica senza una ragion sufficiente, cioè senza che sia possibile, a colui che conosca sufficientemente le cose, di dare una ragione che basti a determinare perché è così e non altrimenti*". Gerhardt, VI, p.602.

[15]Si ricordi che per Leibniz la monade non è l'atomo poiché la non divisibilità di quest'ultimo è legata alla pigrizia umana nel procedere oltre nella divisione, non nella loro effettiva indivisibilità.

[16]Per conoscenza perfetta e completa si intende una conoscenza in grado di dedurre le proprietà logiche e di fatto della sostanza.

[17]Questa teoria della conoscenza porta ad un integrale innantismo, in quanto anche i sensi, in fondo, non portano a qualcosa di esterno a noi.

[18]Alcuni di essi saranno, seppure per sommi capi, oggetto anche del presente lavoro.

$2+dx$, essendo dx una quantità infinitamente piccola[19]; il coefficiente angolare della retta congiungente i due punti $P(2,4)$ e $Q(2+dx, 4+4dx+(dx)^2)$ sarebbe $4+dx$, nell'ipotesi che si possa operare con dx come con un parametro non nullo (cioè, come dice Leibniz, come se fosse un numero). Si può concludere, come fa Leibniz, che tale valore può essere considerato uguale a 4, senza incorrere nelle obiezioni di Berkeley? Possibile che Leibniz non si ponesse il problema? La questione riguarda il concetto di "trascurabile", che se può essere introdotto ed accettato in un ambito fisico, è del tutto estraneo ad un contesto matematico; ma se al concetto di trascurabile si sostituisse quello di infinitamente vicino, la cosa diventerebbe più attualizzabile: basta chiarire ovviamente cosa s'intende per infinitamente vicino. Immaginiamo allora di vedere un numero come una monade, cosa non così arbitraria se si pensa ai numeri come la sostanza di cui è fatta la matematica. Due valori si potrebbero considerare infinitamente vicini se appartengono alla stessa monade; quindi un "numero" non sarebbe come noi lo immaginiamo (legato tra l'altro ad una concezione statica dello stesso; nell'analisi standard si considerano gli intorni di un punto per porsi in un'ottica dinamica, o, per lo meno, che studia le variazioni), ma avrebbe attorno a sé un'insieme di elementi "infinitesimi" che, pur fornendo valori diversi, di fatto permettono di rimanere sempre all'interno della monade-numero. In questo modo due valori appartenenti alla stessa monade (come ad esempio 4 è $4+dx$, nel nostro caso) sono indistinguibili dal punto di vista macroscopico (in altre parole rispetto ad un esterno), ma la loro distinzione all'interno della monade-numero permette di operare con essi in modo dinamico: il movimento scaturisce all'interno del numero stesso, non dall'esterno (per parafrasare quanto detto in precedenza a proposito delle monadi), fornendo comunque un risultato "esterno". Siamo in un'ottica decisamente non-standard e le analogie tra le proprietà matematiche degli infinitesimi e le caratteristiche delle monadi sono sorprendenti; si pensi ad esempio alla proprietà archimedea[20], al fatto che due monadi siano distinte così come due monadi-numero sono disgiunte oppure al fatto che ogni monade, pur essendo distinta dalle altre, ne rispecchia la struttura.

Leibniz è ricordato soprattutto per la simbologia che ha introdotto nell'analisi (tra gli altri, i simboli d'integrale e di differenziale), simbologia che permette un uso più maneggevole, se non addirittura algebrico, del calcolo differenziale (si pensi per esempio ai teoremi sulle regole di derivazione), mentre si dimentica il grosso contributo fornito nel campo dell'introduzione dei concetti di infinito e infinitesimo in atto. Uno dei motivi per i quali l'analisi di Leibniz non ha avuto successo, se non dal punto di vista simbolico, viene riscontrato, secondo i commentatori, nell'eccessivo misticismo presente nella sua filosofia (che fa ricondurre tutte le monadi alla monade suprema, Dio, che le ha create) e, necessariamente, nella sua matematica.

Strano destino quello di Leibniz: dopo aver avuto la peggio nella sua disputa con Newton relativa alla primogenitura del calcolo infinitesimale, la sua filosofia sarà messa alla berlina nel XVIII secolo dagli illuministi francesi; ciò nonostante il linguaggio che ha inventato rimarrà nella tradizione matematica e circa trecento anni dopo anche la logica confermerà su un piano formale le sue intuizioni.

Come detto in precedenza, occorrerà attendere la seconda metà dell'ottocento per avere una formalizzazione rigorosa dei concetti dell'analisi e dare una risposta alle questioni sollevate da Berkeley. Ma come è data tale risposta?

La teoria universalmente riconosciuta e tuttora largamente usata nella didattica dell'analisi, sia a livello di media superiore che universitaria, è quella di **Weierstrass** (1815-1897). Com'è noto Weierstrass risolve il problema degli infinitesimi....eliminandoli attraverso il concetto di limite. Riprendiamo ad esempio il problema della velocità e vediamo come lo risolve Weierstrass:

Egli, contrariamente a Newton e a Leibniz, non afferma che $4+\Delta t$ è praticamente uguale a 4, ma che $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = 4$ (1).

Innanzi tutto questo permette di considerare Δt come un numero reale non nullo (tende a zero, ma non è zero) e quindi di semplificarlo nel rapporto; la definizione di limite di Weierstrass espressa dalla (1) (noto come metodo dell'ε-δ) si esprime affermando che

[19]L'aver introdotto il simbolo dx al posto del più immediato Δx è in fondo il cardine dell'analisi di Leibniz ed è, al di là dell'uso simbolico che ne è stato fatto in seguito, il carattere distintivo rispetto alle altre formulazioni dell'analisi. Se infatti Δx fa pensare ad una differenza fra due numeri reali, differenza che, seppure può essere resa piccola a piacere è sempre un numero reale, dx assume decisamente una posizione autonoma, come elemento esistente in quanto tale; si passa in sostanza da un'idea di infinitesimo potenziale ad una prima idea di infinitesimo attuale.

[20]Se gli infinitesimi godessero di tale proprietà, cioè se il prodotto di un numero naturale n, grande a piacere, per un infinitesimo dx non fosse un infinitesimo, ricadremmo nei problemi visti in precedenza a proposito della determinazione dell'area di un cerchio; quindi il prodotto di n per dx deve essere ancora infinitesimo per cui la somma di tale prodotto con un numero reale r non ci farebbe uscire dalla monade individuata da r. Questo potrebbe servire per dare una ulteriore definizione di infinitesimo, dal punto di vista leibniziano: dato un numero reale r positivo, diremo che ε è un infinitesimo positivo se comunque si prenda un numero naturale n, $n\varepsilon<r$.

"comunque si prenda una quantità positiva piccola a piacere ε, esiste un'opportuna quantità positiva δ tale che se Δt è minore di δ, allora la differenza fra $\Delta s/\Delta t$ e 4 è minore di ε" [21]; in sostanza posso rendere l'errore che commetto considerando *4* anziché $\Delta s/\Delta t$ piccolo sin che voglio.

A fronte di un linguaggio più rigoroso, frutto di una sistematizzazione logica più rigorosa, tale modo di procedere ricorda molto il metodo di esaustione archimedeo, di cui comunque ricalca lo spirito: gli infinitesimi, se l'ε di Weierstrass si può considerare un infinitesimo, sono infinitesimi potenziali e non attuali anche se è scelto in un insieme (quello dei numeri reali) che presenta come insieme, come vedremo anche in seguito, un infinito in atto; in sostanza siamo ancora nell'ottica secondo cui gli infinitesimi in sé non esistono. In pratica la risposta alle obiezioni di Berkeley è data escludendo la possibilità di parlare di infinitesimi, rimanendo quindi in un tipo di logica che ricorda molto quello del vescovo inglese.

Tale concetto risulta forse più chiaro se si esamina come Weierstrass tratta l'infinito. Cosa significa che una funzione tende all'infinito quando la variabile indipendente x tende ad un valore x° (in simboli $\lim_{x\to x^\circ} f(x) = +\infty$)? Nella definizione di Weierstrass significa che "comunque si prenda una quantità positiva M "grande" esiste un valore x "vicino" a x° tale che il valore della funzione calcolata in x sia maggiore di M[22]. Anche in questo caso quindi un infinito potenziale.

Se Weierstrass può essere considerato colui che ha concluso il processo di dare un fondamento all'analisi, processo iniziato già nella prima metà dell'ottocento da Cauchy, con una logica che escludesse gli infiniti e infinitesimi in atto, nello stesso periodo si fanno avanti alcune teorie decisamente proiettate verso un'idea d'infinito attuale.

Una prima conseguenza del lavoro di Weierstrass fu che la ricostruzione dell'analisi sulla base del concetto di limite portò tutti i problemi algebrici riferiti all'aritmetica dei numeri reali. Diventò quindi indispensabile affrontare i fondamenti logici su cui tale insieme si basava.

Vi furono varie definizioni di numero reale tra cui ricordiamo quella di Weierstrass (che riporta ad un'idea di infinito " in potenza"), quella di Cantor e soprattutto quella di Dedekind, cioè quella che più comunemente è proposta a livello di scuola media superiore.

I numeri reali, secondo Dedekind, sono definiti come gli elementi separatori di classi separate e contigue di numeri razionali[23]. Se la condizione di separazione fa pensare ad un'idea d'infinitesimo in potenza (in sostanza è possibile rendere piccola a piacere la differenza fra un elemento di una classe e uno dell'altra), la richiesta di suddividere gli elementi di Q in due classi separate richiede espressamente che tale insieme esista "in atto" e non in una sua potenziale costruzione.

Se nell'ottocento ci si è resi conto che la formulazione di taluni concetti poteva o doveva passare attraverso l'idea di un infinito in atto, **Cantor** (1845-1918) cambia decisamente il punto di vista da cui considerare la questione: non più l'uso del concetto d'infinito legato ad aspetti o problemi specifici, ma lo studio del concetto in sé. In questo senso la figura di Cantor nella nostra trattazione riveste un ruolo particolare: è vero, come detto in precedenza, che Leibniz si può considerare il precursore degli infiniti e degli infinitesimi in atto pur non avendo fatto il passo decisivo in questa direzione, mentre Cantor, con la sua teoria dei transfiniti, si sposta decisamente nella direzione degli infiniti in atto in modo formale.

Il presupposto critico da cui muove Cantor è che l'infinito matematico così come era considerato può essere visto nel significato di grandezza variabile, crescendo al di là d'ogni valore, ma rimanendo sempre finita. A tale proposito parla di *infinito improprio*, facendo osservare che nella nuova concezione dell'analisi era opportuno considerare in modo diverso l'infinito[24]. Pensando quindi ad un infinito attuale legittimato nella sua esistenza, Cantor si pone in

---

[21]Con l'usuale terminologia formale: $\underset{\varepsilon>0}{\forall} \quad \underset{\delta>0}{\exists} \quad \underset{\Delta t<\delta}{\forall} \quad \left|\frac{\Delta s}{\Delta t} - 4\right| < \varepsilon$

[22]In simboli: $\underset{M>0}{\forall} \quad \underset{\delta>o}{\exists} \quad \underset{x\in Df}{\forall} \left(| x - x^\circ | < \delta \Rightarrow f(x) > M \right)$

[23]Dato l'insieme Q dei numeri razionali, due suoi sottoinsiemi A e B ne costituiscono una partizione se $A\cup B=Q$ e $A\cap B=\emptyset$; in particolare due sottoinsiemi A e B di Q determinano due classi separate e contigue se:

a) {A,B} costituisce una partizione di Q;

b) $\forall a\in A\ \forall b\in B\ a\leq b$ (condizione di separazione);

c) $\forall \varepsilon>0\ \exists a\in A\ \exists b\in B\ (b-a)<\varepsilon$ (condizione di contiguità).

[24]A tale proposito, anche per superare le critiche di Kronecker, Cantor considera come esempio le esigenze dell'analisi: *"....nello studio di una funzione analitica di una variabile complessa è divenuto necessario pensare , nel piano rappresentante la variabile complessa, un unico punto posto all'infinito, ossia infinitamente distante, ma determinato, ed esaminare il comportamento della funzione in prossimità di questo punto esattamente come nelle vicinanze di qualsiasi altro punto; ne risulta che il comportamento della funzione in prossimità del punto infinitamente distante presenta le stesse "possibilità" che in ogni altro punto posto al finito, cosicché diventa pienamente legittimo in questo*

un'ottica chiaramente anti-aristotelica, preoccupandosi anche di confutare le obiezioni che Aristotele muove nei confronti dell'esistenza di un infinito "reale".

Le due principali obiezioni aristoteliche vertevano sul fatto che:

1) si possono contare solo insiemi finiti;

2) se esistesse l'infinito attuale questo "annullerebbe" il finito.

Per Cantor, nella prima obiezione Aristotele presuppone che esistano solo numeri finiti e risulta quindi ovvio che mediante il contare si riconoscano solo insiemi finiti; la seconda obiezione si supera osservando che è vero che l'aggiunta di una quantità infinita ad una finita la "annulla", ma l'aggiunta di una finita ad una infinita, invece, modifica quest'ultima[25].

Con la sua teoria dei cardinali e ordinali transfiniti, di cui non ci occuperemo in questa sede[26], Cantor impone la presenza dell'infinito attuale nel mondo della matematica. Al di là dell'aspetto tecnico, il vero contributo filosofico dato dall'opera di Cantor riguarda la nuova e definitiva collocazione che l'infinito riveste con l'indagine sul transfinito: mentre prima l'infinito assoluto costituiva oggetto di studio per la teologia speculativa, la concezione di Cantor rientra nell'ambito della matematica; la sua esistenza è garantita dalla consistenza logica, unico criterio di raffronto per considerare una teoria "legittima"[27]. In questo modo Cantor supera uno dei limiti che avevano ostacolato l'accettazione delle idee di Leibniz e fa entrare definitivamente un metodo non-standard nella discussione matematica.

La teoria dei transfiniti di Cantor fu oggetto di parecchie critiche soprattutto da parte di Kronecker, con cui ebbe una accesa polemica alla fine dell'ottocento. La concezione matematica di Kronecker era di tipo intuizionista-costruttivista e trovava le sue radici nella tradizione aristotelica, mettendo in evidenza il contrasto tra la continuità di molti fenomeni fisici e la natura discreta di quegli enti della ragione umana, i numeri naturali, che cerchiamo di utilizzare per valutarli[28]. In questo modo negava agli infiniti di Cantor quella patente di evidenza indispensabile per considerarli logicamente accettabili[29].

Il lavoro di Cantor ebbe però anche grandi ed eminenti estimatori tra cui lo stesso Hilbert[30]. Resta comunque il fatto che la matematica dopo Cantor non sarebbe più stata la stessa.

Cantor non è certo ricordato come il padre dell'analisi non standard, pur avendone dato un forte contributo sul piano concettuale con la teoria dei transfiniti; ma come vedeva l'infinitamente piccolo?

Tra i problemi che Cantor si è posto, come detto, non c'era indubbiamente quello di riformulare l'analisi in senso non-standard. In effetti la sua teoria dei numeri tranfiniti era inserita nel contesto più ampio della teoria degli insiemi: in

---

caso immaginare l'infinito posto in un punto completamente determinato". Cantor: Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre, 1883.

[25]"*Questo esatto comportamento del finito e dell'infinito, totalmente trascurato da Aristotele, dovrebbe condurre a nuove suggestioni non solo nell'analisi, ma anche nelle altre scienze, e precisamente nelle scienze naturali*".

[26]Per una trattazione divulgativa si veda ad esempio [SPFS] vol. VI pagg.394-403.

[27]"*Nell'introdurre nuovi numeri, il solo obbligo dei matematici è darne le definizioni, tali che conferiscano ai nuovi numeri una certa definitezza e, circostanze permettendo, una certa relazione coi vecchi numeri, in modo da poterli distinguere dagli altri numeri. Se un numero soddisfa le suddette condizioni, può e deve essere considerato come esistente e reale in matematica. Quindi io scorgo la ragione per cui bisogna considerare i numeri razionali, irrazionali e complessi come realmente esistenti, alla stregua degli interi positivi finiti*". Cantor: Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre, 1883.

[28]"L'intuizionismo primitivo che Kronecker propugnava era fondato su quattro precetti:

1) I numeri naturali e la loro addizione costituiscono una base sicura per la matematica, perché ancorati alla nostra intuizione.

2) Qualunque definizione o dimostrazione dovrebbe essere "costruttiva". Dovrebbero cioè partire dai numeri naturali e costruire l'entità o la relazione matematica derivata in un numero finito di passi. Esistenza matematica significa costruzione. Le uniche dimostrazioni accettabili sono quelle che forniscono la ricetta esplicita per la costruzione richiesta. Le prove indirette che stabiliscono la non esistenza, o che fanno uso di procedimenti come la dimostrazione per assurdo sono inaccettabili.

3) La logica è distinta dalla matematica. Un'argomentazione logica può fare ricorso alla dimostrazione per assurdo ed essere in accordo con un insieme prefissato di regolo di ragionamento, e nondimeno non far parte della matematica valida.

4) Non si possono prendere in considerazione infiniti attuali, o completi. Si può concepire la costruzione di un insieme che possa essere accresciuto senza limite come un infinito potenziale, ma non si può ritenere che questa operazione in una qualsiasi fase produca un elemento di una collezione infinita completa. La produzione di tale completamento richiederebbe la nozione inammissibile di un numero infinito di operazioni." [LPC].

[29]Per una esposizione della disputa fra Cantor e Kronecker si veda [LPC] cap.V

[30]Nel 1923 a proposito del lavoro di Cantor Hilbert ebbe a dire "*Nessuno potrà cacciarci dal paradiso che Cantor ha creato per noi*".

sostanza i cardinali e gli ordinali "infiniti" esistono perché esistono gli insiemi infiniti. Con questa condizione Cantor supera definitivamente l'obiezione aristotelica: per "contare" un insieme infinito non è possibile riferirsi ad enti, i numeri, che per loro natura si riferiscono al finito. E' quindi un presupposto insiemistico quello da cui Cantor parte, non numerico, e quindi il concetto di infinitesimo attuale non viene preso in considerazione da Cantor in quanto estraneo alla sua trattazione. Ci furono tentativi da parte di B. Kerry, Stolz, Du Bois-Reymond di riprodurre gli infinitesimi a partire dalla sua teoria[31] che Cantor rifiutò; non solo, ma riteneva addirittura che i transfiniti ordinali potessero essere utilizzati per dimostrare la non esistenza degli infinitesimi[32].

Oltre agli argomenti espressi esplicitamente da Cantor c'erano altre ragioni che gli facevano rifiutare l'idea dell'esistenza di infinitesimi in atto. Innanzi tutto la loro collocazione. Mittag-Leffler[33], ad esempio, gli chiese se tale collocazione non poteva essere tra i razionali e gli irrazionali, ipotesi legittima se si pensa alla definizione di numero reale data da Dedekind che di fatto coinvolge degli infinitesimi in potenza. Cantor però riteneva che la completezza dei numeri reali finiti si esprimesse nei soli termini dei numeri razionali e irrazionali, anche perché questo permetteva di esprimere una corrispondenza biunivoca fra i punti di una retta e l'insieme dei numeri reali.

Ultimo aspetto, ma non meno importante, riguarda l'ipotesi del continuo. L'esistenza di infinitesimi avrebbe comportato una relazione di reciprocità tra infiniti ed infinitesimi; poiché i numeri transfiniti di Cantor hanno una struttura discreta, l'idea di un infinito ottenuto come reciproco di un infinitesimo avrebbe comportato la possibile esistenza di infiniti intermedi tra, ad esempio, la cardinalità del numerabile e quella del continuo e questo avrebbe contraddetto l'ipotesi del continuo.

Seppure Cantor nella sua trattazione si fermi sulla soglia dell'infinitamente piccolo, ha comunque posto in evidenza il concetto di coerenza logica contrapposto a quello di realtà riferito ad una teoria matematica, concetto che sarà alla base di buona parte della matematica del XX secolo.

Nel 1966 A. Robinson pubblica presso la North-Holland Publishing Co. un libro, *Non-Standard Analysis*, che segna ufficialmente la nascita dell'analisi non-standard.

L'idea di Robinson in fondo è semplice: riprendere il concetto di infinitesimo nella versione di Leibniz, costruire un mondo in cui operare con questi infinitesimi in modo da dedurre i risultati che non è possibile trovare in R. Detto in modo così superficiale però non risulterebbero chiare quali condizioni permettevano al matematico americano di superare il limite e le riserve rappresentate dall'accettazione di un infinitesimo in atto.

Il problema in fondo è sempre quello: esistono gli infinitesimi? In un contesto matematico il concetto di esistenza non è più così chiaramente legato ad un'idea di modello reale, ma a quello di modello logico. Ciò che Robinson aveva a disposizione rispetto al filosofo tedesco erano soprattutto i risultati riguardanti la teoria dei modelli come i teoremi di Skolem relativi ai modelli non-standard del "contare" e, soprattutto, il teorema di compattezza del logico russo A.Malcev (successivamente generalizzato da L.A. Henkin), dedotto a sua volta del teorema di completezza di Gödel[34].

Il teorema di compattezza può essere espresso in questo modo:

"*Supponiamo di avere un insieme di proposizioni nel linguaggio L e supponiamo che ogni sottoinsieme finito di tali proposizioni sia vero in un universo standard U; esiste allora un universo non-standard U* in cui tutte le proposizioni dell'intera collezione sono simultaneamente vere*".[35]

Vediamo allora come il teorema di compattezza garantisce l'esistenza di infinitesimi.

Si consideri l'insieme (infinito) P di proposizioni:

" *ε è un numero maggiore di zero e minore di 1/2*"

"*ε è un numero maggiore di zero e minore di 1/3*"

"*ε è un numero maggiore di zero e minore di 1/4*"

.

.

"*ε è un numero maggiore di zero e minore di 1/n*"

e così via.

---

[31]Kerry, in modo naturale, aveva proposto di individuare l'infinitesimo attuale nei valori $1/\omega$, $1/(\omega+1)$,..., $1/(2\omega)$,.., $1/\omega^2$, ecc. ricavandoli esplicitamente dai numeri ordinali cantoriani.

[32]Tale considerazione partiva dal presupposto che gli infinitesimi non soddisfano la proprietà archimedea dei numeri reali, proprietà, secondo Cantor, che conseguiva direttamente dal concetto di numero. Questo comportava la non ammissibilità degli infinitesimi nella categoria "numero" (anche in relazione alla definizione che fornisce di numeri lineari).

[33]Gösta Mittag-Leffler dirigeva la rivista "Acta Mathematica" su cui Cantor pubblicò il suo lavoro sugli infiniti.

[34]Il teorema di completezza afferma che un insieme di proposizioni è logicamente coerente se e solo se le proposizioni hanno un modello, cioè se e solo se c'è un universo in cui esse sono tutte vere.

[35]E' facile dimostrare come il teorema di compattezza discenda dal teorema di completezza: se ogni sottoinsieme finito di un insieme di proposizioni di L è vero in U, allora ogni sottoinsieme finito è logicamente coerente. Poiché ogni deduzione fa uso solo di un numero finito di premesse, allora tutto l'insieme delle proposizioni è logicamente coerente. Per il teorema di completezza c'è un universo (U*) in cui è vero tutto l'insieme di proposizioni.

Gli elementi di P possono essere scritti con un linguaggio formale del prim'ordine[36]; inoltre se ci si riferisce all'universo (standard) R dei numeri reali, ogni suo sottoinsieme finito è vero poiché nell'intervallo *]0,1/n[* cadrebbero infiniti numeri reali. Tuttavia l'insieme di tutte queste proposizioni risulta falso in R poiché dovrebbe esistere un numero reale positivo ε tale che $0<\varepsilon<1/n$ per ogni n naturale. Per il teorema di compattezza esiste però un universo non-standard (che indicheremo con R*) in cui tutte le proposizioni di P sono vere. In tale insieme esiste allora un ε tale che $0<\varepsilon<1/n$ per ogni n naturale; e questa condizione caratterizza ε come infinitesimo.

Una volta trovato un modello in cui esistono gli infinitesimi, il resto risulta conseguente; in particolare si possono definire gli infiniti (sempre col teorema di Malcev-Henkin; si invita il lettore a farlo come utile esercizio), le operazioni tra elementi non standard e le funzioni definite in R*. Il dubbio che può tuttavia rimanere è come diventa l'insieme dei numeri reali in una versione non-standard, se è possibile cioè darne una rappresentazione analoga all'usuale retta reale. In onore a Leibniz, Robinson introdusse proprio il termine di monade per indicare l'estensione non-standard di un numero reale r. Una monade contiene un solo numero reale r (standard) ed infiniti numeri non-standard ottenuti aggiungendo a r quantità infinitesime. E' come se ogni numero reale fosse circondato, in R*, da una nube "elettronica" di infiniti infinitesimi, per cui potremmo affermare che a livello "macroscopico" r* si confonde con r, mentre a livello "microscopico" i due valori sono distinti.

Il concetto di monade permette, come si è fatto in precedenza parlando di Leibniz, di comprendere meglio il concetto di vicinanza: un numero reale non-standard s appartiene alla monade individuata da un numero reale standard r se la loro differenza è un infinitesimo[37]; quindi due numeri reali non-standard sono infinitamente vicini se appartengono alla stessa monade. In questo modo è possibile esprimere in senso matematico anche il concetto di "trascurabile": si potrebbe sostenere che all'interno di una monade è trascurabile ciò che non è reale, considerando il numero reale che la caratterizza come l'essenza (per usare una terminologia leibniziana); in generale potremmo generalizzare dicendo che è trascurabile ciò che non è standard.

Riprendiamo come esempio il problema a) e vediamo come sarebbe risolto nell'analisi non-standard:

preso un infinitesimo positivo ε, si consideri lo spazio relativo all'istante $2+\varepsilon$ (si osservi che $2+\varepsilon$ appartiene alla monade individuata da 2); lo spazio percorso dall'istante $t=2$ all'istante $t1=2+\varepsilon$ è dato da $ds=4\varepsilon+\varepsilon^2$ e quindi il rapporto $\dfrac{ds}{dt}=\dfrac{4\varepsilon+\varepsilon^2}{\varepsilon}=4+\varepsilon$ (si osservi come con ε si sia operato in modo algebrico). Il valore $4+\varepsilon$ appartiene alla monade individuata da *4*, cioè la parte standard di $4+\varepsilon$ è *4*. In pratica la velocità istantanea è data dalla parte standard di $4+\varepsilon$ che in genere è indicata con $st(4+\varepsilon)$.

Com'è facile verificare riprendendo i conti fatti all'inizio di questo lavoro, questo modo di procedere non è molto dissimile da quello utilizzato da Leibniz; la non trascurabile differenza è che ora, per la prima volta, il metodo infinitesimale è stato reso rigoroso, grazie soprattutto alla logica formale. Le obiezioni di Berkeley, legate soprattutto alla possibile esistenza degli infinitesimi in atto, trovano finalmente risposta.

Non è superfluo osservare come il metodo proposto da Robinson sia un metodo sostanzialmente semantico: attraverso il teorema di Malcev-Henkin si è dedotto un modello di R*, modello che è successivamente costruito da Robinson dopo aver mostrato che l'insieme degli infinitesimi (definiti come gli elementi di R* il cui modulo è minore di tutti i numeri reali positivi) è ideale massimale dell'anello dei numeri iperreali finiti (cioè degli elementi a di R* tale che per ogni $r\in R_o$ $|a|<r$). Inoltre il quoziente tra l'insieme M_o degli iperreali finiti e l'insieme M_1 degli infinitesimi è isomorfo a R_o.

Nel suo lavoro Robinson identifica gli elementi di M_1 mediante una relazione d'equivalenza su successioni "quasi ovunque" coincidenti. Per chiarire il concetto, si possono considerare le successioni $\left\{\dfrac{1}{n^2}\right\}$ *e* $\left\{\dfrac{n+1}{n^3}\right\}$ che oltre ad essere quasi ovunque coincidenti individuano lo stesso infinitesimo. In sostanza l'idea di Robinson è quella di costruire una struttura algebrica a partire da successioni di numeri reali che non solo abbiano "lo stesso limite" ma introducendo anche una relazione d'equivalenza che tenga conto anche della *rapidità di convergenza*.

Questo non è l'unico approccio possibile all'analisi non-standard. Un esempio di impostazione rigorosamente sintattica è quella indicata da H.J.Keisler in "Elementary Calculus" (trad. italiana "Elementi di analisi matematica" a cura di Ferro, Sambin, Colussi, Facchini, Le Donne-Piccin Editore; Padova, 1982). Keisler introduce gli iperreali infinitesimi ed infiniti in modo assiomatico; in particolare, dopo aver dato gli assiomi che descrivono R* e le sue operazioni, postula l'esistenza di un iperreale infinitesimo positivo e dimostra successivamente che il reciproco di un infinitesimo è un infinito, ricavando così anche l'esistenza degli iperreali infiniti.

[36]Ad esempio la prima diventerebbe: $\exists c\in\Re(c>0 \wedge c<½)$

[37]La caratterizzazione delle monadi potrebbe essere fatta anche in un altro modo: presi due elementi *r* ed *s* di *R**, consideriamo la relazione *sMr* se e solo se $|s-r|=\varepsilon$, con ε infinitesimo positivo. Come si può facilmente dimostrare questa è una relazione di equivalenza su *R*xR** di cui le monadi costituiscono le classi di equivalenza. Si osservi inoltre che dalla relazione così definita discende che due numeri reali distinti non possono appartenere alla stessa monade.

Un ruolo particolarmente significativo nell'assiomatica di Keisler è rivestito dall'assioma del transfert che vale la penna riportare per esteso:

"Un enunciato espresso con un linguaggio al prim'ordine in R è vero se e solo se è vero in R*".

In sostanza l'assioma del transfert afferma che tutte le proprietà di R esprimibili al prim'ordine sono proprietà anche di R* e viceversa. Così ad esempio le proprietà della somma in R valgono anche per la somma in R*, vista come estensione dell'analoga operazione in R.

In quest'ottica una particolare attenzione va rivolta all'enunciato che definisce la proprietà archimedea. Parlando delle monadi si è detto come l'impossibilità di uscire dalla monade con un multiplo di un infinitesimo esprimesse una sorta di "non archimedeità" dei numeri iperreali. Questo potrebbe apparire in contraddizione con l'assioma del transfert; se esprimiamo la proprietà archimedea con l'enunciato

$$\forall a,b \in \Re^+ \qquad \exists n \in N \quad (a < b \rightarrow na > b)$$

potremmo pensare alla sua estensione non standard esprimibile da

$$\forall a^*,b^* \in \Re^{*+} \qquad \exists n^* \in N^* \quad (a^* < b^* \rightarrow n^* a^* > b^*).$$

Nel caso specifico quindi un numero naturale che ci permetteresse di uscire dalla monade (se a* fosse un infinitesimo) o di "superare" b* (se fosse un infinito) dovrebbe essere un ipernaturale infinito. Purtroppo l'enunciato che definisce la proprietà archimedea non è esprimibile al prim'ordine[38] e quindi non è possibile applicare l'assioma del transfert. Questo permette di concludere che R* non è archimedeo, poiché, non potendo fare l'estensione di cui si diceva sopra, il numero naturale richiesto dalla proprietà, nel caso a e b fossero iperreali, dovrebbe essere un elemento di N e non di N*; ed in questo caso, nel caso di a infinitesimo o di b infinito tale numero non è detto che esista.

Al di là dei percorsi di carattere filosofico, che si è cercato di evidenziare nel presente lavoro, relativi al concetto di infinito e infinitesimo, mi sembra doveroso sottolineare l'importanza dell'analisi non-standard dal punto di vista didattico. Chi ha insegnato analisi seguendo l'impostazione di Weierstrass sa come il concetto di limite, il primo e forse più importante concetto che è introdotto, presenti delle grosse difficoltà per gli alunni. Se da un punto di vista puramente intuitivo il concetto di per sé è semplice, non così semplice è comprendere la definizione di limite secondo la teoria di Weierstrass. Un'analisi acuta (e condivisibile) di tali difficoltà è stata proposta dal Prof. Invernizzi[39]:

1) la definizione è controvariante, nel senso che, mentre intuitivamente dal "comportamento" della variabile x risalgo al "comportamento" di y, nella definizione parto da y per arrivare a x;
2) la definizione inizia con un quantificatore universale ($\forall\varepsilon>0$...) e mostra allo studente che sono necessarie "infinite verifiche";
3) la definizione è forse troppo generale per il primo insegnamento dell'idea di limite (vale per spazi metrici e per funzioni fra spazi topologici);
4) la definizione è totalmente formalizzata, lontana da ogni intuizione geometrica;
5) la definizione ε-δ è un terribile *pons asinorum* dell'analisi dal quale cadono molti allievi.

In un impostazione non-standard dell'analisi parecchi di questi problemi non si pongono; soprattutto non si pone il problema evidenziato al punto 1) che è, secondo me, il più grosso ostacolo ad un approccio intuitivo al concetto di limite. Per renderci conto dell'affermazione precedente, basta vedere come è data la definizione di limite nell'analisi non-standard nella formalizzazione di Keisler. Indicata con M(a) la monade di a (cioè i numeri iperreali ottenuti aggiungendo ad a un infinitesimo), con A* l'estensione in R* di A, con y=f*(x) l'estensione in R* di y=f(x) e con ≈ la relazione "essere infinitamente vicino a" (cioè differire per un infinitesimo), tale definizione diventa:

"Data una funzione reale di variabile reale di dominio A e dato $a\in\Re$ si dice che il limite per x che tende ad a di y=f(x) è uguale a l e si scrive $\lim_{x\to a} f(x) = l$ se e solo se $\forall x\in M(a)\ (x\in A^*\setminus\{a\}\rightarrow f^*(x)\approx l)$".

Da un punto di vista sostanziale l'affermazione precedente può essere letta in questi termini: quando x è infinitamente vicino ad a allora f*(x) è infinitamente vicino a l, fornendo così una definizione "nel verso" dell'intuizione. L'obiezione che questa definizione può far sorgere è che si è parlato di limite per una funzione reale e tale limite è stato definito in R*. In effetti il calcolo effettivo di una funzione reale a variabile reale passa attraverso il calcolo della parte standard del numero (iperreale) f*(x), dove x è infinitamente vicino ad a. In sostanza si passa all'estensione non-standard di y=f(x) per poi ritornare in R attraverso la funzione "parte standard", vista in precedenza. In questo modo il calcolo del limite si riduce alla determinazione della parte standard di un numero iperreale ed in quest'ottica se non ci fosse il grosso condizionamento dell'analisi di Weierstrass il concetto di limite potrebbe addirittura essere evitato!

Ad esempio se volessimo calcolare $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1}$, basterebbe calcolare la parte standard del numero (iperreale) $\dfrac{(1+\varepsilon)^2-3(1+\varepsilon)+2}{(1+\varepsilon)^2-1}$, ottenuto sostituendo a x, nella funzione, il numero iperreale 1+ε, essendo ε un infinitesimo. In

[38] Nel caso specifico occorrerebbe esprimere al prim'ordine il fatto che n sia un numero naturale e questo non è possibile.

[39] Sergio Invernizzi:"Limiti e visualizzazione". Quaderno n°15-Aprile 1993, Trieste.

sostanza siamo passati da R a R*. Facendo i conti (le proprietà degli infinitesimi permettono di trattarli "come se fossero numeri" in quanto si estendono in R* le proprietà delle operazioni in R) si perviene al numero iperreale $\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}$ la cui parte standard è $-\frac{1}{2}$ (siamo cioè ritornati in R con la funzione parte standard).

Il calcolo della parte standard è possibile, ovviamente, solo per iperreali finiti. Ma nel caso in cui il risultato del limite fosse un infinito, questo costituirebbe già di per sé un risultato, per sua natura non ottenibile in R. A titolo d'esempio consideriamo il seguente limite: $\lim_{x\to 1^{x}} \frac{x+2}{1-x}$. Passando a R*, si ottiene l'iperreale $\frac{1+\varepsilon+2}{1-(1+\varepsilon)}$, essendo ε un infinitesimo positivo. Eseguendo i calcoli si ottiene $\frac{3+\varepsilon}{-\varepsilon}=-1-\frac{3}{\varepsilon}$. In questo caso non è possibile calcolare la parte standard; si dimostra però che il rapporto fra un iperreale finito non infinitesimo e un infinitesimo è un infinito, per cui tale limite è uguale ad un infinito negativo.

Per fugare facili entusiasmi credo sia opportuno dire come l'analisi non-standard presenti parecchi problemi, soprattutto dal punto di vista logico, in quanto esistono diversi modelli dell'analisi non-standard non isomorfi fra di loro. Credo però valga la pena tenerla in considerazione da un punto di vista didattico per gli indubbi vantaggi che, in certi contesti, offre. A tale proposito, il gruppo di ricerca del Dipartimento di Matematica dell'Università di Parma per la Scuola Media Superiore coordinato dalla Prof.ssa Michelotti Venè Margherita e di cui faccio parte, sta portando avanti il progetto di produrre un corso di analisi non-standard fruibile a livello di scuola media superiore[40]. Crediamo sia una strada da percorrere; ma forse occorrerebbe non solo "dimenticare" la formazione "standard" in cui bene o male siamo tutti cresciuti, ma anche guardare con un'ottica diversa quelle strane creature che sono gli infiniti e gli infinitesimi in atto; a volte si ha l'impressione di essere vicini al modo di pensare dei greci più di quanto non si creda.

Maffini Achille
Via Co de Vanni, 7
26036 Rivarolo del Re (CR)
ITALIA
E-mail: a.maffini@libero.it

BIBLIOGRAFIA

[SPSF] STORIA DEL PENSIERO FILOSOFICO E SCIENTIFICO a cura di L. Geymonat-Garzanti,1988

L'ANALISI NON-STANDARD - M. Davis, R. Hersh - Le Scienze n°49, settembre 1972

[LPC] LA LUNA NEL POZZO COSMICO - J.D. Barrow, Adelphi, 1994

INTRODUZIONE ALL'ANALISI NON STANDARD-S. Salsa, Atti del Convegno "Per una storia dell'Analisi", Quaderni PRISTEM/Documenti n°3.

Per gli aspetti tecnici dell'analisi non-standard:

DAI GRAFICI AL CONCETTO DI LIMITE ATTRAVERSO L'ANALISI NON STANDARD
M. Michelotti Venè, C. Cervi, M.G. Delfrate, L. Ferraris, A. Maffini, A. Melej -
Quaderni del dipartimento di Matematica, Università di Parma - 1994

ANALISI NON-STANDARD: NOZIONI PRELIMINARI.
M. Michelotti Venè, C. Cervi, M.G. Delfrate, L. Ferraris, A. Maffini, A. Melej -
Quaderni del dipartimento di Matematica, Università di Parma - 1996

NON-STANDARD ANALYSIS - A. Robinson, North-Holland Publishing Co., 1966

ELEMENTI DI ANALISI MATEMATICA - H.J. Keisler, Piccin Editore, 1982

[40]Per ulteriori informazioni rivolgersi a Achille Maffini, E-mail: a.maffini@libero.it