εεεεεεεεεε... cercasi disperatamente

Michelotti Venè Margherita - Maffini Achille

Il più è partire....; ma quando si deve introdurre il corso d'analisi la partenza è sempre irta di difficoltà poiché ci si scontra immediatamente con la definizione di **limite**.

Introdurre intuitivamente il concetto di limite è semplice in quanto si capisce abbastanza bene che $\lim_{x \to x°} f(x) = l$ significa che "approssimando x°, y=f(x) si approssima ad l" qualora tali "approssimazioni" siano possibili. Ben più difficile è far comprendere la definizione di limite secondo la teoria di Weierstrass; perché?

Il problema è stato ben analizzato dal prof. Invernizzi[1]; egli afferma che tale difficoltà è dovuta a:

1) la definizione è controvariante, nel senso che, mentre intuitivamente dal "comportamento della variabile x risalgo al "comportamento" di y, nella definizione parto da y per arrivare ad x;

2) la definizione inizia con un quantificatore universale ($\forall\varepsilon>0$....) e mostra allo studente che sono necessarie "infinite verifiche";

3) la definizione è forse troppo generale per il primo insegnamento dell'idea di limite (vale per spazi metrici e per funzioni fra spazi topologici);

4) la definizione è totalmente formalizzata, lontana da ogni intuizione geometrica;

5) la definizione ε-δ è un terribile *pons asinorum* dell'analisi dal quale cadono molti allievi.

Riteniamo che questa analisi sia condivisa da molti e proprio per costruire un ponte più largo per gli studenti che ci siamo rivolti all'analisi non standard.

In questo lavoro di gruppo vedremo a grandi linee l'origine delle idee di fondo che l'hanno generata partendo dall'analisi di tre problemi-tipo attraverso un questionario a cui i partecipanti sono tenuti a rispondere.

1) Considera il seguente ragionamento, proposto da N. Cusano nel XVI secolo, relativo alla determinazione dell'area di un cerchio:

"La circonferenza può essere pensata come composta di un numero infinito di segmenti rettilinei tutti uguali tra loro e infinitamente corti. L'area del cerchio è data allora dalla somma delle aree di triangoli infinitesimi aventi tutti altezza 1. Poiché l'area del triangolo è data dal semiprodotto della base per l'altezza e poiché la somma delle basi dei triangoli fornisce la circonferenza, l'area del cerchio è data dal semiprodotto del raggio per la circonferenza."

2) Considera il seguente ragionamento, proposto da Archimede, relativo alla determinazione dell'area di un cerchio:

"Supponiamo che l'area del cerchio non sia metà del prodotto del raggio per la sua circonferenza; sia allora d la differenza fra la maggiore e la minore delle due quantità. Se circoscriviamo alla circonferenza un poligono di n lati, l'area di tale poligono sarà la somma delle aree degli n triangoli che lo compongono, tutti di altezza 1, e quindi l'area complessiva sarà p, essendo p il semiperimetro del poligono. Preso n sufficientemente grande, possiamo far sì che l'area del poligono differisca dall'area del cerchio meno della metà di d. Poiché il perimetro del poligono differirà dalla circonferenza per meno della meta di d, l'area del cerchio e il semiprodotto del raggio per la circonferenza differiranno meno di d, contro l'ipotesi di partenza. Quindi d deve essere zero".

3) Considera il seguente ragionamento, proposto da Leibniz nel XVIII secolo, relativo al calcolo della velocità istantanea al tempo t=2 s per un corpo che si muove con una legge oraria del tipo $s=t^2$ (con s misurato in metri e t in secondi):

[1]Sergio Invernizzi: "Limiti e visualizzazione". Quaderno n°15, aprile 1993, Trieste

"Preso l'istante t=2, si consideri la quantità "infinitesima" che indicheremo con Δt e si valuti la posizione del punto materiale all'istante $t1=2+\Delta t$ data da $s1=4+4\Delta t+\Delta t^2$ e quindi $\Delta s=4\Delta t+\Delta t^2$, cioè una quantità infinitesima. Poiché la velocità è data dal rapporto $\Delta s/\Delta t=4+\Delta t$, 4 e $4+\Delta t$ si possono considerare "la stessa cosa", cioè Δt è una quantità trascurabile rispetto a 4 e quindi la velocità istantanea al tempo t=2 s è 4 (m/s)".
Relativamente ai problemi precedenti, rispondi alle seguenti domande:
a) Quali considerazioni ti sorgono spontanee con simili modi di procedere?
b) Cosa intendono, secondo te, gli autori con i termini "infinito" e "infinitesimi"?
c) Ricordano qualche procedimento a te noto?
d) Li proporresti in un contesto didattico?
e) Riusciresti a darne una esplicitazione formale o, in alternativa, una generalizzazione che li possa rendere operativi anche in altro contesto?
f) Proponi dei problemi della matematica (diversi dai precedenti!) e risolvili in modo analogo.

Alcune (spontanee) considerazioni:
Il ragionamento proposto da **Nicola Cusano** (1407-1464) nel XV secolo porta ad un risultato corretto, ma con una forma ed una terminologia che sarebbero state respinte da Euclide e da tutta la cultura greca in quanto presupponeva la presenza di infiniti ed infinitesimi in atto.
D'altra parte anche senza scomodare Euclide le obiezioni ad un siffatto modo di procedere vengono spontanee: innanzi tutto non è chiaro cosa si intenda con triangolo di base infinitesima: è zero o è diversa da zero? Nel primo caso l'area del triangolo è zero e quindi la somma di termini nulli darebbe sempre zero; nel secondo caso avremmo la somma di infiniti termini non nulli e quindi, per la proprietà archimedea dei numeri reali, avremmo una somma infinitamente grande. In sostanza, se esistessero triangoli siffatti, la loro area sarebbe un numero non archimedeo. Il problema che si trascinerà sino al novecento, è dunque questo: esistono numeri di questo tipo?
Un'altra obiezione che si può fare è di carattere più filosofico: è possibile ricavare le proprietà di una figura nella sua interezza a partire dalle proprietà delle infinite parti che la compongono? E' chiaro come una risposta positiva porterebbe a pericolose conclusioni legate ad una sorta di induzione che dall'infinito (o dall'infinitesimo) porterebbe al finito.

Archimede (287 a.C.-212 a.C.) risolve il problema rimanendo nella tradizione classica usando il metodo di esaustione. In questo modo Archimede evita il ricorso agli infinitesimi, argomento che consentirà ai critici del calcolo infinitesimale del '600 e del '700 di chiedersi se fosse lecito o no utilizzare questioni che i greci avevano scrupolosamente evitato. Nelle intenzione degli assertori dell'analisi infinitesimale si sarebbe potuto passare da enti di una (esempio linee o segmenti) oppure due dimensioni (ad esempio superfici piane) a enti di due (superfici) o tre dimensioni (volumi). Questo modo di procedere, tipico per esempio di **Cavalieri** (1598-1647), viene criticato da Guldino che dall'analisi che compie di ogni teorema di Cavalieri stesso arriva alla medesima critica: "*Rispondo che il continuo è divisibile all'infinito, ma non consta di infinite parti in atto, bensì soltanto in potenza, le quali [parti] non possono essere mai esaurite*". In fondo Guldino mette in evidenza quello che sarà il reale problema alla base di tutte le successive disquisizioni: l'esistenza (o l'accettazione) dell'infinito e dell'infinitesimo in atto.
Rimaneva però un dubbio: come mai i ragionamenti con gli infinitesimi e gli infiniti (alla "Cusano", per intenderci) sembra funzionino? E se funzionano per risolvere taluni problemi non è possibile trascurarne l'aspetto prettamente epistemologico? A prescindere dal fatto che difficilmente un matematico accetta di buon partito una teoria od un metodo semplicemente perché "funziona", i problemi sono anche altri, riguardanti, ad esempio, una visione teologica del mondo.
Come spesso succede nel campo della matematica e della scienza in genere, è lo scontro fra due grosse personalità che mette in evidenza l'importanza di nuove scoperte o teorie; nel nostro caso, **Leibniz** (1647-1716) e **Newton** (1642-1727).

I due pensatori arrivarono al calcolo differenziale in modo diverso e separatamente: per Newton era uno strumento necessario per risolvere alcune questioni di cinematica e di dinamica, mentre per Leibniz tali studi si inserirono nel contesto generale della sua filosofia.

Il critico più lucido del modo di fare analisi di Leibniz e Newton fu il vescovo inglese **George Berkeley** (1685-1753) nella sua opera *L'Analista o discorso indirizzato ad un matematico incredulo* del 1734 aveva lucidamente rivolto alla teoria di Leibniz. Di fatto però considerando Δt come una quantità finita, il rapporto $\Delta s/\Delta t$ diventava $4+\Delta t$ e per eliminare il termine "trascurabile" Δt Newton lo pone uguale a zero. In sostanza Newton afferma che l'errore che si commette considerando 4 la velocità al tempo $t=2\ s$ è trascurabile, o meglio può essere reso talmente piccolo (verrebbe da dire "a piacere") da poterlo ritenere nullo.

La critica di Berkeley risulta persino banale nella sua ovvietà: Δt è uguale a zero oppure non lo è. Se è diverso da zero allora Δs è diverso da zero e quindi il rapporto non è 4; se Δt è zero, anche Δs lo è e quindi il rapporto $\Delta s/\Delta t$ diventa 0/0, cioè privo di significato. In sostanza afferma Berkeley *"...una volta ammesso che gli incrementi scompaiono, cioè che gli incrementi siano nulli o che non vi siano incrementi, cade la precedente ipotesi che gli incrementi fossero qualcosa, o che vi fossero incrementi, mentre viene mantenuta una conseguenza di tale ipotesi, cioè un'espressione ottenuta mediante essa.......Che cosa sono queste flussioni? La velocità di incrementi evanescenti. E che cosa sono questi stessi incrementi evanescenti? Non sono né quantità finite , né quantità infinitamente piccole e neppure nulle*".

Per oltre un secolo non si riuscì a dare risposta alle obiezioni di Berkeley, seppure i matematici continuassero ad operare (e con successo) con gli infinitesimi.

Soffermiamoci sulla critica di Berkeley per capire meglio lo spirito dell'atteggiamento di Leibniz.

La forza di tale critica risiede nel fatto che i ragionamenti degli analisti "funzionerebbero" se gli infinitesimi esistessero; il problema quindi non è solo di carattere logico, ma è anche e soprattutto un problema realista: se gli infinitesimi esistessero, avrebbero un corrispettivo nella realtà. Ma se così fosse esisterebbero degli infiniti e degli infinitesimi in atto. Comunque si guardi la questione, il punto d'arrivo è sempre lo stesso: negare i presupposti su cui si era basata la geometria e la matematica in genere dei greci, matematica ritenuta comunque "della realtà".

Strettamente legato a questo c'è un'altro aspetto che emerge dalle critiche di Berkeley e su cui è opportuno porre l'accento: egli rimprovera a Leibniz e Newton di uscire dal contesto dei numeri reali per ragionare in termini di infinitesimi "quando serve" per poi rientrarvi per trarre le conclusioni.

Leibniz di fatto non affermava che gli infinitesimi esistevano realmente, ma solo che "***si può ragionare come se esistessero***"; nella sua raffigurazione li aveva pensati come numeri positivi o negativi infinitamente piccoli che ancora godevano delle "stesse proprietà" degli usuali numeri della matematica. Dal punto di vista logico si hanno non poche difficoltà ad accettare un'idea di questo tipo: se godono di tutte le proprietà dei numeri reali, come possono essere positivi e minori di ogni numero reale positivo?

Per capire la posizione di Leibniz rispetto ai contenuti dell'analisi non si può prescindere dalla sua filosofia, il cui punto di partenza risiede nella critica al concetto di verità formulata da Cartesio. Per il filosofo francese, la verità di un asserto è garantita dalla sua evidenza. Questa visione ha il limite, secondo Leibniz, di non permettere di cogliere la verità in se stessa, ma di limitarsi a considerare il modo con cui il soggetto la percepisce.

Leibniz distingue invece due tipi di verità: le verità di ragione e le verità di fatto.

Le prime risultano necessarie, ma non riguardano la realtà e si basano sul principio di identità (quando sono affermative) e sul principio di non contraddizione (quando sono negative; questo comporta, fra l'altro, che le realtà di ragione non possono essere contraddittorie). Le verità di ragione delineano il mondo della pura possibilità che è assai più vasto ed esteso di quello della realtà. Si passa così da un piano intuizionista ad uno rigorosamente formalista e questo fa pensare ad una sorta di verità "in atto" (esistente indipendentemente dalla mia capacità di coglierla)

contrapposta ad una verità cartesiana che sembrava più "in potenza" (legata cioè alla mia capacità di coglierla).
Accanto alle verità di ragione Leibniz pone le verità di fatto, di minore importanza rispetto alle prime, legate più a conoscenze di carattere storico e concernenti la realtà effettiva, e come tali deducibili a posteriori. Ritiene tuttavia che anche queste verità "con un procedimento infinito" potrebbero essere riportate a verità di ragione. Malgrado Leibniz non approfondisca a cosa si riferisca esattamente, questo pone il problema di cosa intenda per "infinito". Queste verità non sono fondate sul principio di non contraddizione (il che comporta che sia possibile anche il loro contrario), ma sul principio di ragion sufficiente.
C'è pero un'altro aspetto che distingue le verità di fatto da quelle di ragione: quest'ultime, pur essendo assolute, riguardano solo le essenze possibili, non le esistenze. La loro assolutezza dipende dal carattere formale che hanno, dal riferirsi cioè a delle possibilità, non a delle realtà: la realtà contiene in sé un fattore di contingenza che non può venire eliminato. I due ordini della coerenza logica e dell'esistenza sono così ben distinti. Volendo trasportare questa visione in ambito matematico, risulta piuttosto evidente come la questione dell'esistenza o meno nella realtà di infiniti e infinitesimi non ha molta importanza se questi enti vengono percepiti e compresi da un punto di vista logico.
All'interno della sua filosofia si può però riscontrare un possibile modello di una strutturazione logica del concetto matematico di infinitesimo "in atto"; d'altra parte se tale modello non esistesse sarebbe difficile ricondurre i concetti di carattere matematico ad un'aspetto filosofico, come in fondo si vuol fare. Si arriva così alle monadi leibniziane che in modo semplicistico potremmo dire che stanno ad indicare le sostanze indivisibili, atomi spirituali senza parti, privi di estensione e di figura. Non è questa la sede per approfondire il concetto di monade; è interessante però chiederci: se gli atomi fisici non esprimono un modello per la monade (che, ricordiamo, è **sostanza**), a cosa si potrebbe pensare? Ai punti geometrici, forse, pur essendo enti astratti al contrario delle monadi che sono effettiva sostanza. Si può pensare ai numeri? Prima di rispondere esaminiamo brevemente alcune caratteristiche delle monadi.
Per avere una conoscenza perfetta della sostanza servirebbe un intelletto infinito (gli intelletti finiti si possono limitare solo alle verità di fatto), ma la limitatezza dell'intelletto conoscente è irrilevante per la sostanza conosciuta poiché ciascuna monade non solo possiede in sé la ragione profonda del susseguirsi dei suoi attributi, ma è anche una sostanza in continuo movimento, movimento che scaturisce dall'interno della monade stessa e non dal suo esterno. Leibniz al proposito paragona una monade ad una casa priva di porte e di finestre: essa possiede la capacità di evolversi da uno stato all'altro, ma non di uscire fuori di sé. Può in particolare rappresentarsi le altre monadi, ma questa rappresentazione non costituisce un penetrarle, bensì un rispecchiarle.
In questo contesto filosofico si inseriscono gli studi di carattere matematico di Leibniz. In diversi matematici anche successivi a Leibniz verrà preso in considerazione il concetto di infinito in atto, ma raramente (in Democrito, per certi aspetti) il concetto di infinitesimo in atto. L'idea di monade permette di individuare gli infinitesimi senza fare ricorso agli infiniti. Per comprendere il legame tra infinitesimi e monade, consideriamo il problema 3) posto all'inizio. Utilizzando le notazioni di Leibniz potremmo prendere un istante $2+dt$, essendo dt un intervallo infinitamente piccola; il rapporto incrementale relativo ai due punti $P(2,4)$ e $Q(2+dt,4+4dt+(dt)^2)$ sarebbe $4+dt$, nell'ipotesi che si possa operare con dt come con un parametro non nullo (cioè, come dice Leibniz, come se fosse un numero). Si può concludere, come fa Leibniz, che tale valore può essere considerato uguale a 4, senza incorrere nelle obiezioni di Berkeley? Possibile che Leibniz non si ponesse il problema? La questione riguarda il concetto di "trascurabile", che se può essere introdotto ed accettato in un ambito fisico, risulta del tutto estraneo ad un contesto matematico; ma se al concetto di trascurabile si sostituisse quello di infinitamente vicino, la cosa diventerebbe più attualizzabile: basta chiarire ovviamente cosa si intende per infinitamente vicino. Immaginiamo allora di vedere un numero come una monade, cosa non così arbitraria se si pensa ai numeri come la sostanza di cui è fatta la

matematica. Due valori si potrebbero considerare infinitamente vicini se appartengono alla stessa monade; quindi un "numero" non sarebbe come noi lo immaginiamo (legato tra l'altro ad una concezione statica dello stesso; nell'analisi standard si considerano gli intorni di un punto per porsi in un'ottica dinamica, o, per lo meno, che studia le variazioni), ma avrebbe attorno a sé un'insieme di elementi "infinitesimi" che , pur fornendo valori diversi, di fatto permettono di rimanere sempre all'interno della monade-numero. In questo modo due valori appartenenti alla stessa monade (come ad esempio *4* è *4+dt*, nel nostro caso) sono indistinguibili dal punto di vista macroscopico (cioè rispetto ad un esterno), ma la loro distinzione all'interno della monade-numero permette di operare con essi in modo dinamico: il movimento scaturisce all'interno del numero stesso, non dall'esterno (per parafrasare quanto detto in precedenza a proposito delle monadi), fornendo comunque un risultato "esterno". Siamo in un'ottica decisamente non-standard e le analogie tra le proprietà matematiche degli infinitesimi e le caratteristiche delle monadi sono sorprendenti; si pensi ad esempio alla proprietà archimedea, al fatto che due monadi siano distinte così come due monadi-numero sono disgiunte oppure al fatto che ogni monade, pur essendo distinta dalle altre, ne rispecchia la struttura.

Leibniz è ricordato soprattutto per la simbologia che ha introdotto nell'analisi (tra gli altri, i simboli di integrale e di differenziale), simbologia che permette un uso più maneggevole, se non addirittura algebrico, del calcolo differenziale (si pensi per esempio ai teoremi sulle regole di derivazione), mentre si dimentica il grosso contributo fornito nel campo dell'introduzione dei concetti di infinito e infinitesimo in atto. Uno dei motivi per cui l'analisi di Leibniz non ha avuto successo, se non dal punto di vista simbolico, viene riscontrato, secondo i commentatori, nell'eccessivo misticismo presente nella sua filosofia (che fa ricondurre tutte le monadi alla monade suprema, Dio, che le ha create) e, necessariamente, nella sua matematica.

Per avere una formalizzazione rigorosa dei concetti dell'analisi e dare una risposta alle questioni sollevate da Berkeley occorrerà attendere la seconda metà dell'ottocento. Ma come viene data tale risposta?

La teoria universalmente riconosciuta e tuttora largamente usata nella didattica dell'analisi sia a livello di media superiore che universitaria è quella di **Weierstrass** (1815-1897). Com'è noto Weierstrass risolve il problema degli infinitesimi....eliminandoli attraverso il concetto di limite.

Per ritrovare in modo formale le idee di Leibniz, e con esse gli infinitesimi e gli infiniti in atto, bisognerà attendere ancora un altro secolo.

Nel 1966 A. Robinson pubblica presso la North-Holland Publishing Co. un libro, *Non-Standard Analysis*, che segna ufficialmente la nascita dell'analisi non-standard.

L'idea di Robinson in fondo è semplice: riprendere il concetto di infinitesimo nella versione di Leibniz, costruire un mondo in cui operare con questi infinitesimi in modo da dedurre i risultati che non è possibile trovare in R. Detto in modo così superficiale però non risulterebbero chiare quali condizioni permettevano al matematico americano di superare il limite e le riserve rappresentate dall'accettazione di un infinitesimo in atto.

Il problema in fondo è sempre quello: esistono gli infinitesimi? In un contesto matematico il concetto di esistenza non è più così chiaramente legato ad un'idea di modello reale, ma a quello di modello logico. Ciò che Robinson aveva a disposizione rispetto al filosofo tedesco erano soprattutto i risultati riguardanti la teoria dei modelli come i teoremi di Skolem relativi ai modelli non-standard del "contare" e, soprattutto, il teorema di compattezza del logico russo A.Malcev (successivamente generalizzato da L.A. Henkin), dedotto a sua volta del teorema di completezza di Gödel.

Il teorema di compattezza può essere espresso in questo modo:

"*Supponiamo di avere un insieme di proposizioni nel linguaggio L e supponiamo che ogni sottoinsieme finito di tali proposizioni sia vero in un universo standard U; esiste allora un universo non-standard U* in cui tutte le proposizioni dell'intera collezione sono simultaneamente vere*".

Vediamo allora come il teorema di compattezza garantisce l'esistenza di infinitesimi.

Si consideri l'insieme (infinito) P di proposizioni:

"ε è un numero maggiore di zero e minore di 1/2"
"ε è un numero maggiore di zero e minore di 1/3"
"ε è un numero maggiore di zero e minore di 1/4"
.
"ε è un numero maggiore di zero e minore di 1/n"
e così via.
Gli elementi di P possono essere scritti con un linguaggio formale del prim'ordine, inoltre se ci si riferisce all'universo (standard) R dei numeri reali, ogni suo sottoinsieme finito è vero poiché nell'intervallo *]0,1/n[* cadrebbero infiniti numeri reali. Tuttavia l'insieme di tutte queste proposizioni risulta falso in R poiché dovrebbe esistere un numero reale positivo ε tale che $0<\varepsilon<1/n$ per ogni n naturale. Per il teorema di compattezza esiste però un universo non-standard (che indicheremo con R*) in cui tutte le proposizioni di P sono vere. In tale insieme esiste allora un ε tale che $0<\varepsilon<1/n$ per ogni n naturale; e questa condizione caratterizza ε come infinitesimo.
Una volta trovato un modello in cui esistono gli infinitesimi, il resto risulta conseguente; in particolare si possono definire gli infiniti (sempre col teorema di Malcev-Henkin; si invita il lettore a farlo come utile esercizio), le operazioni tra elementi non standard e le funzioni definite in R*. Il dubbio che può tuttavia rimanere è come diventa l'insieme dei numeri reali in una versione non-standard, se è possibile cioè darne una rappresentazione analoga all'usuale retta reale. In onore a Leibniz, Robinson introdusse proprio il termine di monade per indicare l'estensione non-standard di un numero reale r. Una monade contiene un solo numero reale r (standard) ed infiniti numeri non-standard ottenuti aggiungendo ad r quantità infinitesime. E' come se ogni numero reale fosse circondato, in R*, da una nube "elettronica" di infiniti infinitesimi, per cui potremmo dire che a livello "macroscopico" r* si confonde con r, mentre a livello "microscopico" i due valori sono distinti.
Il concetto di monade permette, come si è fatto in precedenza parlando di Leibniz, di comprendere meglio il concetto di vicinanza: un numero reale non-standard s appartiene alla monade individuata da un numero reale standard r se la loro differenza è un infinitesimo; quindi due numeri reali non-standard sono infinitamente vicini se appartengono alla stessa monade. In questo modo è possibile esprimere in senso matematico anche il concetto di "trascurabile": si potrebbe dire che all'interno di una monade è trascurabile ciò che non è reale, considerando il numero reale che la caratterizza come l'essenza (per usare una terminologia leibniziana); in generale potremmo generalizzare dicendo che è trascurabile ciò che non è standard (questo ovviamente per gli iperreali finiti).
Riprendiamo come esempio il problema 3) e vediamo come verrebbe risolto nell'analisi non-standard:
preso un infinitesimo positivo ε, si consideri lo spazio relativo all'istante $2+\varepsilon$ (si osservi che $2+\varepsilon$ appartiene alla monade individuata da 2); lo spazio percorso dall'istante $t=2$ all'istante $t1=2+\varepsilon$ è dato da $ds=4\varepsilon+\varepsilon^2$ e quindi il rapporto $\frac{ds}{dt}=\frac{4\varepsilon+\varepsilon^2}{\varepsilon}=4+\varepsilon$ (si osservi come con ε si sia operato in modo algebrico). Il valore $4+\varepsilon$ appartiene alla monade individuata da *4*, cioè la parte standard di $4+\varepsilon$ è *4*. In pratica la velocità istantanea è data dalla parte standard di $4+\varepsilon$ che in genere viene indicata con $st(4+\varepsilon)$.
Com'è facile verificare, questo modo di procedere non è molto dissimile da quello utilizzato da Leibniz e da quello che normalmente usano i fruitori della matematica (fisici, ingegneri, biologi, ecc.); la non trascurabile differenza è che ora, per la prima volta, il metodo infinitesimale è stato reso rigoroso, grazie soprattutto alla logica formale.
Questo modo di procedere presenta il non trascurabile vantaggio di avere una trasposizione didattica estremamente semplice ed intuitiva: tramite essa la definizione di limite non è controvariante, non occorrono infinite verifiche, non è troppo generale nè troppo formalizzata. La monade di un punto appare all'allievo come qualcosa di "visibile ed intuibile" ed anche studenti non particolarmente

attenti studiosi riescono ad afferrare il significato matematico di limite. Tramite l'introduzione dei numeri iperreali, scritture scorrette, ma che gli studenti usano per "vedere" i risultati, tipo $\frac{1}{\infty}=0 \quad \frac{1}{0}=\infty$, assumono un significato preciso e oltremodo corretto: detto H un iperreale infinito, $\frac{1}{H}=\varepsilon$, essendo ε un infinitesimo e così via.

La nostra esperienza didattica è stata molto confortante: l'analisi non standard presenta difficoltà per noi insegnanti, abituati a ragionare in termini ε-δ e con degli stereotipi mentali dovuti ai nostri studi "tradizionali", ma non certo per gli studenti che vedono in essa una quasi naturale trascrizione matematica delle proprie intuizioni.

Non vogliamo proporre qui un trattato di Analisi non-standard; il nostro lavoro di gruppo serve solo ad evidenziare come le nostre scelte didattiche siano state supportate da un consistente retroterra filosofico e matematico. In fondo "nihil novi sub soli": l'analisi non standard è certamente la più antica analisi!

BIBLIOGRAFIA

L'ANALISI NON-STANDARD - M. Davis, R. Hersh - Le Scienze n°49, settembre 1972

DAI GRAFICI AL CONCETTO DI LIMITE ATTRAVERSO L'ANALISI NON STANDARD - M. Michelotti Venè, C. Cervi, M.G. Delfrate, L. Ferraris, A. Maffini, A. Melej - Quaderno n°100 del dipartimento di Matematica, Università di Parma - 1994

ANALISI NON STANDARD: NOZIONI PRELIMINARI - M. Michelotti Venè, C. Cervi, M.G. Delfrate, L. Ferraris, A. Maffini, A. Melej - Quaderno n°150 del dipartimento di Matematica, Università di Parma - 1996

NON-STANDARD ANALYSIS - A. Robinson, North-Holland Publishing Co., 1966

ELEMENTI DI ANALISI MATEMATICA - H.J. Keisler, Piccin Editore, 1982

Michelotti Venè Margherita, Università degli studi di Parma- Facoltà di matematica

Maffini Achille, Liceo Scientifico "G. Falcone"-Asola (MN) a.maffini@libero.it