Achille Maffini

La bellezza degli enti matematici.
Lineamenti di un'estetica della matematica

Anni fa, ancora liceale, mi è capitato di andare a visitare il Musée de l'Homme a Parigi. Con noi, ad accompagnarci, c'era l'insegnante di italiano. Di fronte alle mie esternazioni sul fascino e sull'importanza della scienza (frequentavo il liceo scientifico e vedevo la scienza non solo in modo positivista, ma anche come lo strumento più alto di conoscenza) lei mi disse una cosa che al momento mi lasciò molto irritato e sdegnato: "Per me la scienza ha solo una valenza estetica".

Pensai alla sua ignoranza in materia, malgrado la stimassi molto, ma se quella frase è rimasta è perché, probabilmente, ha continuato a lavorare nella mia testa.

Cosa significa che la scienza ha una valenza estetica? Non ho mai chiesto a questa mia ex insegnante cosa intendesse: si può rimanere esteticamente affascinati dalla bellezza di alcuni strumenti della scienza, come si può rimanerne esteticamente affascinati da alcuni risultati. Per esempio, per un profano che valenza può avere un'affermazione del tipo "a velocità prossime alla velocità della luce il tempo rallenta" se non una valenza estetica?

È pure indubbio che questo non significa che la scienza diventi arte, ma che certi risultati scientifici possano essere visti come "belli".

Durante gli anni ho poi abbandonato lo studio delle scienze per dedicarmi alla matematica (che fatico a chiamare scienza) e qui le cose, sul piano estetico, si sono notevolmente complicate.

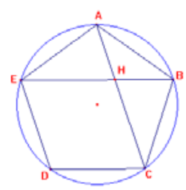
I risultati della scienza spesso sono visibili. Ma quelli della matematica? Cosa significa che un risultato matematico "è bello"? E chi può apprezzare questa bellezza?

Matematica come metalinguaggio estetico

Durante questo Convegno si è ad esempio visto come nell'arte vengano utilizzati concetti matematici: l'esempio della sezione aurea è il più evidente, ma lo stesso uso di trasformazioni (simmetrie, similitudini, ecc.), della teoria delle proporzioni, come gli studi di geometria proiettiva (a proposito della prospettiva) sono stati usati per costruire opere d'arte "belle". In un certo senso la bellezza (soprattutto in determinati periodi artistici) di certe opere era garantita dalla loro aderenza a canoni matematici particolari. In un certo senso la matematica diventava il metalinguaggio in cui poter dare la valutazione semantica del coglimento estetico dell'oggetto ARTE. In sostanza, rispetto a quest'ottica, si farebbe nell'arte, relativamente alla matematica, ciò che più o meno esplicitamente si fa con altre discipline; quando ad esempio si dice di qualcosa "è matematico" oppure, come diceva Galileo, "la natura è un libro scritto con linguaggio matematico", non si fa altro che utilizzare la matematica come garanzia.

Riprendiamo il discorso sull'arte e in particolare quello relativo alla sezione aurea: secondo i canoni classici un'opera d'arte era "bella" se era costruita secondo rapporti aurei. Ma questo significa che la sezione aurea (come rapporto tra lunghezze) è bella? Dal punto di vista di una potenziale estetica matematica, cosa rende un rapporto aureo "più bello" di altri rapporti? Ovviamente nulla, se non il notare una sua curiosa presenza (questa sì più diffusa) in natura rispetto ad altri rapporti o (e questo aspetto è decisamente più matematico) alcune sue notevoli proprietà (tra le quali, per esempio, quelle sintetizzate nel Teorema del pentagono regolare di Euclide – prop. XIII, 8[1]). Frate Luca Pacioli chiamò "divina" questa proporzione, esaltandola come "essenziale,

[1] "In un pentagono equilatero ed equiangolo le rette che sottendono due angoli consecutivi si dividono tra loro in estrema e media ragione e le loro parti maggiori sono uguali al lato del pentagono."
Relativamente alla figura a fianco, gli angoli consecutivi sono EAB e ABC sottesi ai segmenti rispettivamente EB ed AC. Il teorema afferma che EH è medio proporzionale tra EB e HB, cioè EB:EH=EH:HB. Inoltre EH è uguale al lato del pentagono.
Un altro modo di leggere il teorema e che ne giustifica l'interesse, è il seguente: il lato del pentagono regolare è uguale alla sezione aurea di una sua diagonale.



ineffabile, singulare, innominabile, mirabile, inestimabile…”; Keplero la considerava “un prezioso gioiello” e “sectio divina”, dichiarando come “…fosse l’idea del Creatore per ricavare la generazione del simile dal simile, cioè la generazione del perenne”. In sostanza in queste dichiarazioni c’è un’idea forte di armonia vista alla base di un’armonia complessiva dell’Universo. La matematica è vista quindi come l’intelaiatura, lo scheletro su cui è costruita la natura e l’Universo in genere. Il bello dell’arte che si identifica con la sezione aurea è come se riconoscesse questa matrice e si rifacesse a questa. Siamo sempre quindi nell’ottica della matematica come garanzia di bellezza.

Ma in generale, esistono dei canoni estetici interni alla matematica che giudichino la bellezza degli oggetti (o dei risultati) matematici?

Credo si possano dare più risposte a questa domanda; quello che può essere importante è vederle in ottica di alternative e porre le basi per un’analisi critica dell’estetica matematica.

Una prima risposta può essere di tipo semantico. Il concetto di bello, così come quello di vero, sono legati ad un metalinguaggio in cui poter dare una risposta al problema. Tale metalinguaggio è ovviamente esterno al contesto. Se allora in certi casi la matematica funge da metalinguaggio per il giudizio (estetico) di un’opera d’arte, risulta non possibile giudicare all’interno della matematica la sua bellezza: servirebbe un metalinguaggio superiore e quindi un altro “mondo” in cui vedere interpretati gli oggetti matematici. Questo mondo potrebbe essere la natura, se la matematica, in un qualche modo fosse “naturale”, questione tuttora dibattuta in merito alla realtà degli oggetti matematici. In questo senso si potrebbe azzardare una forma di teorema di Gödel all’interno della matematica: una disciplina non può introdurre al suo interno dei canoni di bellezza.

Questo pseudo teorema giustificherebbe anche l’aspetto storico-culturale del concetto di bellezza: un quadro impressionista non è bello di per sé (un artista potrebbe dipingerne uno anche oggi con la stessa tecnica), ma è bello (inteso come: è opera d’arte) pensando anche al contesto in cui è stato dipinto e cosa rappresentava di quel contesto.

La bellezza nella matematica: cosa è “matematicamente bello” e perché?

Una risposta di questo tipo chiuderebbe il discorso a monte: non esiste una bellezza nella matematica, o meglio la matematica non può dire di alcuni suoi risultati che sono belli.

Invece i matematici lo fanno: nel libro *La serva padrona* ([BB] in bibliografia) gli autori (soprattutto il matematico Bottazzini) fanno largo uso del termine “bello” legato a risultati matematici. Ad esempio viene definita bella (da molti matematici) l’uguaglianza $e^{\pi i}+1=0$, la teoria delle funzioni di variabile complessa (“una delle più belle costruzioni della matematica”), a pag. 118 si parla della matematica come una “…costruzione intellettuale di grande complessità e bellezza…”, a pag. 136 si parla “…dell’interesse e della bellezza della geometria…”, a pag. 171 si ricorda che “…un argomento ricorrente quando si parla di bellezza è la simmetria….”

Credo sia difficile, per un profano, apprezzare la “bellezza” degli argomenti citati. Mai, come in questo caso, vale l’affermazione “La bellezza è difficile”, nel senso che mai come nel caso della matematica, il concetto di bello è così strettamente legato ad un aspetto culturale[2].

Ma questo non risolve la questione: perché l’uguaglianza $e^{\pi i}+1=0$ “è bella”? La riposta risiede indubbiamente nell’aspetto sorprendente che lega quattro numeri (e, π, i, 1) nati in contesti completamenti diversi e con finalità diverse in un’unica proposizione. E questo può sembrare un criterio di bellezza per un risultato matematico: risultati unificanti o che permettono il legame tra concetti nati per risolvere problemi completamente diversi tra loro.

Poi ci sono i “teoremi generatori”, belli non solo in sé, ma per quanto hanno generato. L’esempio più famoso è l’ultimo teorema di Fermat[3] che, nel libro di Singer [Si], viene descritto

[2] I termini “bello” e “bellezza” hanno una forte valenza anche in [Ha], in cui l’autore, il matematico inglese G.H. Hardy (1887-1966), sostiene come sia “..senza dubbio difficile definire la bellezza matematica, ma questo è altrettanto vero per qualsiasi genere di bellezza”. (pag. 67).

con molta enfasi come il più bel teorema della matematica. L'affermazione è senza dubbio eccessiva, ma l'importanza del teorema sta essenzialmente nel tipo di risultati che sono stati prodotti nel tentativo di dimostrarlo.

L'ultimo teorema di Fermat ha inoltre un pregio che spesso in matematica viene riconosciuto come criterio di bellezza: ha una formulazione semplice, ma coinvolge aspetti come le proprietà dei numeri naturali che hanno sempre affascinato i matematici, inserendosi del resto nella ricerca delle soluzioni di un'equazione diofantea (e quindi ricollegandosi alla tradizione greca).

In precedenza è scappato il termine "importanza"; ed è facile confondere, in senso matematico, "importanza" con "bellezza".

Tempo fa la rivista dell'associazione matematica Mathesis ha indetto un sondaggio tra i suoi soci per indicare il teorema "più bello" in occasione del 2000, dichiarato anno internazionale della matematica. I soci, docenti di matematica di vari ordini di scuola, erano invitati ad indicare quale secondo loro fosse il più bel teorema di matematica, relativo ad una specifica area disciplinare. Ogni proponente era invitato a fornire una breve motivazione della scelta fatta.

Tra i teoremi finalisti citerei (tra parentesi il suo autore): (1) Teorema fondamentale dell'algebra (Gauss), (2) Formula di Eulero $e^{x+iy}=e^x(\cos y+i\bullet \operatorname{sen} y)$, da cui la citata $e^{\pi i}+1=0$ (Eulero), (3) Legge del coseno in geometria sferica (Carnet e Delarmbre), (4) Distribuzione dei numeri primi (Hadamar e De la Vallé-Puossin), (5) Incommensurabilità tra segmenti (Scuola Pitagorica), (6) Non numerabilità di R (Cantor), (7) Teorema del Minimax (Von Neumann), (8) Infinità dei numeri primi (Euclide), (9) Teorema fondamentale del calcolo integrale (Torricelli-Barrow), (10) Teorema di equivalenza di Lax (Lax).

L'elenco precedente ha solo valenza illustrativa e deve essere visto come un esempio di "campionario" di ciò che gli addetti ai lavori intendono per bello. Più interessanti, ovviamente, sono le motivazioni. Ce ne sono alcune che fanno riferimento alle notevoli applicazioni dei risultati in questione (è il caso per esempio di 3, 4), al loro essere fondanti per specifiche branche della matematica (ad esempio 1, 5, 6, 7, 8, 10), alla loro "eleganza" (il già citato 2), oppure alla sua capacità di stabilire relazioni significative tra idee diverse della matematica (è il caso di 9).

Credo che in questa seppur riduttiva panoramica si intravedano alcune idee di ciò che è ritenuto bello dai matematici. Intanto si parla generalmente di teoremi, cioè di risultati che esprimono a livello "macro" proprietà di oggetti della teoria oppure "scorciatoie" sul piano applicativo. Inoltre, per lo più, questi teoremi sono "fondanti" nel senso che sono al contempo risultato di sintesi di un certo percorso e punto di partenza per l'analisi di nuove proprietà o per nuovi percorsi. Tra quelli citati, si pensi ad esempio al ruolo rivestito a livello filosofico e matematico dal (5).

Una citazione a parte la riserverei per il (9) a cui scappa anche a me di presentarlo ai miei studenti come un "bel teorema". Forse perché l'ho sentito come tale da studente liceale (non grazie al mio insegnante, il quale non si era minimamente posto il problema della sua valenza estetica!), ma sta di fatto che è un teorema che esprime l'affascinante legame tra due concetti nati in contesti e con finalità diverse tra loro, ma che trovano, in questo teorema, fondamentali punti di congiunzione. È questo legame che affascina, che stupisce; ed è in questo stupore che si riconosce una condizione estetica.

È paragonabile allo stupore dovuto alla bellezza di un'opera d'arte? All'artista vengono riconosciute "doti" che in genere non vengono viste nel matematico. Al matematico soprattutto non viene riconosciuta la creatività e l'originalità. Se in effetti i teoremi di una teoria non sono altro che modi di rendere espliciti condizioni e proprietà già implicitamente presenti nel sistema assiomatico

---

[3] Pierre Fermat, letterato e giurista francese del XVII è forse il più famoso matematico dilettante. Era solito scrivere le sue osservazioni o i suoi risultati sui margini dei libri che leggeva. Nel 1637, a margine al libro "Diofanto" di Bachet a proposito delle soluzioni razionali dell'equazione $x^2+y^2=a^2$, scrisse "è impossibile dividere un cubo in due cubi, una quarta potenza in due quarte potenze o, in generale, una potenza qualunque di grado maggiore di due, in due potenze dello stesso grado [detto in termini formali, per ogni $n>2$ non esistono terne di numeri naturali (x,y,z) che verifichino l'equazione $x^n+y^n=z^n$]; ho scoperto una dimostrazione veramente bella che questo margine è troppo piccolo per contenere". Il teorema di Fermat fu dimostrato nel 1994 dal matematico A. Wiles ed è di circa 200 pagine. Si dubita che la "bella dimostrazione" di Fermat fosse corretta…..

preso a fondamento, di creativo sembra esserci veramente poco; e questo indipendentemente dal fatto che si abbia della matematica una concezione platonica (la matematica esiste in sé; il matematico la "mostra") oppure "umana" (la matematica è una costruzione, una creazione dell'uomo). Tutt'al più si potrebbe parlare di scoperta. Ma questa visione è banalmente riduttiva. Sarebbe come dire che, una volta scelto l'alfabeto italiano e la lingua italiana, la Divina Commedia, non essendo altro che una combinazione di simboli del linguaggio scelto era "già scritta" e Dante l'ha solo "scoperta". Ciò che invece è radicalmente diverso è la motivazione che porta alla produzione di un teorema piuttosto che ad un'opera d'arte letteraria o artistica che sia. Chi ha fatto ricerca matematica sa che gli enunciati nascono prima dei teoremi; la dimostrazione di un enunciato è un passo successivo all'esigenza che quell'enunciato sia un teorema. La cosa che ci si dice spesso è "sarebbe bello che questo fosse un teorema". "Sarebbe bello che…"; mentre nelle arti il concetto di bello è a posteriori (si vede l'opera e la si giudica bella), in matematica sembra essere a priori ("sarebbe una bella opera se ci fosse questo risultato") ed il tentativo è quello di far diventare attuale quella bellezza potenziale, attraverso la dimostrazione. L'esigenza estetica diventa una delle condizioni che spinge la ricerca.

In quest'ottica il concetto di bello è puramente razionale e legato alla linearità ed alla consistenza dell'edificio che si va costruendo; ma in fondo la bellezza (contrapposta spesso al piacere, avente valenza istintiva; il fatto poi che la bellezza generi piacere in chi la sa cogliere è una naturale conseguenza dei canoni su cui è costruita) non è, in tutte le sue forme, legata alla componente razionale dell'uomo? In questo senso non è strano, allora, che la matematica sia utilizzata spesso (nell'arte, nella letteratura, nella musica) come "garante" di bellezza. Come non è strano che al suo interno alcuni risultati siano visti come belli e che, in quanto tali, suscitino ammirazione, commozione e piacere.

La bellezza nel processo matematico

A volte il concetto di bellezza viene riferito non tanto al risultato, quanto piuttosto a come si è ottenuto; per cui ad esempio non si parla tanto di bel teorema, ma di bella o elegante dimostrazione. Qui il concetto estetico diventa pesantemente interno: in un certo senso c'è la sottile ed impercettibile bellezza della deduzione logica, la stessa che si riscontra nel gioco degli scacchi nel caso di particolari sequenze che portano allo scacco matto. Si ritorna così ad uno degli argomenti proposti da Bottazzini: la logica deduttiva come parametro di bellezza. Come ricordato in precedenza, una materializzazione di questo aspetto lo si può ritrovare in alcuni giochi in cui brillanti combinazioni che portano ala vittoria (come negli scacchi, nel bridge, nella dama, nel go, ecc.) vengono definite belle. In questo caso non è il risultato, ma il modo di raggiungerlo che ha valenza estetica. Riportando il tutto ad un discorso matematico, non è tanto (o solo) il teorema che è bello, ma anche (e soprattutto) la sua dimostrazione. Cosa rende bella una dimostrazione? Tanti fattori, potenzialmente: l'eleganza, l'economicità[4], la creazione, attraverso la tipologia di dimostrazione proposta, di uno strumento dimostrativo prima inesistente (è quanto è avvenuto, per esempio con il forcing, metodo dimostrativo con cui Cohen ha dimostrato negli anni '60 del secolo scorso l'indipendenza dell'ipotesi del continuo dagli altri assiomi della teoria degli insiemi ZF).

Non sono concetti facilmente ed universalmente definibili; ad esempio con eleganza ci si può riferire allo stile della dimostrazione, così come ci si può riferire ad un romanzo.

Un esempio di dimostrazione bella (nel senso di elegante ed economica) è quella riportata nel Libro VI degli Elementi di Euclide del teorema di Pitagora.

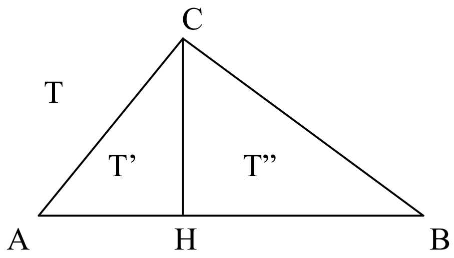
[4] In [Ha], pag. 83-84, vengono citati dall'autore i teoremi (5) e (8) del paragrafo precedente come esempi di "veri" teoremi, tale cioè da distinguere i risultati della matematica da una partita di scacchi. Sono significativi i termini che Hardy usa: "Nei due teoremi (e nei teoremi includo naturalmente la dimostrazione) c'è un grado alto di *imprevedibilità*, combinata con *l'inevitabilità* e *l'economia*. Gli argomenti assumono una forma strana e sorprendente; le armi impiegate sembrano di una semplicità infantile al confronto della portata dei risultati ottenuti; ma non c'è scampo dalle conclusioni".

Il teorema di Pitagora è uno dei teoremi più noti della geometria euclidea anche per chi ha nozioni di matematica elementari. Nella formulazione tradizionale (Dato un triangolo rettangolo, la somma delle aree dei quadrati costruiti sui cateti è uguale all'area del quadrato costruito sull'ipotenusa) è un teorema "normale" nel senso che esprime una proprietà (caratteristica) dei triangoli rettangoli.

Una formulazione alternativa (e più generale) è la proposizione 31 del Libro VI di [E] (citata da qualcuno anche nel concorso della Mathesis):

Nei triangoli rettangoli la figura descritta sul lato opposto all'angolo retto è uguale alla somma delle figure simili e similmente descritte sui lati che comprendono l'angolo retto.[5]

Indicato con T un generico triangolo rettangolo, la dimostrazione di tale teorema è particolarmente "elegante" nel caso si considerino i triangoli rettangoli (T' e T") in cui l'altezza [CH] relativa all'ipotenusa [AB] divide il triangolo T (vedi figura). T' e T" sono simili a T e la condizione sulle aree è banalmente verificata.



L'algebrista Bouligand in [B]cita questa dimostrazione a proposito delle *dimostrazioni causali*: "Molti teoremi sono suscettibili di dimostrazioni differenti. Le più educative sono naturalmente quelle che fanno comprendere le ragioni profonde dei risultati che si propone di stabilire. In analogo argomento la nozione di *dominio di causalità* fornisce una guida. La dimostrazione naturale di una proposizione deve comprendere tutti i casi in cui essa sia vera[6]. E inversamente, considerando sistematicamente tutti questi casi, si verrà condotti a liberare il teorema da ogni supposizione accessoria; ci si troverà allora, di colpo, nelle condizioni migliori per poter effettuare il ragionamento ."

Credo che questo tipo di considerazione possano essere utilizzate non solo per esprimere un carattere educativo su una particolare dimostrazione, ma anche, con la dovuta attenzione, un criterio estetico.

Bellezza e inquietudine: uno strano connubio

Tra i teoremi per il concorso di Mathesis, qualcuno (un logico…) ha indicato il teorema di incompletezza di Gödel, già citato in precedenza. Il teorema di incompletezza è un bel teorema? Forse qualcuno sarebbe più disposto a definirlo un teorema inquietante. Cosa c'è di inquietante nel teorema di Gödel? Toglie certezze alla disciplina ritenuta "delle certezze". Cosa c'è di bello in tutto ciò, se sembra proprio andare nella direzione opposta del dare "un senso" alla matematica? Intanto il teorema di incompletezza è "figlio del suo tempo": nasce nel 1932, in un contesto come quello europeo in preda ad una profonda caduta di certezze in tutti i campi (politico, letterario, artistico, scientifico, economico). Dal punto di vista matematico, quindi, nessun teorema come quello di incompletezza è più in sintonia col suo tempo e meglio lo descrive. Questo basta per essere considerato bello? Ovviamente no; del resto bello non è solo ciò che genera piacere, ma anche e soprattutto ciò che suscita sensazioni forti, rispetto all'essere ed al sentire. L'inquietudine è uno di

[5] Detto in altri termini, l'area di una figura F costruita sull'ipotenusa di un triangolo rettangolo è uguale alla somma delle aree di figure simili ad F costruite sui cateti dello stesso triangolo.

[6] Nel periodo in cui Bouligand scriveva non si faceva probabilmente così attenzione alla distinzione tra semantica e sintassi; è in questo senso che si può scusare l'uso del termine "vero" riferito ad una dimostrazione.

questi stati d'animo; le opere di artisti come Van Gogh, Munch, Schiele, lo stesso Picasso o di scrittori come Beckett, Dostoevskij o Baudelaire ne sono una significativa testimonianza.

In questa stessa direzione di lacerante inquietudine e messa in crisi delle certezze non possono non essere citate le geometrie non euclidee "esplose" nel XIX secolo. Nel caso specifico la bellezza è più nel percorso all'insegna di un'idea di libertà (come sostiene Toth in [T]) che fa parte della natura dell'uomo che in un risultato in sé. Le geometrie non euclidee diventano non tanto l'equivalente di "un'opera d'arte", ma di un "movimento", la cui significativa importanza risiede nel cambiamento di prospettiva e di mentalità nella cultura del tempo; si fornisce la possibilità di "nuovi mondi" con cui la realtà, necessariamente, si deve confrontare. Secondo Toth, ad esempio, senza le geometrie non euclidee non ci sarebbe stata l'arte astratta del novecento. Qui non siamo di fronte, come nel caso della sezione aurea, ad un concetto matematico che giustifica il concetto di bello di un'opera d'arte, ma ad una costruzione matematica che favorisce lo sviluppo di correnti artistiche. La matematica apre strade culturali, come in altri periodi storici hanno fatto movimenti letterari, filosofici o artistici.

Conclusioni

Quella presentata non è che una possibile panoramica di ciò che la matematica propone a se stessa e a chi ci lavora come "bello". Ovviamente non è né esaustiva né assoluta; soprattutto non vuole essere un fondamento per l'estetica matematica, ma solo un invito alla riflessione che, in ogni caso, non si può prescindere dall'idea che la matematica, come sostiene [H], si muove in un contesto socio-culturale. Come per le altre arti, è questo contesto che ne motiva la valenza estetica; e come per altre arti, anche per la matematica si può apprezzarne la bellezza se la si conosce e si conoscono a fondo le implicazioni e le conseguenze dei suoi risultati.

Forse qualcuno avrà notato che in precedenza ho rapportato la matematica alle arti e non alle scienze, come normalmente si fa. Di cosa sarebbe "arte" la matematica? Dare una risposta a questa domanda significherebbe addentrarsi in considerazioni legate alla natura degli oggetti matematici e più in generale a cosa sia la matematica. Su questi argomenti c'è un'ampia e qualificata letteratura e in ogni caso non è questo il contesto in cui parlarne. Lascio che ognuno dia una sua risposta, magari di dissenso sullo stesso uso del termine.

Mi limiterò a citare due posizioni relative "all'arte" del matematico e alla natura degli enti matematici.

Hardy in [Ha] sostiene che "Il matematico, come il pittore e il poeta, è un creatore di forme. Se le forme che crea sono più durature delle loro è perché le sue sono fatte di idee. […] Le forme create dal matematico, come quelle create dal pittore o dal poeta, devono essere *belle*; le idee, come i colori o le parole, devono legarsi armoniosamente." (pag. 66-67)

Rispetto alla natura degli enti matematici, invece, può essere opportuno citare l'originale posizione di Chihara in [C], secondo cui gli enti matematici sono in larga misura analoghi ai personaggi mitologici. Quindi (inutili) costruzioni dell'immaginazione umana? Se sul concetto di *costruzione*, considerando gli enti matematici in quest'ottica, non vi sono dubbi, sul concetto di *inutile* si potrebbe invece rispondere come si risponderebbe a qualcuno che ritenesse inutili gli dei dell'Olimpo semplicemente perché non esistono: l'averli immaginati ha permesso di produrre opere che hanno detto molto dell'uomo e dato molto alla crescita culturale dell'umanità. In sostanza hanno permesso di produrre cose "belle".

Nel caso della matematica però risulta più evidente ciò che in altre arti emerge in maniera più sfumata: non ci si può appellare alla bellezza che colpisce i sensi, ma occorre fare riferimento a quella che colpisce l'intelligenza. Questo toglie alla bellezza l'ambiguo alibi della bellezza sensibile (e soggettiva) per porre in modo inderogabile il problema del fondamento di una bellezza oggettiva, che faccia appello all'intelligenza. La conoscenza diventa condizione necessaria (ma non sufficiente…) per percepirla in quanto questa percezione coinvolge aspetti, soprattutto sul

piano formale e linguistico, molto specifici a cui risulterebbe difficile, in caso contrario, attribuire "un senso".
A fianco della vista, dell'udito o, se vogliamo, del senso poetico, l'intelligenza si pone come ulteriore strumento per percepire la bellezza, a condizione però che sia, anch'essa, opportunamente educata. E la matematica, in questa prospettiva, figurerebbe come una delle arti dell'uso della ragione.

BIBLIOGRAFIA

[B] G. Bouligand, *Premières leçons sur la théorie générale des rroupes*, Vuibert, Paris, 1935
[BB] E. Boncinelli, U. Bottazzini, *La serva padrona,* Raffaele Cortina Editore, 2000
[BDD] P. Bellingeri, M. Dedò, S. Di Sieno, C. Turrini, *Il ritmo delle forme,* Mimesis, 2001
[BP] M. Borga, D. Palladino, *Oltre il mito della crisi*, La Scuola, 1997
[C] A. Chihara, *Constructibility and Mathematical Existence,* Clarendon Press, 1990
[CC] J.P. Changeux, A. Connes, *Pensiero e materia*, Bollati Boringhieri, 1991
[D] E. De Caro, *Le cose belle sono difficili,* Il Melograno, 2001
[E] Euclide, *Gli Elementi*, a cura di A. Fraiese e L. Maccioni, UTET, 1970
[G] E. Giusti, *Ipotesi sulla natura degli oggetti matematici*, Bollati Boringhieri, 1999
[H] R. Hersh, *Cos'è davvero la matematica*, Baldini & Castoldi, 2001
[Ha] Godfrey Harold Hardy, *Apologia di un Matematico*, Garzanti, 2002
[L] G. Lolli, *Incompletezza,* Il Mulino, 1992
[Si] S. Singer, *Il teorema di Fermat*, Rizzoli, 1999
[S] C.J. Snijders, *La sezione aurea*, Franco Muzzio, 1993
[T] I. Toth, *Aristotele e i fondamenti assiomatici della geometria*, Vita e Pensiero, 1997