A **A**

Politecnico di Bari - Corso di Laurea in Ingegneria Civile
Esonero Analisi Matematica I, A.A. 2009/10
Appello Analisi Matematica, A.A. 2008/09
27 Novembre 2009, Traccia A

Cognome .... Nome .... N. matricola ....

ESONERO: Es. 1, 2, 3; MODULO I: Es. 2, 3, 4.

Esercizio 1. Sia dato l'insieme $A = \{x \in \mathbf{R} \mid \frac{e^{x^2}-3}{\log_{\frac{1}{4}} x} < 0\}$. Dire se A è aperto, chiuso, limitato. Determinare inoltre l'insieme dei punti di accumulazione di A in $\mathbf{R}$.

Esercizio 2. Sia A un sottoinsieme limitato di $\mathbf{R}$. Sia $f : A \to \mathbf{R}$ una funzione continua. Dire quali affermazioni risultano vere:

1. f ammette un prolungamento continuo su $\mathbf{R}$;
2. $f(A)$ è limitato;
3. f è uniformemente continua;
4. f ammette minimo e massimo.

Dire quali implicazioni sussistono tra le precedenti affermazioni.

Esercizio 3. Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{se } x \in [0, \frac{1}{2}] \\ ax + b & \text{se } x \in]\frac{1}{2}, 1], \end{cases}$$

dire se esistono $a, b \in \mathbf{R}$ tali che f risulti continua in $[0, 1]$ e, in caso affermativo, determinare la relazione che lega a e b.

Esercizio 4. Studiare la seguente funzione

$$f(x) = \cos^3(x) + \sin^2(x)$$

e disegnarne il grafico. (Svolgere l'esercizio su un foglio a parte).

A **A**

MODULO II

Esercizio 5. Dati $a, b \in \mathbf{R}$, si consideri la funzione

$$f(x,y) = ax^2 + x + \frac{y-b}{y^2}$$

Trovare per quale valore dei parametri a, b il punto di coordinate $(1,1)$ è critico. Stabilire infine la natura del punto $(1,1)$ per i valori di a, b trovati.

Esercizio 6. Sia φ la curva espressa parametricamente da

$$\varphi(t) = \left(t + t^2, t + \frac{1}{t}\right),$$

per $t \in [1,2]$. Calcolare il lavoro compiuto dal campo $F(x,y) = (x^2y, -xy^2)$ lungo la curva φ.

Esercizio 7. Si consideri il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = |x(t)|^{\frac{1}{3}} \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

Indicare quali delle seguenti funzioni (definite su tutto $\mathbf{R}$) sono soluzione di tale problema, giustificando la risposta.

$$x_1(t) = 0,$$

$$x_2(t) = \begin{cases} \left(\frac{2}{3}t\right)^{\frac{3}{2}} & t \geq 0 \\ -\left(-\frac{2}{3}t\right)^{\frac{3}{2}} & t < 0, \end{cases}$$

$$x_3(t) = \left(\frac{2}{3}\left|t + \frac{3}{2}\right|\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$x_4(t) = \begin{cases} \left(\frac{2}{3}t\right)^{\frac{3}{2}} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0, \end{cases}$$

$$x_5(t) = t^2 - t,$$

$$x_6(t) = \begin{cases} -\left(-\frac{2}{3}t\right)^{\frac{3}{2}} & t < 0 \\ 0 & 0 \leq t < 1 \\ \left(\frac{2}{3}(t-1)\right)^{\frac{3}{2}} & t \geq 1. \end{cases}$$

B **B**

Politecnico di Bari - Corso di Laurea in Ingegneria Civile
Esonero Analisi Matematica I, A.A. 2009/10
Appello Analisi Matematica, A.A. 2008/09
27 Novembre 2009, Traccia B

Cognome .... Nome .... N. matricola ....

ESONERO: Es. 1, 2, 3; MODULO I: Es. 2, 3, 4.

Esercizio 1. Sia dato l'insieme $A = \{x \in \mathbf{R} \mid \frac{e^{x^2}-4}{\log_{\frac{1}{5}} x} \geq 0\}$. Dire se A è aperto, chiuso, limitato. Determinare inoltre l'insieme dei punti di accumulazione di A in $\mathbf{R}$.

Esercizio 2. Sia A un sottoinsieme limitato di $\mathbf{R}$. Sia $f : A \to \mathbf{R}$ una funzione continua. Dire quali affermazioni risultano vere:

1. $\forall x_0 \in A, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \ : \ |x - x_0| < \delta, x \in A \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$;
2. $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \ : \ x, y \in A, |x - y| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$;
3. f ammette un prolungamento continuo su $\mathbf{R}$;
4. f ammette minimo e massimo.

Dire quali implicazioni sussistono tra le precedenti affermazioni.

Esercizio 3. Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{se } x \in [0, \frac{1}{2}] \\ ax^2 + bx & \text{se } x \in]\frac{1}{2}, 1], \end{cases}$$

dire se esistono $a, b \in \mathbf{R}$ tali che f risulti continua in $[0, 1]$ e, in caso affermativo, determinare la relazione che lega a e b.

Esercizio 4. Studiare la seguente funzione

$$f(x) = \sin^3(x) + \cos^2(x)$$

e disegnarne il grafico. (Svolgere l'esercizio su un foglio a parte).

B **B**

MODULO II

Esercizio 5. Dati $a, b \in \mathbf{R}$, si consideri la funzione

$$f(x,y) = ax^2 - x + \frac{by-1}{y^2}.$$

Trovare per quale valore dei parametri a, b il punto di coordinate $(-1,2)$ è critico. Stabilire infine la natura del punto $(-1,2)$ per i valori di a, b trovati.

Esercizio 6. Sia φ la curva espressa parametricamente da

$$\varphi(t) = \left(t - t^2, t - \frac{1}{t}\right),$$

per $t \in [1,2]$. Calcolare il lavoro compiuto dal campo $F(x,y) = (-x^2y, xy^2)$ lungo la curva φ.

Esercizio 7. Si consideri il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = |x(t)|^{\frac{2}{3}} \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

Indicare quali delle seguenti funzioni (definite su tutto $\mathbf{R}$) sono soluzione di tale problema, giustificando la risposta.

$$x_1(t) = \frac{1}{27}(t+3)^3,$$
$$x_2(t) = 0,$$
$$x_3(t) = t^2 + t,$$
$$x_4(t) = \frac{t^3}{27},$$
$$x_5(t) = \begin{cases} 0 & t \geq 0 \\ \frac{t^3}{27} & t < 0, \end{cases}$$
$$x_6(t) = \begin{cases} \frac{t^3}{27} & t < 0 \\ 0 & 0 \leq t \leq \pi \\ \frac{(t-\pi)^3}{27} & t > \pi. \end{cases}$$