Corso di Analisi Matematica per Ingegneria Meccanica (A-P)

Modulo II

A.A. 2010-2011 Appello 8/07/2011 Traccia A

Cognome .... Nome .... Matr. ....

1) Sia $A \subset \mathbf{R}^N$ un insieme aperto e $f : A \to \mathbf{R}$. Dire quali implicazioni sussistono tra le seguenti affermazioni.

1. $f \in C^1(A)$.
2. $\forall x \in A, \forall v \in \mathbf{R}^N \;\; \exists \frac{\partial f}{\partial v}(x)$.
3. $\forall x \in A, \forall v \in \mathbf{R}^N : \;\; \lim_{t \to 0} f(x + tv) = f(x)$.

Motivare le risposte.

....

....

....

....

2) Dato l'insieme

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + z^2 < 4;\; 1 < y < 6\},$$

determinare l'insieme dei punti di accumulazione, i punti isolati, la chiusura $\overline{A}$, la frontiera ∂A di A in $\mathbf{R}^3$.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

3)

Determinare i punti stazionari della funzione

$$f(x,y) = y^2(x^2 + y^2 - 4x + 3)$$

e studiarne la natura.
(Svolgere l'esercizio su un foglio a parte)

4)

Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''' - y'' = x - \cos x \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \\ y''(0) = 0 \end{cases}$$

(Svolgere l'esercizio su un foglio a parte)

5)

Calcolare il seguente integrale doppio

$$\iint_D \frac{y^2 \arctan\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dxdy$$

dove $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : \ y \geq \sqrt{3}x, \ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 3, \ x \geq 0\}$.
(Svolgere l'esercizio su un foglio a parte)

Corso di Analisi Matematica per Ingegneria Meccanica (A-P)

Modulo II

A.A. 2010-2011 Appello 8/07/2011 Traccia B

Cognome . . . . Nome . . . . Matr. . . . .

1) Sia $A \subset \mathbf{R}^N$ un insieme aperto e $f : A \to \mathbf{R}$. Dire quali implicazioni sussistono tra le seguenti affermazioni.

1. $\forall x \in A \ \exists \nabla f(x)$.
2. $\forall x \in A, \forall v \in \mathbf{R}^N \ \ \exists \frac{\partial f}{\partial v}(x)$.
3. $\forall x \in A, \forall i = 1, \ldots, N \ \ \exists \frac{\partial f}{\partial x^i}(x)$.

.

Motivare le risposte.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

2) Dato l'insieme

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid 1 \leq x \leq 2;\ y \geq 0;\ x = z\},$$

determinare l'insieme dei punti di accumulazione, i punti isolati, la chiusura $\overline{A}$, la frontiera ∂A di A in $\mathbf{R}^3$.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

3)

Determinare i punti stazionari della funzione

$$f(x,y) = x^2(x^2 + y^2 - 4y + 3)$$

e studiarne la natura.
(Svolgere l'esercizio su un foglio a parte)

4)

Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''' + y'' = x + \sin x \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \\ y''(0) = 0 \end{cases}$$

(Svolgere l'esercizio su un foglio a parte)

5)

Calcolare il seguente integrale doppio

$$\iint_D \frac{x^2 \arctan \sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dxdy$$

dove $D = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : \ y \geq \frac{1}{\sqrt{3}}x, \ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 3, \ x \geq 0\right\}$.
(Svolgere l'esercizio su un foglio a parte)

Corso di Analisi Matematica per Ingegneria Meccanica (A-P)

Modulo II

A.A. 2010-2011 Appello 21/07/2011 Traccia A

Cognome .... Nome .... Matr. ....

1) Sia $A \subset \mathbf{R}^N$ un insieme aperto e $f \in C^2(A)$. Posto $F(x) = \nabla f(x)$ e $Hf(x) = D^2 f(x)$, dire quali delle seguenti affermazioni risultano vere e quali false.

1. $\nabla \wedge F = 0$.
2. $L(F, \Gamma) = 0 \;\; \forall$ curva chiusa $\Gamma \subset A$.
3. $Hf(x) \cdot W = 0 \; \forall x \in A$, $\forall$ matrice simmetrica W.

Motivare le risposte.

....

....

....

....

2) Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione continua tale che $f(x) \geq 0 \;\; \forall x \in \mathbf{R}$ e sia $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt \;\; \forall x \geq x_0$. Discutere, al variare di $k \in \mathbf{R}$, esistenza e molteplicitá delle soluzioni dell'equazione $F(x) = k$.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

3)

Determinare i punti stazionari della funzione

$$f(x, y) = x^2 y e^{-x-y}$$

e studiarne la natura.
(Svolgere l'esercizio su un foglio a parte)

4)

Determinare l'integrale generale della seguente equazione differenziale

$$y'' + 9y = 2\cos 3x - \sin 3x$$

(Svolgere l'esercizio su un foglio a parte)

5)

Assegnato il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y) = \left(\frac{x}{\sqrt{y + x^2}} - 1, \frac{1}{2\sqrt{y + x^2}} + \frac{2y}{(1 + y^2)^2} \right)$$

stabilire se è conservativo e, in caso affermativo, determinarne un potenziale.
Calcolare il lavoro $\mathcal{L}(\mathbf{F}, \gamma)$ fatto da $\mathbf{F}$ lungo la curva

$$\gamma : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2$$

definita da $\gamma(t) = (2 + \cos t, \sin t)$.
(Svolgere l'esercizio su un foglio a parte)

Corso di Analisi Matematica per Ingegneria Meccanica (A-P)

Modulo II

A.A. 2010-2011 Appello 21/07/2011 Traccia B

Cognome .... Nome .... Matr. ....

1) Sia $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ una funzione continua. Dire quali delle seguenti affermazioni risultano vere e quali false.

1. $\forall z \in (a,b)\ \exists\, y_z$ tale che $(z-a)|f(y_z)| \leq \int_a^z |f(x)|dx$.
2. $\forall z \in (a,b)\ \exists\, y_z$ tale che $(z-a)|f(y_z)| \geq \int_a^z |f(x)|dx$.
3. $\exists\, z \in (a,b)$ tale che $f(z) = |b-a|^{-1} \int_a^b f(x)dx$.

Motivare le risposte.

....

....

....

....

2) Sia $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ definita da $F(x,y) = (g(x)+y, x+y)$. Scrivere condizioni sulla funzione $x \mapsto g(x)$ sufficienti a garantire l'invertibilitá locale di F in un punto assegnato $(\bar{x},\bar{y}) \in \mathbf{R}^2$.

....

. . . .

. . . .

. . . .

3)

Determinare i punti stazionari della funzione

$$f(x,y) = xy^2 e^{-x-y}$$

e studiarne la natura.
(Svolgere l'esercizio su un foglio a parte)

4)

Determinare l'integrale generale della seguente equazione differenziale

$$y'' + 4y = \cos 2x - 3\sin 2x$$

(Svolgere l'esercizio su un foglio a parte)

5)

Assegnato il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x,y) = \left(-\frac{x}{\sqrt{y-x^2}} - \frac{2x}{(1+x^2)^2}, \frac{1}{2\sqrt{y-x^2}} - 1 \right)$$

stabilire se è conservativo e, in caso affermativo, determinarne un potenziale.
Calcolare il lavoro $\mathcal{L}(\mathbf{F},\gamma)$ fatto da $\mathbf{F}$ lungo la curva

$$\gamma : [-\frac{\pi}{2}, 0] \to \mathbb{R}^2$$

definita da $\gamma(t) = (\cos t, 2 + \sin t)$.
(Svolgere l'esercizio su un foglio a parte)