Capitolo 7

Serie e successioni.

7.1 Somme di infiniti addendi. Paradosso di Zenone.

Una serie numerica è la somma di infiniti addendi del tipo:

$$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \tag{7.1.1}$$

con $a_1, a_2, \cdots, a_n \in I\!R$.

Noi siamo abituati a trattare somme con un numero finito di addendi. In effetti il passaggio a somme come quella in (7.1.1) richiede una nuova definizione. In tempi antichi era sembrato ovvio che una somma di infiniti termini fosse necessariamente infinita. Questo è il punto cruciale di un celebre ragionamento di Zenone di Elea (500 a.C.), noto come paradosso di Achille e della tartaruga. Ci sembra utile riassumerlo brevemente perché il ragionamento che ne è alla base ci sembra corretto e un uso ugualmente corretto del concetto di somma porta a stabilire il risultato esatto invece della conclusione paradossale. Il ragionamento di Zenone tende a dimostrare che Achille (considerato molto veloce) non riuscirebbe mai a raggiungere una tartaruga (notoriamente molto lenta) che stesse camminando davanti a lui. Il motivo è questo: per raggiungere la posizione inizialmente occupata dalla tartaruga, Achille ha bisogno di un certo tempo che chiameremo t_0; nel frattempo la tartaruga si è spostata in una posizione per raggiungere la quale Achille necessita di un ulteriore tempo t_1; intanto la tartaruga si è ancora spostata e Achille ha bisogno di un tempo t_2 per raggiungere questo nuovo punto e così via. Il tempo totale t necessario ad Achille è quindi dato dalla formula:

$$t = t_0 + t_1 + t_2 + \ldots + t_n + \ldots \tag{7.1.2}$$

Secondo Zenone t, essendo somma di infinite quantità positive, è necessariamente infinito, quindi Achille non raggiungerà mai la tartaruga. Una conclusione corretta del ragionamento si può fornire solo dopo aver definito in modo adeguato il concetto di somma di una serie, dopodiché la deduzione di Zenone $t = +\infty$ andrebbe dimostrata o riconosciuta falsa, come in effetti accade. Siccome (7.1.2) costituisce un ottimo esempio, precisiamo il valore dei tempi t. A questo scopo chiamiamo v_a

la velocità di Achille e v_t la velocità della tartaruga. L'ipotesi che Achille sia più veloce si traduce nella diseguaglianza:

$$v_t < v_a$$

o equivalentemente:

$$\frac{v_t}{v_a} < 1.$$

Chiamiamo d_0 la distanza che inizialmente separa Achille dalla tartaruga. Si vede facilmente che:

$$t_0 = \frac{d_0}{v_a}.$$

Chiamiamo d_1 la distanza nel frattempo percorsa dalla tartaruga, per cui:

$$d_1 = v_t t_0 = \frac{v_t}{v_a} d_0.$$

Pertanto ricaviamo:

$$t_1 = \frac{d_1}{v_a} = \frac{v_t}{v_a^2} d_0 = \frac{v_t}{v_a} t_0.$$

Iterando questo procedimento si vede subito che:

$$t_n = \left(\frac{v_t}{v_a}\right)^n t_0.$$

Quindi (7.1.2) diventa:

$$t = t_0 \left(1 + \frac{v_t}{v_a} + \left(\frac{v_t}{v_a}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{v_t}{v_a}\right)^n + \ldots\right) \tag{7.1.3}$$

Eseguendo il calcolo in maniera diversa troveremo t dividendo la distanza iniziale per la differenza delle velocità ottenendo:

$$t = \frac{d_0}{v_a - v_t} \tag{7.1.4}$$

Allora, se la somma di una serie è definita in modo corretto, (7.1.3) e (7.1.4) devono fornire lo stesso valore.

7.2 Successioni numeriche.

Nei capitoli precedenti ci siamo occupati di funzioni definite su arbitrari sottoinsiemi A di $\mathbb{R}$. In questo paragrafo ci occuperemo del caso particolare che si ottiene quando $A = \mathbb{N}$. In tal caso, per definire la funzione, basta elencare i valori che la funzione assume nei numeri 0, 1, 2,...

Se indichiamo con a_n il valore assunto dalla funzione nel numero naturale n, possiamo assegnare la funzione scrivendo:

$$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

Quando rappresenteremo una funzione definita su $\mathbb{N}$ nel modo appena descritto parleremo di successione numerica.

Esempio 7.2.1 *Consideriamo la funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definita da:*

$$\forall x \in \mathbb{N} : f(x) = 2x.$$

Abbiamo, quindi:

$$\begin{cases} f(0) &= 0 \\ f(1) &= 2 \\ f(2) &= 4 \\ f(3) &= 6 \\ \vdots & \\ f(n) &= 2n \end{cases}$$

Quindi questa funzione può essere rappresentata tramite la successione:

$$0, 2, 4, 6, \ldots, 2n, \ldots$$

Questa successione sarà chiamata successione dei numeri pari.

Esempio 7.2.2 *Consideriamo la funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definita da:*

$$\forall x \in \mathbb{N} : f(x) = 2x + 1.$$

Abbiamo quindi:

$$\begin{cases} f(0) &= 1 \\ f(1) &= 3 \\ f(2) &= 5 \\ f(3) &= 7 \\ \vdots & \\ f(n) &= 2n + 1 \end{cases}$$

Quindi questa funzione può essere rappresentata tramite la successione:

$$1, 3, 5, 7, \ldots, 2n + 1, \ldots$$

Questa successione sarà chiamata successione dei numeri dispari.

Esempio 7.2.3 *Consideriamo la funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definita da:*

$$\forall x \in \mathbb{N} : f(x) = x.$$

Abbiamo quindi:

$$\begin{cases} f(0) &= 0 \\ f(1) &= 1 \\ f(2) &= 2 \\ f(3) &= 3 \\ \vdots & \\ f(n) &= n \end{cases}$$

Quindi, questa funzione può essere rappresentata tramite la successione:

$$0, 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$$

La successione:

$$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

si rappresenta in modo compatto con la notazione:

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}.$$

Si vede facilmente che assegnata la successione $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si può sempre considerare la funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definita da:

$$\forall n \in \mathbb{N} : f(n) = a_n.$$

Quindi, il concetto di successione e quello di funzione definita su $\mathbb{N}$ risultano logicamente equivalenti.

L'unico punto di accumulazione di $\mathbb{N}$ è $+\infty$, quindi se f è una funzione definita su $\mathbb{N}$ l'unico punto in cui si può pensare di calcolare il limite è $x = +\infty$. Quindi, possiamo parlare di limite di una successione in $+\infty$ e siccome non possiamo parlarne in nessun altro punto, lo indicheremo come il limite della successione.

In altri termini, se indichiamo una funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tramite la successione $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, chiameremo *limite di* $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (quando esiste) il valore di $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ e lo indicheremo con il simbolo:

$$\lim_n a_n.$$

Esempio 7.2.4 *Sia $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la successione dei numeri pari considerata nell'esempio precedente. Abbiamo che:*

$$\lim_n a_n = \lim_n 2n = \lim_{x \to +\infty} 2x = +\infty$$

(dove l'ultimo limite è considerato solo per valori di $x \in \mathbb{N}$).

Esempio 7.2.5 *Sia $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la successione dei numeri dispari. Abbiamo che:*

$$\lim_n a_n = \lim_n (2n + 1) = \lim_{x \to +\infty} (2x + 1) = +\infty$$

(dove, anche in questo caso, l'ultimo limite è considerato solo per valori di $x \in \mathbb{N}$).

Esempio 7.2.6 *Sia $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la successione dei numeri naturali. Abbiamo che:*

$$\lim_n a_n = \lim_n n = \lim_{x \to +\infty} x = +\infty$$

(dove l'ultimo limite è considerato solo per valori di $x \in \mathbb{N}$).

7.3 Serie numeriche. Successioni delle somme parziali.

Considerata una successione $(a_n)_{n\in I\!N}$, che chiameremo *successione dei termini della serie,* definiremo in questo paragrafo il concetto di somma della serie di termine *n-esimo* a_n, cioè con la terminologia utilizzata nel paragrafo 7.1, la somma degli infiniti addendi $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$.

Tale somma non sempre esiste e nel caso esista si denota con il seguente simbolo:

$$s = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

In mancanza di informazioni circa l'esistenza di tale somma, il simbolo $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ denota un oggetto possibile esattamente come il simbolo $\lim_{x\to x_0} f(x)$, finché non viene provato che tale limite esiste. A questi livelli si dice pure che il simbolo $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ indica la serie di termine generale a_n.

Per definire il concetto di somma di una serie si ricorre a quello di somma parziale.

Definizione 7.3.1 *Dato $n \in I\!N$, definiamo somma parziale $n-$esima della serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ la somma s_n dei primi $n+1$ addendi $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$. In altri termini:*

$$s_n = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n,$$

o in notazione compatta:

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k.$$

In questa maniera, accanto alla successione $(a_n)_{n\in I\!N}$ dei termini della serie, rimane automaticamente definita la successione delle somme parziali s_n.

È ragionevole definire come *somma della serie* il limite s (se esiste) a cui tende s_n quando n tende all'infinito.

Quindi, si ha per definizione:

$$s = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \lim_n s_n = \lim_n \sum_{k=0}^{n} a_k$$

nel senso che il primo membro denota un elemento di $I\!R$ (cioè la somma della serie esiste) se e solo se esiste il limite che compare nell'ultimo membro.

Quando tale limite esiste, la serie si dirà *regolare*. In particolare, quando tale limite è finito, la serie si dirà *convergente* e negli altri casi *divergente*.

In altri termini una serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ risulta rispettivamente regolare, convergente o divergente quando lo è la successione delle somme parziali $(s_n)_{n\in I\!N}$.

In generale la terminologia usata per le successioni si trasferisce alle serie facendo riferimento alla successione delle somme parziali.

7.4 Serie delle differenze.

Abbiamo visto nel paragrafo precedente che lo studio di una serie si può ricondurre a quello di una successione, passando alla successione delle somme parziali. Vediamo ora che è possibile fare anche il contrario: possiamo ricondurre lo studio di una qualsiasi successione a quello di una opportuna serie. Questo può essere fatto osservando che data una qualsiasi successione di numeri reali $(x_n)_{n\in I\!N}$ è sempre possibile definire una successione di termini $(a_n)_{n\in I\!N}$ tale che $(x_n)_{n\in I\!N}$ sia proprio la successione delle somme parziali di serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$. Per costruire tale successione di termini dobbiamo semplicemente prendere:

$$\begin{aligned} a_0 &= x_0, \\ \forall n &> 0 : a_n = x_n - x_{n-1}. \end{aligned}$$

È facile osservare che $\forall n > 0$ si ottiene:

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = x_n.$$

La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ così definita prende il nome *di serie delle differenze relativa alla successione* $(x_n)_{n\in I\!N}$.

Per via delle definizioni date nel paragrafo precedente, $(x_n)_{n\in I\!N}$ risulterà essere rispettivamente regolare, convergente o divergente se e solo se lo è la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Mettendo assieme i risultati di questo paragrafo e quello precedente si vede subito come il concetto di serie e il concetto di successione costitui scono due strumenti alternativi per descrivere lo stesso tipo di fenomeni. Si possono studiare proprietà delle successioni ragionando con le serie grazie alla serie delle differenze e si possono studiare proprietà delle serie ragionando in termini di successione grazie alla successione delle somme parziali. Decidere quindi se ragionare in termini di serie o di successioni è solo una questione di opportunità.

7.5 Serie geometrica.

L'esempio più significativo di serie convergente, al quale molti altri casi saranno ricondotti,è costituito dalla cosidetta *serie geometrica.* Dato un numero $k \in I\!R$, si considera la serie ottenuta prendendo come termine $n - simo$ $a_n = k^n$, cioè la serie:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} k^n.$$

Tale serie prende il nome di *serie geometrica di ragione k.* Per studiare la convergenza di tale serie, calcoliamo esplicitamente la successione delle somme parziali $(s_n)_{n\in I\!N}$. Osserviamo che con semplici (e ben noti) calcoli si vede che:

$$\begin{aligned} (1+k+k^2+\ldots+k^n)(1-k) &= 1+k+k^2+\ldots+k^n-k-k^2-\ldots-k^n-k^{n+1} \\ &= 1-k^{n+1}. \end{aligned}$$

Da questo si ottiene che, per $k \neq 1$:

$$s_n = 1 + k + k^2 + \ldots + k^n = \frac{1 - k^{n+1}}{1 - k}.$$

È quindi semplice constatare che $(s_n)_{n \in I\!N}$ converge se e solo se converge k^{n+1} il che accade se e solo se $|k| < 1$ (il caso $k = 1$ è già stato escluso). In tal caso si ha che:

$$\lim_n s_n = \lim_n \frac{1 - k^{n+1}}{1 - k} = \frac{1}{1 - k}$$

Negli altri casi la serie non converge anche se per $k > 0$ è regolare.

Esempio 7.5.1 *Sia $k = \frac{1}{2}$; allora abbiamo la serie:*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^n + \ldots = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2.$$

Esempio 7.5.2 *Sia $k = 1$; allora abbiamo la serie:*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 1^n = 1 + 1 + 1 + \ldots + 1 + \ldots = +\infty,$$

infatti $\forall n \in I\!N$ risulta $s_n = n$ e quindi:

$$\lim_n s_n = \lim_n n = +\infty.$$

Per dare un ultimo esempio più significativo di serie geometrica, terminiamo i calcoli di Zenone e vediamo se il modo in cui è impostato il suo ragionamento risulta corretto. Abbiamo visto nel paragrafo 7.1 che il tempo totale impiegato da Achille per raggiungere la tartaruga era dato dalla formula:

$$t = t_0 \left(1 + \frac{v_t}{v_a} + \left(\frac{v_t}{v_a}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{v_t}{v_a}\right)^n + \ldots\right) = t_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{v_t}{v_a}\right)^n.$$

Siamo ora in grado di classificare la serie che appare in questa formula come una serie geometrica di ragione $\frac{v_t}{v_a}$ e di concludere che il tempo t è finito se $\frac{v_t}{v_a} < 1$ il che, come abbiamo già osservato, esprime il fatto che Achille è più veloce della tartaruga. Quindi, concludiamo che il sorpasso avviene in un tempo finito se e solo se l'inseguitore è più veloce e questo è in perfetto accordo con l'intuizione e risolve completamente il paradosso. Possiamo però anche completare i calcoli applicando la formula appena dimostrata sulle serie geometriche e ricordando il valore di t_0 dato da:

$$t_0 = \frac{d_0}{v_a}.$$

Otteniamo così:

$$t = t_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{v_t}{v_a}\right)^n = \frac{d_0}{v_a} \frac{1}{1 - \frac{v_t}{v_a}} = \frac{d_0}{v_a - v_t},$$

che è lo stesso valore che avevamo calcolato per altra via. Quindi, l'impostazione del calcolo data da Zenone risulta corretta.

7.6 Successioni monotone e serie a termini positivi.

Come esempio della relazione che intercorre fra il concetto di serie e quello di successione, vediamo a cosa corrisponde per una serie il concetto di successione monotona crescente. Per far questo, dobbiamo semplicemente vedere come possono essere caratterizzate le serie delle differenze corrispondenti a successioni monotone crescenti. Se $(x_n)_{n\in I\!\!N}$ è una successione monotona crescente e $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ è la relativa serie delle differenze, abbiamo che:

$$\forall n > 0 : a_n = x_n - x_{n-1} \geq 0.$$

Il concetto di successione monotona crescente si riflette quindi in quello di serie a termini positivi. Analogamente, il concetto di successione monotona decrescente si riflette in quello di serie a termini negativi. Osserviamo che quando una successione è monotona essa risulta sempre regolare per via di quanto visto sui limiti di funzioni monotone. Ricordiamo infatti che le successioni sono particolari casi di funzioni e che dal momento che n tende all'infinito il limite risulta essere un limite solo da sinistra.

Quindi, quando $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ è una serie a termini positivi, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ denota sempre o un elemento di $I\!\!R$ che deve essere un numero reale positivo o $+\infty$. Allora la convergenza della serie è espressa dalla condizione:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k < +\infty \tag{7.6.5}$$

Osserviamo che se $(a_n)_{n\in I\!\!N}$ è una successione di termini positivi e se $(b_n)_{n\in I\!\!N}$ è una successione che si ottiene da $(a_n)_{n\in I\!\!N}$ scambiando solo l'ordine dei termini, utilizzando la proprietà di commutatività delle somme finite, si vede che $\forall n \in I\!\!N$ risulta:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \leq \sum_{k=0}^{+\infty} b_k.$$

Passando al limite nella diseguaglianza si ha:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \leq \sum_{k=0}^{+\infty} b_k.$$

Scambiando il ruolo delle due serie si ottiene l'altra diseguaglianza e quindi:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k. \tag{7.6.6}$$

Da questa uguaglianza e da (7.6.5) segue in particolare che ciascuna delle due serie converge se e solo se converge l'altra.

Possiamo dire che (7.6.6) rappresenta un'estensione alle serie a termini positivi della proprietà commutativa delle somme finite.

Consideriamo infine il caso in cui $(a_n)_{n\in I\!N}$ e $(b_n)_{n\in I\!N}$ siano due successioni di termini positivi tali che $\forall n \in I\!N$ si abbia:

$$a_n \leq b_n.$$

È immediato osservare che $\forall n \in I\!N$ risulta:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} b_k.$$

Passando al limite:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \leq \sum_{k=0}^{+\infty} b_k.$$

Quindi, se la serie $\sum_{k=0}^{+\infty} b_k$ converge deve convergere anche la serie $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ o, equivalentemente, se $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ diverge, diverge anche $\sum_{k=0}^{+\infty} b_k$. Abbiamo, quindi, un criterio di confronto per la convergenza delle serie a termini positivi. Vedremo in seguito che il criterio continua ad essere valido anche autorizzando $a_n > b_n$ purché solo per un numero finito di indici n.

7.7 Serie assolutamente convergenti.

Definizione 7.7.1 *Una serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ si dice assolutamente convergente se è verificata la condizione:*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| < +\infty.$$

Proviamo che se una serie è assolutamente convergente essa risulta anche convergente. A tale scopo introduciamo $\forall x \in I\!R$ le seguenti notazioni:

$$\begin{aligned} x^+ &= \frac{|x|+x}{2} = \max(x,0), \\ x^- &= \frac{|x|-x}{2} = \max(-x,0). \end{aligned}$$

Le precedenti definizioni sono equivalenti a chiedere che $\forall x \in I\!R$:

$$|x| = x^+ + x^-, \qquad x = x^+ - x^-. \tag{7.7.7}$$

Inoltre si vede anche che:

$$0 \leq x^+ \leq |x|, \qquad 0 \leq x^- \leq |x|.$$

Sia data, quindi, una serie assolutamente convergente $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$; applicando il Teorema del confronto vediamo che, essendo $\forall n \in I\!N$: $a_n^+ \leq |a_n|$ e $a_n^- \leq |a_n|$, le due serie a termini positivi $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^+$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^-$ risultano convergenti. Allora, poiché per (7.7.7) :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n^+ - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n^-,$$

la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ risulta convergente.

Allo stesso modo possiamo vedere che la proprietà di commutatività dimostrata per le serie a termini positivi vale anche per le serie assolutamente convergenti. Infatti, siano $(a_n)_{n\in I\!N}$ e $(b_n)_{n\in I\!N}$ due successioni di termini tali che $(b_n)_{n\in I\!N}$ si ottiene da $(a_n)_{n\in I\!N}$ scambiando solo l'ordine dei termini. Allo stesso modo si deduce che $(b_n^+)_{n\in I\!N}$ si ottiene scambiando l'ordine dei termini della successione $(a_n^+)_{n\in I\!N}$ e $(b_n^-)_{n\in I\!N}$ si ottiene scambiando l'ordine di $(a_n^-)_{n\in I\!N}$ e $(|b_n|)_{n\in I\!N}$ si ottiene da $(|a_n|)_{n\in I\!N}$ scambiando l'ordine dei termini. Applicando il criterio prima enunciato ai valori assoluti si deduce che una delle due serie è assolutamente convergente se e solo se lo è anche l'altra. Applicando, inoltre, la formula della commutatività alle quattro serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^+$, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^-$, $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n^+$, $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n^-$ uno ottiene le due uguaglianze e ne scrive una sola:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^+ = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n^+,$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^- = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n^-$$

da cui si ottiene che:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n^+ - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n^- = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n^+ - \sum_{n=0}^{+\infty} b_n^- = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n.$$

Abbiamo quindi visto che la proprietà di commutatività vale oltre che per le serie a termini positivi (ovviamente, per le serie a termini negativi) anche per le serie assolutamente convergenti. Notiamo che l'assoluta convergenza è indispensabile per i calcoli precedenti perché altrimenti $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^+ - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n^-$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n^+ - \sum_{n=0}^{+\infty} b_n^-$ possono essere forme indeterminate del tipo $(+\infty - \infty)$ e quindi l'uguaglianza (7.7.7) potrebbe non essere vera. Questo è precisamente quello che accade quando la serie è convergente ma non assolutamente convergente. In questa situazione è possibile addirittura dimostrare che:

1. $\forall s \in I\!R$ è possibile, scambiando l'ordine degli a_n, ottenere una nuova successione di termini $(b_n)_{n\in I\!N}$ tale che la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ è regolare e $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n = s$.

2. È possibile, scambiando l'ordine degli a_n, ottenere una nuova successione di termini $(b_n)_{n\in I\!N}$ tale che la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ non è regolare.

Quindi, fra le serie convergenti la proprietà di commutatività caratterizza le serie assolutamente convergenti. Per queste ultime si può parlare della somma di una quantità numerabile di addendi, prescindendo dall'ordine con cui tali addendi devono essere considerati. La somma di una serie solo convergente non dipende affatto dall'insieme degli addendi ma dall'ordine in cui essi vengono presi.

Esempio 7.7.1 *Consideriamo la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} k^n$; se $|k| < 1$ abbiamo:*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} |k^n| = \sum_{n=0}^{+\infty} |k|^n = \frac{1}{1-|k|}.$$

Quindi se $|k| < 1$, *la serie geometrica di ragione* k *è oltre che convergente, assolutamente convergente. Quindi se* $\varphi : \mathbb{N} \to N$ *è una bigezione, abbiamo:*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} k^{\varphi(n)} = \frac{1}{1-k}.$$

Infatti i termini $k^{\varphi(n)}$ *si ottengono cambiando l'ordine dei termini* k^n *secondo la bigezione* φ.

7.8 Criteri di convergenza.

Enunceremo adesso dei criteri che permettono di stabilire quando una serie risulta convergente. Alcuni di questi permetteranno di dedurre addirittura l'assoluta convergenza, altri permetteranno di dedurre solo la convergenza.

Criterio del confronto: *Siano* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *e* $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ *due serie numeriche; se* $\forall n \in \mathbb{N}$ *risulta:*

$$|a_n| \leq |b_n|$$

e se $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ *è assolutamente convergente, anche* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *è assolutamente convergente.*

Osservazione 7.8.1 *Come nel caso delle successioni a termini positivi, la condizione* $|a_n| \leq |b_n|$ *può essere violata purché solo per un numero finito di* n *e il criterio rimane applicabile.*

Enunciamo ora i due principali criteri di assoluta convergenza: Criterio della radice e Criterio del rapporto.

Criterio della radice: *Se* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *è una serie tale che:*

$$\exists \lim_n \sqrt[n]{|a_n|} < 1,$$

allora la serie è assolutamente convergente. Se:

$$\exists \lim_n \sqrt[n]{|a_n|} > 1,$$

la serie non è convergente.

Criterio del rapporto: *Sia* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *una serie di termini e supponiamo che tale che* $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \neq 0$. *Se:*

$$\exists \lim_n \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1,$$

la serie è assolutamente convergente. Se:

$$\exists \lim_n \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1,$$

la serie non è convergente.

Osserviamo subito qualcosa che ci obbligherà a rienunciare questi due criteri quando potremo disporre di una terminologia migliore. Si dimostra che le ipotesi di esistenza del limite di $\sqrt[n]{|a_n|}$ e di $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ non sono in realtà affatto necessarie per poter applicare questi criteri. Il criterio della radice non permette di dire assolutamente niente nè sulla convergenza nè sull'assoluta convergenza della serie se $\exists \lim_n \sqrt[n]{|a_n|} = 1$. Infatti in tal caso, che chiameremo *caso di indecidibilità*, come vedremo con esempi, tutti i comportamenti della serie sono possibili: può esserci convergenza semplice o assoluta e può non esserci convergenza.

Puntualizziamo infine che da quanto abbiamo detto si deduce che se una serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge ma non assolutamente il $\lim_n \sqrt[n]{|a_n|}$, se esiste, è uguale a 1.

Enunciamo ora un criterio di convergenza semplice noto come criterio di Leibniz.

Criterio di Leibniz: *Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di numeri positivi, decrescente e infinitesima, la serie $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n a_n$ è convergente.*

Il criterio di Leibniz permette anche di fornire una stima della somma della serie data da $0 \le \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n a_n \le a_0$. Lo stesso criterio applicato alla serie $\sum_{k=n}^{+\infty}(-1)^k a_k$ fornisce $0 \le \sum_{k=n}^{+\infty}(-1)^k a_k \le a_n$ se k è pari e $-a_n \le \sum_{k=n}^{+\infty}(-1)^k a_k \le 0$ se k è dispari. In tutti i casi risulta $\left|\sum_{k=n}^{+\infty}(-1)^k a_k\right| \le a_n$.

Esempio 7.8.1 *Consideriamo la serie geometrica $\sum_{n=0}^{+\infty} k^n$. Se applichiamo il criterio del rapporto (si può fare se $k \neq 0$), troviamo che:*

$$\lim_n \frac{|k^{n+1}|}{|k^n|} = |k| .$$

Allo stesso modo se applichiamo il criterio della radice, troviamo che:

$$\lim_n \sqrt[n]{|k^n|} = |k| .$$

I due criteri forniscono quindi la stessa indicazione e consentono di dire che la serie converge assolutamente se $|k| < 1$ come abbiamo già visto e che non converge per $|k| > 1$. Il caso $|k| = 1$ non può essere dedotto da un'applicazione diretta di questi criteri ed è quindi un caso di indecidibilità che va esaminato direttamente. In questo caso è facile vedere che per $k = 1$ la serie diverge e per $k = -1$ la serie non è regolare. Abbiamo quindi un esempio di un caso di indecidibilità in cui una serie risulta non convergente e uno in cui risulta non regolare.

Osservazione 7.8.2 *La serie geometrica si presta ad essere esaminata molto facilmente alla luce del criterio del rapporto e della radice. Questo accade perché lo scopo di questi due criteri, come vedremo dalla loro dimostrazione, consiste proprio nel ricondurre lo studio di una serie arbitraria a quello di una serie geometrica.*

Esempio 7.8.2 *La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ è divergente, infatti raggruppando i termini nel modo seguente:*

$$\begin{aligned}
& 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\ldots \\
= \; & 1+\frac{1}{2}+(\frac{1}{3}+\frac{1}{4})+(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8})+(\frac{1}{9}+\ldots)+\ldots \\
\geq \; & 1+\frac{1}{2}+(\frac{1}{4}+\frac{1}{4})+(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8})+(\frac{1}{16}+\ldots)+\ldots \\
= \; & 1+\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{4}{8}+\frac{8}{16}+\ldots \\
= \; & 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots
\end{aligned}$$

Si vede facilmente che la somma è $+\infty$.

In questo esempio, si vede facilmente che:

$$l_1 = \lim_n \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_n \frac{n}{n+1} = 1.$$

Quindi, il criterio del rapporto non permette di predire il comportamento della serie. Quindi abbiamo di nuovo un caso di indecidibilità in cui la serie risulta non convergente.

Analogamente il criterio della radice fornisce:

$$l_2 = \lim_n \sqrt[n]{a_n} = \lim_n \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_n e^{\frac{1}{n}\log\frac{1}{n}} = e^0 = 1.$$

Quindi neanche il criterio della radice fornisce informazioni utili.

Ciascuno dei prossimi due esempi ci consentirà di valutare l_1 e l_2 indirettamente (ammessa la loro esistenza).

Esempio 7.8.3 *La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ è convergente. Infatti ragionando come nell'esempio precedente si ha:*

$$\begin{aligned}
& 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}+\frac{1}{49}+\frac{1}{64}+\frac{1}{81}+\ldots \\
= \; & 1+(\frac{1}{4}+\frac{1}{9})+(\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}+\frac{1}{49})+(\frac{1}{64}+\frac{1}{81}+\ldots)+\ldots \\
\leq \; & 1+(\frac{1}{4}+\frac{1}{4})+(\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16})+(\frac{1}{64}+\ldots)+\ldots \\
= \; & 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots \\
= \; & \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^0} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1 = 2-1 = 1.
\end{aligned}$$

Quindi, applicando il criterio del rapporto e della radice si ha:

$$\begin{aligned}
\lim_n \frac{n^2}{(n+1)^2} &= \lim_n (\frac{n}{n+1})^2 = l_1^2 = 1; \\
\lim_n \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} &= \lim_n (\sqrt[n]{\frac{1}{n}})^2 = l_2^2 = 1.
\end{aligned}$$

Quindi, neanche in questo caso i due criteri si rivelano utili. Abbiamo nuovamente un caso di indecidibilità in cui la serie converge.

Dal raffronto dei due esempi, possiamo valutare i due limiti indirettamente; infatti, poiché la serie dell'esempio 7.8.2 non converge, i criteri della radice e del rapporto ci assicurano che l_1 ed l_2 sono entrambi ≥ 1 (altrimenti permetterebbero di dedurre la convergenza). Poiché la serie considerata nell'esempio 7.8.3 converge i criteri della radice e del rapporto ci permettono di dedurre che l_1^2 ed l_2^2 sono ≤ 1 (altrimenti permetterebbero di dedurre che la serie non converge. Combinando queste informazioni si deduce che:

$$l_1 = l_2 = 1.$$

Abbiamo quindi un esempio di un caso di indecidibilità in cui la serie risulta convergente e perciò, essendo a termini positivi, anche assolutamente convergente.

Esempio 7.8.4 *La serie $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{1}{n}$ risulta convergente come si vede banalmente applicando il criterio di Leibniz. Se esaminiamo l'assoluta convergenza, ritorniamo all'esempio (vedere) e quindi vediamo che questa serie non è assolutamente convergente. Questo ci permette di valutare ancora in maniera indiretta che $l_1 = l_2 = 1$. Abbiamo quindi un esempio di una serie che converge ma non converge assolutamente e questo, come sappiamo, deve per forza essere un caso di indecidibilità.*

7.9 Serie di funzioni.

Sia $A \subset I\!R$ e $\forall n \in I\!N$ sia $f_n : A \to I\!R$.

$\forall x \in A$ possiamo considerare la serie numerica :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \tag{7.9.8}$$

Sia D l'insieme delle $x \in A$ tali che la serie (7.9.8) converge. Chiameremo D *dominio di convergenza della serie di funzioni* $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.

Consideriamo la funzione $f : D \to I\!R$ tale che:

$$\forall x \in D : f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x).$$

Analogamente, possiamo definire *dominio di assoluta convergenza* D_a l'insieme delle $x \in A$ tali che la serie (7.9.8) converge assolutamente.

Definizione 7.9.1 *Dato un insieme $B \subset A$, diremo che la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ converge totalmente su B se esiste una successione a termini positivi $(a_n)_{n\in I\!N}$ tale che la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n < +\infty$ e $\forall x \in B$, $\forall n \in I\!N$: $|f_n(x)| \leq a_n$.*

È facile vedere che in tal caso risulta $B \subset D_a$, anzi D_a è proprio la riunione di tutti i sottoinsiemi B di A in cui la serie converge totalmente.

7.10 Serie di potenze.

Un caso particolare delle serie di funzioni è costituito dalle serie di potenze. Questo si ottiene assegnando un punto $x_0 \in I\!R$, chiamato punto iniziale, $\forall n \in I\!N$ un coefficiente a_n e prendendo come funzione f_n la funzione da $I\!R$ in $I\!R$ che ad un elemento $x \in I\!R$ associa $f_n(x) = a_n(x - x_0)^n$.

Quindi, la serie (7.9.8) diventa:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x - x_0)^n \tag{7.10.9}$$

Notiamo come (7.10.9) assomigli ad un polinomio scritto attorno al punto iniziale x_0 (vedere formula $P_n(x)$). La differenza fra la (7.10.9) e la formula citata consiste essenzialmente nel fatto che l'indice n non si ferma al grado del polinomio ma può prendere valori arbitrariamente alti. Non è quindi sbagliato pensare alla somma di una serie di potenze come ad un polinomio di grado infinito o considerare i polinomi come particolari serie di potenze in cui i coefficienti a_n sono tutti nulli quando n è maggiore del grado. Nel caso della serie di potenze si possono dire molte cose sul dominio di convergenza. Applicando il criterio della radice si vede che esiste $\rho \in [0, +\infty]$,detto raggio di convergenza, tale che si hanno le seguenti inclusioni:

$$]x_0 - \rho, x_0 + \rho[\subset D_a \subset D \subset [x_0 - \rho, x_0 + \rho] .$$

Quindi, il dominio di convergenza e il dominio di assoluta convergenza risultano entrambi uguali ad un intervallo di centro x_0 e di semiampiezza ρ. È invece impossibile dire se D o D_a sono intervalli chiusi o aperti perché applicando il criterio della radice agli estremi si ottengono sempre casi di indecidibilità. Vedremo con esempi che tutti i casi sono possibili: potremo avere D_a (e quindi D) uguale all'intervallo chiuso $[x_0 - \rho, x_0 + \rho]$ o D (e quindi D_a) uguale al solo intervallo aperto $]x_0 - \rho, x_0 + \rho[$. Inoltre, su ogni intervallo chiuso e limitato contenuto in $]x_0 - \rho, x_0 + \rho[$ la serie converge totalmente. I soli casi in cui è sempre possibile decidere se D o D_a sono intervalli chiusi o aperti sono quelli corrispondenti ai casi limite $\rho = 0$ oppure $\rho = +\infty$. Infatti per $\rho = 0$ abbiamo $D = D_a = \{x_0\}$ e per $\rho = +\infty$−abbiamo $D = D_a = \mathbb{R}$.

Esempio 7.10.1 *Prendiamo* $\forall n \in \mathbb{N} : a_n = 1$. *Quindi otteniamo la serie di potenze:*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (x - x_0)^n$$

che non è altro che la serie geometrica di ragione $x - x_0$. *Sappiamo che questa converge per* $|x - x_0| < 1$ *e non converge negli altri casi.*

Quindi in questo caso si ha:

$$D = D_a = \,]x_0 - 1, x_0 + 1[\,.$$

Esempio 7.10.2 *Sia* $a_0 = 0$ *e* $\forall n > 0 : a_n = \frac{1}{n^2}$. *Allora abbiamo la serie di potenze:*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}(x - x_0)^n. \tag{7.10.10}$$

In questo caso la serie converge totalmente sull'intervallo $[x_0 - 1, x_0 + 1]$ *come si vede prendendo la successione* $a_n = \frac{1}{n^2}$. *Applicando il criterio della radice alla convergenza della serie* (7.10.10) *si ha:*

$$\lim_n \sqrt[n]{\frac{|x - x_0|^n}{n^2}} = |x - x_0| \lim_n \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = |x - x_0|\,.$$

Quindi per $|x - x_0| > 1$ *la serie non converge e allora si ha che:*

$$D = D_a = [x_0 - 1, x_0 + 1]\,.$$

Esempio 7.10.3 *Sia* $a_0 = 0$ *e* $\forall n > 0 : a_n = \frac{1}{n}$. *Allora abbiamo la serie di potenze:*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}(x - x_0)^n. \tag{7.10.11}$$

Per $x = x_0 + 1$ *si ottiene la serie* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ *che sappiamo che non converge. Per* $x = x_0 - 1$ *si ottiene la serie* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ *che converge.*

Abbiamo quindi visto che la serie (7.10.11)*:*

converge per $x = x_0 - 1$ *(quindi il suo raggio di convergenza è* ≥ 1*);*

non converge per $x = x_0 + 1$ *(quindi il suo raggio di convergenza è* ≤ 1*).*

Da questo deduciamo che il raggio di convergenza è uguale a 1 *e:*

$$D = [x_0 - 1, x_0 + 1[\,.$$

Abbiamo quindi esempi in cui D *non è nè chiuso nè aperto. Notiamo che in tal caso* D_a *è aperto infatti nel nostro esempio* $D_a =]x_0 - 1, x_0 + 1[$ *perché è facile vedere che, nel caso di una serie di potenze,* D_a *è necessariamente simmetrico attorno a* x_0*.*

Abbiamo quindi visto un esempio in cui $D \neq D_a$.

7.11 Derivazione termine a termine di una serie di potenze.

Notiamo che la regola di derivazione della somma di due funzioni:

$$(f + g)' = f' + g'$$

si può facilmente estendere al caso di più funzioni purché in numero finito. In termini più formali se $A \subset I\!R$, $f_1, f_2, \ldots, f_n : A \to I\!R$, $\overline{x} \in A$ punto di accumulazione per A in cui tutte le funzioni f_i per $i = 1, 2, \ldots$ risultano derivabili, detta $f = \sum_{i=1}^{n} f_i$ la somma delle n funzioni si ha che f è derivabile in $\overline{x}$ e che:

$$f'(\overline{x}) = \sum_{i=1}^{n} f_i'(\overline{x})$$

Puntualizziamo subito che questo risultato non si estende senza restrizioni al caso di infinite funzioni: la somma di una serie di funzioni f_n è una funzione che può non essere derivabile nel punto $\overline{x}$ in cui tutte le f_n risultano derivabili. Ci sono tuttavia casi significativi in cui è possibile derivare termine a termine una serie di funzioni ottenendo formule del tipo:

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'$$

In questo momento non disponiamo della necessaria terminologia per garantire questo risultato. Ci limitiamo a segnalare che, nel caso di una serie di potenze, tali ipotesi risultano verificate in ogni punto $\overline{x}$ interno al dominio di convergenza, tale che la distanza di $\overline{x}$ dal punto iniziale x_0 risulti strettamente minore del raggio di convergenza ρ. Nulla si può dire in generale per i punti appartenenti al dominio di convergenza che raggiungono la massima distanza da x_0. Se deriviamo termine a termine una serie di potenze otteniamo:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n\right) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d}{dx}\left(a_n(x-x_0)^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1}\end{aligned}$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo omesso di utilizzare l'indice $n = 0$ perché il termine corrispondente è nullo. Si vede subito che la serie delle derivate è ancora una serie di potenze. Ciò può esser visto ancora più chiaramente con un cambio di indice, infatti ponendo $k = n - 1$ otteniamo:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (k+1)a_{k+1}(x-x_0)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k(x-x_0)^k, \tag{7.11.12}$$

dove (torniamo ad utilizzare l'indice n mettendo $k = n$) $\forall n \in I\!N$ risulta:

$$b_n = (n+1)a_{n+1}. \tag{7.11.13}$$

Abbiamo quindi una nuova serie di potenze con lo stesso punto iniziale x_0 e con una nuova successione di coefficienti ottenuta dalla precedente tramite la formula (7.11.13). In questa situazione è possibile dimostrare quanto segue:

Teorema 7.11.1 *Il raggio di convergenza ρ della serie delle derivate $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n(x-x_0)^n$ è lo stesso della serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$ e il dominio di convergenza della serie delle derivate è contenuto nel dominio di convergenza della serie di partenza. Gli interni dei due domini di convergenza sono uguali e sono dati da:*

$$]x_0-\rho, x_0+\rho[\,,$$

e $\forall x \in\ ]x_0-\rho, x_0+\rho[$ risulta:

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n(x-x_0)^n.$$

Esempio 7.11.1 *Consideriamo la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}(x-x_0)^n$. Rientriamo nello schema generale ponendo $a_0 = 0$ e $\forall n > 0 : a_n = \frac{1}{n^2}$. Abbiamo visto che il dominio di convergenza di tale serie di potenze è $[x_0-1, x_0+1]$. Derivando termine a termine si ottiene la serie:*

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}(x-x_0)^n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n(x-x_0)^n,$$

dove $\forall n \in I\!N$, per (7.11.13) :

$$b_n = (n+1)a_{n+1} = (n+1)\frac{1}{(n+1)^2} = \frac{1}{n+1}.$$

Otteniamo quindi la serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+1}(x-x_0)^n = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n}(x-x_0)^{n-1}.$$

Per studiare il dominio di convergenza di questa nuova serie di potenze possiamo ovviamente limitarci al caso $x \neq x_0$, in cui la convergenza della serie non cambia se moltiplichiamo tutti i termini della serie per $x - x_0$. Quindi il dominio di convergenza risulta uguale a quello della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}(x-x_0)^n$ che è stato studiato precedentemente e che è dato dall'intervallo $[x_0 - 1, x_0 + 1[$. In questo esempio si vede come un punto di bordo appartiene al dominio della funzione ma non a quello della derivata e si vede anche che il raggio di convergenza non cambia, come è previsto dalla teoria.

Esempio 7.11.2 *Consideriamo la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}(x-x_0)^n$ ottenuta ponendo $a_0 = 0$ e $\forall n > 0 : a_n = \frac{1}{n}$. Derivando termine a termine otteniamo:*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} n(x-x_0)^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (x-x_0)^n.$$

Sappiamo che il dominio di convergenza della prima serie è $[x_0 - 1, x_0 + 1[$ e quello di quest'ultima serie è $]x_0 - 1, x_0 + 1[$. Ancora otteniamo un caso in cui uno dei punti di bordo appartiene al dominio di convergenza della serie di potenze ma non a quello della serie delle derivate.

Se deriviamo ulteriormente la serie $\sum_{n=0}^{+\infty}(x-x_0)^n$ abbiamo la serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n(x-x_0)^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)(x-x_0)^n,$$

che avrà ancora raggio di convergenza 1 e dominio di convergenza incluso nel precedente e quindi necessariamente uguale a:

$$]x_0 - 1, x_0 + 1[\,.$$

Esempio 7.11.3 *Vogliamo calcolare la somma s della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$. Il criterio di Leibniz, così come è stato applicato finora, ci dice che la serie è convergente e la somma è compresa tra -1 e 0. Per calcolare esattamente la somma modifichiamo leggermente il problema e per $|x| < 1$, calcoliamo la somma della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}x^n$. Riguardata la somma come funzione f di x, sappiamo che per $x \in\ ]-1, +1[$ la derivata di f si ottiene come somma della serie delle derivate $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ (vedere esempio precedente). Tale somma è facile da calcolare perché $\forall x$ abbiamo una serie geometrica la cui somma è:*

$$\frac{1}{1-x}.$$

Abbiamo quindi:

$$f'(x) = \frac{1}{1-x},$$

che dà per f la forma:

$$f(x) = -\log|1-x| + c.$$

Il valore di c può essere facilmente determinato utilizzando il fatto che in $x = 0$ la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n$ è uguale a zero. Abbiamo quindi:

$$0 = f(0) \Rightarrow c = 0.$$

Quindi:

$$f(x) = -\log|1-x|\,.$$

Vediamo ora se tale calcolo può essere estrapolato al caso $x = -1$. Fissato arbitrariamente $\varepsilon > 0$, consideriamo $n \in I\!N$ tale che sia $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Applicando il criterio di Leibniz vediamo che $\forall x$ tale che $-1 \leq x \leq 0$ otteniamo:

$$\left|\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{x^k}{k}\right| = \left|\sum_{k=n}^{+\infty} (-1)^k \frac{\left|x^k\right|}{k}\right| \leq \frac{|x|^n}{n} \leq \frac{1}{n} < \varepsilon. \tag{7.11.14}$$

Detto P il polinomio di grado $n-1$ dato da:

$$P(x) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{x^k}{k},$$

abbiamo, applicando (7.11.14) a $x = -1$,

$$|s - P(-1)| < \varepsilon \tag{7.11.15}$$

e per $x \in \,]-1, 0]$ abbiamo:

$$|-\log|1-x| - P(x)| < \varepsilon.$$

Allora, siccome P e la funzione $\log|1-x|$ sono continue abbiamo per $x = -1$:

$$|\log 2 + P(-1)| \leq \varepsilon.$$

Combinando questa con (7.11.15) otteniamo che:

$$|\log 2 + s| \leq 2\varepsilon,$$

da cui, data l'arbitrarietà di εsi deduce che:

$$s = -\log 2$$

Osservazione 7.11.1 *Naturalmente questo ragionamento è iterabile: la serie delle derivate è ancora una serie di potenze e quindi si può ulteriormente derivare termine a termine all'interno del dominio di convergenza (interno che non cambia rispetto a quello della serie di partenza) ottenendo una nuova serie di potenze la cui somma è la derivata seconda di* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$.

Detti b_n *i coefficienti della serie delle derivate prime e* c_n *quelli delle derivate seconde, iterando la formula abbiamo che:*

$$\forall n : \quad b_n = (n+1)a_{n+1}.$$

Si ottiene che:

$$\forall n : \quad c_n = (n+1)b_{n+1} = (n+1)(n+2)a_{n+2}.$$

Questo ragionamento si può ulteriormente iterare e quindi si vede che la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$ *è dotata di tutte le derivate all'interno del dominio di convergenza e che la derivata* $k-esima$ *è data dalla somma della serie di potenze:*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^{(k)}(x-x_0)^n,$$

dove i coefficienti $a_n^{(k)}$ *sono dati dalla formula:*

$$\forall n, k \in I\!N : a_n^{(k)} = (n+1)(n+2)\dots(n+k)a_{n+k} = \frac{(n+k)!}{n!}a_{n+k}.$$

Ponendo quindi $s(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$ *si ha, per* x *interno al dominio di convergenza:*

$$\forall k \in I\!N : s^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+k)!}{n!}a_{n+k}(x-x_0)^n.$$

Valutando la formula in $x = x_0$ *si ha:*

$$s^{(k)}(x_0) = k!a_k,$$

da cui:

$$a_k = \frac{s^{(k)}(x_0)}{k!}, \tag{7.11.16}$$

che permette di calcolare i coefficienti della serie di potenze conoscendo le derivate della funzione somma nel punto iniziale x_0.

7.12 Sviluppo in serie di Taylor e di Mac Laurin.

Abbiamo visto nel capitolo 4 che se una funzione f è dotata di derivata $n-esima$ in un punto x_0, si definisce il suo differenziale di ordine n in x_0 come la funzione che manda x in $\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n$. Abbiamo anche introdotto il concetto di Polinomio di Taylor di grado n definito come somma di tutti i differenziali di ordine $\leq n$. L'uso del concetto di serie di potenze ci permette, nel caso di una funzione dotata di tutte le derivate, di parlare della somma di tutti i differenziali; otteniamo così la serie:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n, \tag{7.12.17}$$

di cui i polinomi di Taylor rappresentano le somme parziali. La serie di potenze (7.12.17) è detta *serie di Taylor relativa ad f di punto iniziale x_0*.

Osservazione 7.12.1 *Quando il punto iniziale x_0 è uguale a zero la serie di Taylor prende il nome di serie di Mac Laurin.*

Osservazione 7.12.2 *È facile vedere come il concetto di serie di Taylor generalizza quello di polinomio di Taylor. La serie* (7.12.17)*, tenendo conto di tutti i differenziali della funzione, ne fornisce un'approssimazione locale infinitamente più precisa di quella di un polinomio di Taylor di ordine finito. Se la serie di Taylor* (7.12.17) *ha raggio di convergenza r, indichiamo con $s(x)$ la somma della serie sul suo dominio di convergenza. Dalla formula* (7.11.16) *segue che:*

$$\forall k \in I\!N : s^{(k)}(x_0) = k!\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} = f^{(k)}(x_0).$$

Quindi la somma della serie di Taylor fornisce una funzione derivabile infinite volte che nel punto iniziale x_0 ha tutte le derivate uguali a quelle di f. Posto:

$$r(x) = f(x) - s(x),$$

analogamente al Teorema sulla formula di Taylor, si dimostra che $r(x)$ è un infinitesimo di ordine comunque elevato in x_0 cioè $r(x)$ è un infinitesimo di ordine maggiore di n, $\forall\, n \in I\!N$.

Osserviamo che comunque, in generale, il resto $r(x)$ non è nullo. In generale inoltre il raggio di convergenza di una serie di Taylor può essere zero e quindi il resto $r(x)$ potrebbe non essere definibile anche se la funzione fosse dotata di infinite derivate in x_0. Quando il raggio di convergenza della serie di Taylor è diverso da zero e il resto è zero, si dice che *f è sviluppabile in serie di Taylor nel punto x_0*. Quando inoltre $x_0 = 0$ si dice in particolare che *f è sviluppabile in serie di Mac Laurin. Quando quindi f è sviluppabile in serie di Taylor in un punto x_0*, $\exists V$ intorno di x_0, $V \subset A$ tale che:

$$\forall x \in V : f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n, \tag{7.12.18}$$

Se f è sviluppabile in serie di Mac Laurin nello zero allora $\exists V$ intorno di *zero*, $V \subset A$ tale che:

$$\forall x \in V : f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

Se una funzione f è sviluppabile in serie di Taylor in ogni punto del suo insieme di definizione A, diremo che f è *analitica*.

Osservazione 7.12.3 *Le funzioni analitiche possono essere studiate localmente con metodi analoghi a quelli che si possono usare per i polinomi. Infatti, analogamente a un polinomio, una funzione analitica può essere sviluppata attorno ad un punto iniziale arbitrario del suo insieme di definizione. Dimostreremo in seguito le seguenti proprietà delle funzioni analitiche:*

1. la somma di una serie di potenze è analitica all'interno del suo dominio di convergenza e quindi essa coincide con il suo sviluppo di Taylor nel punto iniziale.

2. Una funzione è espandibile in serie di Taylor in x_0 se e solo se è uguale alla somma di una serie di potenze su un intorno di x_0. Se tale serie di potenze viene presa attorno al punto iniziale x_0 essa coincide con la serie di Taylor di f in x_0.

3. Siccome la derivata di una serie di potenze è ancora una serie di potenze, dal punto precedente segue che la derivata di una funzione analitica è ancora una funzione analitica.

4. Condizione necessaria e sufficiente perché una funzione f dotata di tutte le derivate in un punto x_0 abbia una serie di Taylor con un raggio di convergenza maggiore di zero è che $\exists M > 0$ t.c. $\forall\ n \in I\!\!N$:
$$\left|f^{(n)}(x_0)\right| \leq n!M^n.$$

5. Condizione necessaria e sufficiente perché una funzione f, infinite volte derivabile in un punto x_0, sia sviluppabile in serie di Taylor in x_0 è che $\exists V$ intorno di x_0, $\exists M > 0$ t.c. $\forall\ x \in V$, $\forall\ n \in I\!\!N$:
$$\left|f^{(n)}(x)\right| \leq n!M^n.$$

Dalla 1. si vede che se una funzione è sviluppabile in serie di Taylor in un punto x_0, detto V un intorno aperto di x_0 su cui vale (7.12.18), f risulta analitica in V.

Non è viceversa sempre vero che una funzione risulti sviluppabile in serie di Taylor su ogni intervallo centrato in x_0 su cui essa è analitica. È facile fare esempi di funzioni che sono analitiche su tutto $I\!\!R$ ma che danno luogo in ogni punto ad una serie di Taylor con raggio di convergenza finito.

Esempio 7.12.1 *Consideriamo la funzione esponenziale* $\exp : x \to e^x$, $\forall\ x \in I\!\!R$. *Se V è un qualunque intervallo chiuso e limitato, preso* $M = \max(\max_{x\in V} f(x), 1)$ *allora risulta:*
$$\forall x \in V, \forall\ n\ \in I\!\!N : \left|\exp^{(n)}(x)\right| = |e^x| \leq M \leq n!M^n.$$

Quindi l'esponenziale è una funzione analitica. Quando stabiliremo la formula per il calcolo del raggio di convergenza, vedremo facilmente che preso un qualunque punto iniziale x_0 essa risulta sviluppabile in serie di Taylor sull'intero $I\!\!R$.

Esempio 7.12.2 *Da quanto detto nell'esempio precedente per* $x_0 = 0$*, sviluppando l'esponenziale in serie di Mac Laurin si ha che:*

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n. \tag{7.12.19}$$

Quindi in particolare per $x = 1$ *si ottiene il numero di Neper:*

$$e = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}.$$

$\forall x,\ x_0 \in \mathbb{R}$*, applicando la formula* (7.12.19) *a* $x-\ x_0$ *si ottiene:*

$$e^x = e^{x_0} e^{x-x_0} = e^{x_0} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{x_0}}{n!}(x-x_0)^n.$$

Questa non ha bisogno di essere dedotta (come invece abbiamo fatto) da (7.12.19) *perché essa invece rappresenta lo sviluppo di Taylor dell'esponenziale attorno ad* x_0.

Esempio 7.12.3 *Consideriamo la funzione* $f : x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \frac{1}{x} \in \mathbb{R}$ *e consideriamo* $x_0 \neq 0$*. Studiamo lo sviluppo in serie di Taylor di tale funzione nel punto* x_0*.* $\forall k\ \in \mathbb{N}$ *risulta:*

$$f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k}{x^{k+1}} k!\ .$$

Se prendiamo ad esempio $x_0 > 0$ *e* $V = \left]\frac{1}{2}x_0, +\infty\right[$*, allora si ha:*

$$\forall x \in V, \forall\ n\ \in \mathbb{N} : \left|f^{(n)}(x)\right| = \left|\frac{n!}{x^{n+1}}\right| \leq \frac{2^{n+1} n!}{x_0^{n+1}} \leq M^n n!,$$

dove abbiamo preso $M = (\frac{2}{x_0})^2$.

Quindi f *è sviluppabile in serie di Taylor in* x_0 *e data l'arbitrarietà di* x_0*,* f *è analitica in* $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Calcoliamo direttamente il raggio di convergenza della serie di Taylor di f *in* x_0 *e deduciamo l'analiticità di* f *senza far ricorso al criterio* 3).

Ponendo $y = \dfrac{x}{x_0} - 1 = \dfrac{1}{x_0}(x - x_0)$*, possiamo scrivere:*

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x_0(y+1)} = \frac{1}{x_0} \sum_{n=0}^{+\infty} (-y)^n, \tag{7.12.20}$$

per $|y| < 1$*. Osserviamo che* $|y| < 1$ *significa:*

$$\left|\frac{x}{x_0} - 1\right| < 1$$

e cioè:

$$\frac{x}{x_0} - 1 \in \left]-1, 1\right[$$

cioè:

$$\frac{x}{x_0} \in]0,2[\quad \Leftrightarrow x \in]0,2x_0[\,.$$

Sostituendo in (7.12.20) *al posto di* y, $\frac{1}{x_0}(x-x_0)$ *otteniamo:*

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x} &= \frac{1}{x_0}\sum_{n=0}^{+\infty}(-\frac{1}{x_0})^n(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{x_0^{n+1}}(x-x_0)^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\frac{n!(-1)^n}{x_0^{n+1}}(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n.
\end{aligned}$$

Vediamo quindi che il dominio di convergenza è dato dall'intervallo $]0,2x_0[$. *In questo caso si tratta del più grande intervallo aperto centrato in* x_0 *contenuto nell'insieme di definizione.*

Esempio 7.12.4 *Riconducendoci all'esempio precedente, tramite una derivazione termine a termine, si vede che* $\frac{1}{x^2}$ *è anche sviluppabile in serie di Taylor in un punto* $x_0 > 0$ *sull'intervallo* $]0,2x_0[$. *Analogamente possiamo dimostrare la sviluppabilità della funzione logaritmica.*