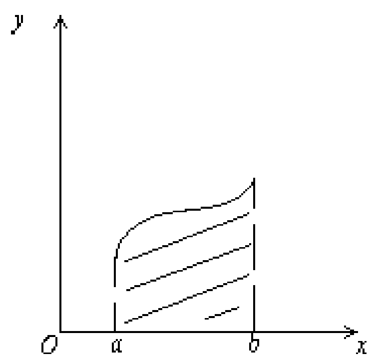
Capitolo 6

Integrazione.

6.1 Funzioni integrabili.

Siano $a, b \in I\!R$ ed $f : [a, b] \to I\!R$ una funzione limitata. Per semplicità incominciamo a dare il concetto di integrale per funzioni positive, caso in cui l'interpretazione geometrica è più semplice.
Si definisce *rettangoloide* $\mathcal{R}_f$ l'insieme delle coppie $(x, y) \in I\!R^2$ tali che $a \leq x \leq b$ e $0 \leq y \leq f(x)$.

Il rettangoloide è la parte di piano compresa fra l'intervallo $[a, b]$ e il grafico della funzione:



Anche per il concetto di integrale possiamo cominciare col dare una definizione informale allo scopo di partire da una conoscenza di tipo intuitivo.

Se ha senso parlare di area del rettangoloide $\mathcal{R}_f$, tale area si dice *integrale di f esteso ad* $[a, b]$ e si denota con il seguente simbolo:

$$\int_{[a,b]} f(x)\ dx.$$

Esempio 6.1.1 *Supponiamo che la funzione f sia costante, cioé:*

$$\forall\, x \in [a, b] :\ f(x) = c, \qquad c \in I\!R.$$

Allora, si verifica facilmente che:

$$\int_{[a,b]} f(x)\ dx = c\,(b-a).$$

Infatti il rettangoloide in questo caso è un rettangolo con base di lunghezza $(b-a)$ e altezza c.

Quando si può parlare di integrale, si può anche parlare di *valore medio* della funzione f in $[a,b]$, definito come:

$$\frac{1}{b-a}\int_{[a,b]} f(x)\ dx.$$

Graficamente il valore medio di f in $[a,b]$ rappresenta l'altezza del rettangoloide con base $[a,b]$ che ha la stessa area di $\mathcal{R}_f$.
Quindi, il valore medio è compreso tra l'eventuale minimo (in generale,estremo inferiore) m e l'eventuale massimo (in generale,estremo superiore) M della funzione f, cioé:

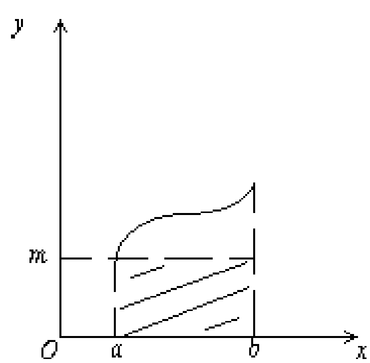
$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_{[a,b]} f(x)\,dx \leq M$$

e, quindi:

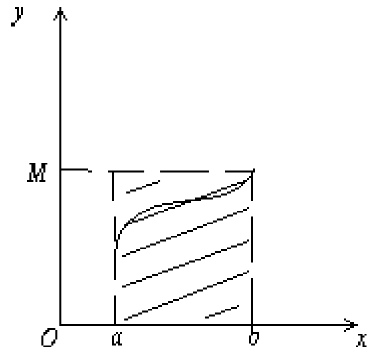
$$m(b-a) \leq \int_{[a,b]} f(x)\,dx \leq M(b-a) \qquad (1)$$

Quindi, senza fare alcune ipotesi su f , si può sempre parlare di area del rettangoloide $\mathcal{R}_f$ a meno di un errore pari a $(M-m)\,(b-a)$, che è la differenza fra la stima superiore e quella inferiore trovata nella diseguaglianza (1) . Esaminiamo graficamente la diseguaglianza (1) e la quantificazione dell'errore con cui questa diseguaglianza permette di individuare il valore dell'integrale, cioè la misura di $\mathcal{R}_f$.

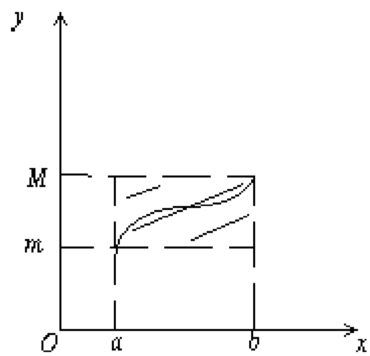
Esempio 6.1.2 *Considerata la funzione avente il grafico seguente:*



m è l'altezza del più grande rettangolo di base $[a,b]$ contenuto in $\mathcal{R}_f$; M è l'altezza del più piccolo rettangolo che contiene $\mathcal{R}_f$:



Il margine di errore $(M-m)(b-a)$ è l'area del rettangolo che si trova nella figura seguente:



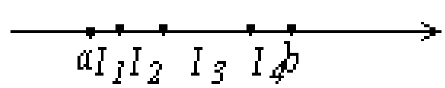
dato dalla differenza insiemistica fra i due rettangoli precedenti.

Questa stima si può migliorare dividendo l'intervallo $[a,b]$ in n intervallini I_i, $i = 1, 2, \cdots n$. Chiamando m_i l'eventuale minimo (in generale estremo inferiore) di f su I_i e M_i l'eventuale massimo (in generale estremo superiore) di f su I_i, si ottiene l'area del rettangoloide a meno di un errore stimabile con la somma:

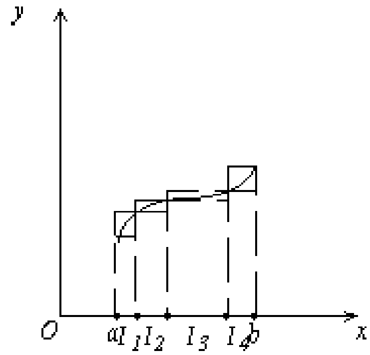
$$\rho = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\,|I_i|,$$

dove $|I_i|$ rappresenta la lunghezza dell'intervallino I_i.

Vediamo graficamente perché questo margine di errore è inferiore al precedente. Dividiamo l'intervallo $[a,b]$ in un numero finito di intervallini I_1, I_2, I_3, I_4 :



Il margine di errore fornito dalla formula (1) rappresenta l'area della riunione dei rettangoli che compaiono nella figura seguente:



Comparando questa figura con la precedente si vede come l'errore nel valutare l'area del rettangoloide si sia considerevolmente ridotto.

Diremo che la funzione f è integrabile quando si possono prendere partizioni di $[a, b]$ che consentono di avere margine di errore ρ arbitrariamente piccolo, cioè quando $\forall\, \varepsilon > 0$ è possibile effettuare una partizione dell'intervallo che porti a calcolare l'area del rettangoloide $\mathcal{R}_f$ a meno di un errore $\rho < \varepsilon$.

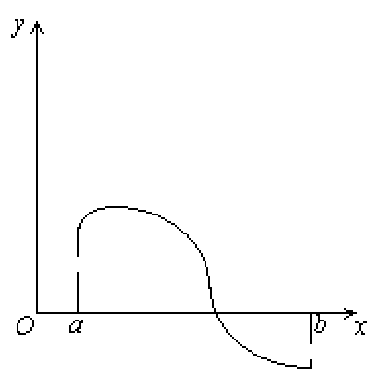
Tale area sarà quindi ottenuta come valore limite sia delle stime inferiori che delle stime superiori ottenute prendendo partizioni con valori di f che tendono a zero.

Tutte queste nozioni saranno precisate in seguito quando sarà stata acquisita l'opportuna terminologia.

Ci sono diversi modi di estendere il concetto di funzione integrabile al caso in cui f non sia positiva ma solo limitata. Uno dei modi consiste nel definire due rettangoloidi $\mathcal{R}_f^+$ ed $\mathcal{R}_f^-$ definiti come segue:

$$\mathcal{R}_f^+ = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \; a \le x \le b, 0 \le y \le f(x)\Big\}\,,$$

$$\mathcal{R}_f^- = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \; a \le x \le b, f(x) \le y \le 0\Big\}\,.$$

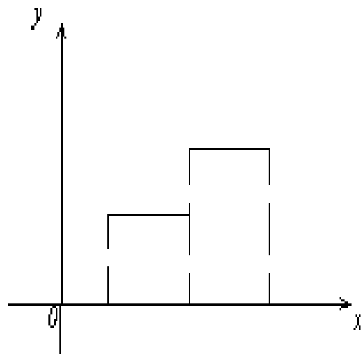


Geometricamente $\int_{[a,b]} f(x)\, dx$ è dato dalla differenza fra l'area di $\mathcal{R}_f^+$ e l'area di $\mathcal{R}_f^-$.

6.2 Proprietà delle funzioni integrabili.

È facile provare che le funzioni continue sono tutte integrabili e il lettore può convincersene facilmente guardando la figura precedente e considerando il fatto che prendendo partizioni molto fitte si ottiene un'area totale arbitrariamente piccola.

Occorre però puntualizzare che una funzione può anche essere integrabile senza essere continua. Infatti la funzione avente il seguente grafico:



che salta da un valore costante ad un altro è chiaramente integrabile perché $\mathcal{R}_f$ si può decomporre nella riunione di due rettangoli ed evidentemente non è continua.

L'integrabilità di questa funzione rientra nel fatto generale che le funzioni monotone sono sempre integrabili anche quando non sono continue. In generale si può provare che l'integrabilità di una funzione limitata dipende solo dall'insieme S dei suoi punti di discontinuità. Se S è opportunamente piccolo (in un senso che non preciseremo perché la cosa sarebbe al di là degli scopi di questo libro), come accade ad esempio quando S è finito, la funzione è integrabile. Se la funzione è continua allora $S = \emptyset$ e, quindi, l'integrabilità è assicurata.

Proposizione 6.2.1 *(Additività dell'integrale rispetto alla funzione) Siano $a, b \in \mathbb{R}$ ed $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ due funzioni integrabili; allora $f + g$ è integrabile e si ha che:*

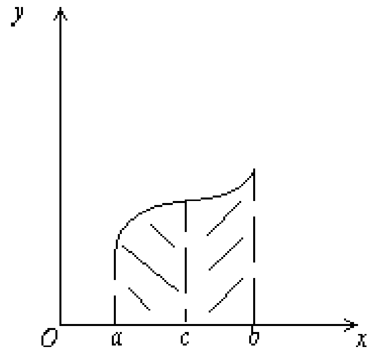
$$\int_{[a,b]} (f+g)(x)\,dx = \int_{[a,b]} f(x)\,dx + \int_{[a,b]} g(x)\,dx.$$

La dimostrazione di questa proprietà è semplice ma si può fare solo dopo aver dato una definizione formale di integrale.

Proposizione 6.2.2 *Siano $a, b \in \mathbb{R}$ ed $f : [a, b] \to \mathbb{R}$; se $c \in [a, b]$ allora:*
f è integrabile $\Leftrightarrow f_1 = f_{|[a,c]}$ ed $f_2 = f_{|[c,b]}$ sono integrabili ed inoltre si ha che:

$$\int_{[a,b]} f(x)\,dx = \int_{[a,c]} f_1(x)\,dx + \int_{[c,b]} f_2(x)\,dx.$$

Quest'ultima proposizione si può facilmente riconoscere dal punto di vista intuitivo. Infatti, nella seguente figura:



considerati i due rettangoloidi $\mathcal{R}_{f_1}$ ed $\mathcal{R}_{f_2}$, si vede facilmente che $\mathcal{R}_f$ è dato dalla loro riunione.

Proposizione 6.2.3 (*Proprietà di omogeneità*) *Siano* $a, b \in I\!R$, $f : [a, b] \to I\!R$ *una funzione integrabile ed* $\alpha \in I\!R$*; allora* αf *è integrabile e si ha che:*

$$\int_{[a,b]} \alpha f(x)\, dx = \alpha \int_{[a,b]} f(x)\, dx.$$

6.3 Integrali definiti.

Definizione 6.3.1 *Siano* A *un intervallo,* $f : A \to I\!R$*. Diremo che la funzione* f *è* misurabile *se* $\forall\, a, b \in A,\ a < b,\ f$ *risulta integrabile su* $[a, b]$.

Osservazione 6.3.1 *Se* A *è un intervallo chiuso e limitato il concetto di funzione misurabile equivale a quello di funzione integrabile. La definizione precedente è data per il caso di intervalli non chiusi o non limitati, per cui la questione dell'integrabilità così come l'abbiamo definita non ha senso.*

Osservazione 6.3.2 *Se* A *è un intervallo ed* $f : A \to I\!R$ *è una funzione continua o monotona, allora essa è misurabile.*

Definizione 6.3.2 *Siano* A *un intervallo ed* $f : A \to I\!R$ *una funzione misurabile; allora*
$\forall\, a, b \in A$ *si definisce* integrale definito di f tra a e b*:*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \begin{cases} \int_{[a,b]} f(x)\, dx & se\ a < b \\ -\int_{[b,a]} f(x)\, dx & se\ b \leq a \end{cases}$$

In ogni caso, si dimostra che:

$$\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx.$$

La proprietà di additività rispetto al dominio può essere facilmente estesa al caso di integrali definiti: in tal caso, addirittura, la proprietà si esprime più agevolmente senza bisogno di restrizioni sulla scelta degli estremi.

Proposizione 6.3.1 (*Proprietà di additività per gli integrali definiti) Siano A un intervallo $a, b, c \in A$ ed $f : A \to I\!R$ una funzione misurabile, allora:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Dim. La formula è equivalente a:

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx + \int_b^a f(x)\,dx = 0,$$

che esprime una condizione chiaramente simmetrica rispetto ai punti a, b e c. Quindi, scambiando l'ordine dei termini ci si può facilmente riportare al caso $a \leq c \leq b$ per cui la formula ha lo stesso significato della formula di additività (58).

Definizione 6.3.3 *Siano A un intervallo, $a, b \in A$ ed $f : A \to I\!R$ una funzione misurabile; si definisce* valore medio di f tra a e b *il numero dato da:*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \qquad se \quad a \neq b.$$

Questo concetto si riduce a quello esaminato all'inizio del capitolo, quando $a < b$, caso a cui ci si può sempre ricondurre scambiando i due punti. Quindi, anche in questo caso si può dire che il valore medio è compreso fra l'eventuale minimo e l'eventuale massimo della funzione come riassumiamo dal seguente risultato:

Teorema 6.3.1 *(Teorema della media) Siano A un intervallo, $a, b \in A$ ed $f : A \to I\!R$ una funzione misurabile. Sia m l'estremo inferiore di f sull'intervallo di estremi a e b ed M l'estremo superiore di f sullo stesso intervallo; allora:*

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq M.$$

6.4 Funzione integrale e primitiva di una funzione.

Definizione 6.4.1 *Siano A un intervallo, $f : A \to I\!R$ una funzione misurabile, $x_0 \in A$ e $c_0 \in I\!R$; si definisce* funzione integrale di f di punto iniziale x_0 e valore iniziale c_0 *la funzione $F : A \to I\!R$, definita nel seguente modo:*

$$\forall\, x \in A : \; F(x) = c_0 + \int_{x_0}^x f(t)\,dt.$$

In base a tale definizione, si dimostra che:

1. $F(x_0) = c_0$;

2. $\forall\, x, y \in A: \; F(y) - F(x) = c_0 + \int_x^y f(t)\, dt.$
   Dim. Infatti siano $x, y \in A$; si ha che:
   $F(y) - F(x) = (c_0 + \int_{x_0}^y f(t)\, dt) - (c_0 + \int_{x_0}^x f(t)\, dt =$
   $= \int_{x_0}^y f(t)dt - \int_{x_0}^x f(t)dt = \int_{x_0}^y f(t)\, dt + \int_x^{x_0} f(t)dt = \int_x^y f(t)\, dt.$

3. Sia $\overline{x} \in A$, allora:

$$\forall\, x \in A, x \neq \overline{x}: \; \frac{F(x) - F(\overline{x})}{x - \overline{x}} = \frac{1}{x - \overline{x}} \int_{\overline{x}}^{x} f(t)\, dt\,,$$

   che è il valore medio di f tra $\overline{x}$ ed x.

Se f oltre ad essere misurabile in A è anche continua in $\overline{x}$ si ha che:

$$lim_{x \to \overline{x}} \frac{F(x) - F(\overline{x})}{x - \overline{x}} = f(\overline{x}).$$

Quindi, F è derivabile in $\overline{x}$ e $F'(\overline{x}) = f(\overline{x})$.

Osservazione 6.4.1 *Se si fa l'ipotesi che f è continua su tutto A, dall'osservazione si deduce che f è anche misurabile in A e che quindi dati $x_0 \in A$, $c_0 \in I\!R$ ha senso considerare F.*

Per l'osservazione precedente, F risulta derivabile in ogni punto ed inoltre $\exists\, F' = f$.

Definizione 6.4.2 *Se A è un sottoinsieme di $I\!R$ privo di punti isolati, se g, $f: A \to I\!R$ sono due funzioni, se g è derivabile e $g' = f$ allora diremo che g è una primitiva di f.*

Date comunque due funzioni g ed f (come nella definizione precedente), usando la terminologia appena introdotta, potremo esprimere in maniera del tutto equivalente la frase "f è la derivata di g" dicendo che "g è una primitiva di f".

Notiamo che nell'affermazione "f è la derivata di g", il termine "derivata" è accompagnato dall'articolo determinativo. Questo è dovuto al fatto che la derivata di una funzione derivabile è unica. Al contrario, nell'espressione equivalente "g è una primitiva di f" il termine "primitiva" è accompagnato dall'articolo indeterminativo perché la primitiva di una funzione non è univocamente determinata, infatti:

Proposizione 6.4.1 *Se A è un sottoinsieme di $I\!R$ privo di punti isolati, se g, $f: A \to I\!R$ sono due funzioni, se g è una primitiva di f e $c \in I\!R$, allora $g + c$ è ancora una primitiva di f.*

La proposizione precedente è una ovvia conseguenza del fatto che la derivata di un termine costante è nullo.

Ci si può chiedere se aggiungendo a g una costante arbitraria si ottengono tutte le primitive di f. La risposta è affermativa solo nel caso in cui A è un intervallo grazie ai corollari del Teorema di Lagrange.

Osservazione 6.4.2 *Se A è un intervallo di ampiezza maggiore di zero, se g_1, g_2, $f : A \to I\!R$ sono tre funzioni e se g_1 e g_2 sono due primitive di f allora $g_1 - g_2$ è costante.*

Dim. $(g_1 - g_2)' = g_1' - g_2' = f - f = 0$. *Allora, per il Corollario 53 del Teorema di Lagrange, $g_1 - g_2$ è costante.*

Quindi, quando A è un intervallo , nota una primitiva g di una funzione f tutte le primitive di f sono della forma $g + c$ al variare di $c \in I\!R$.

Puntualizziamo ancora che questo non è vero se A non è un intervallo.

Vediamo anche un ulteriore modo di esprimere questo fatto:

Osservazione 6.4.3 *Sia A è un intervallo di ampiezza positiva, siano g_1, g_2, $f : A \to I\!R$ tre funzioni e siano g_1 e g_2 due primitive di f; se x_0 è un punto di A fissato ad arbitrio allora:*

$$g_1 = g_2 \Leftrightarrow g_1(x_0) = g_2(x_0).$$

Dim. Essendo $g_1 - g_2$ una funzione costante, è sempre nulla se e solo se si annulla in x_0.

Dall'osservazione 69 si vede che una funzione continua definita su un intervallo ha sempre primitive perché ogni funzione integrale risulta esserne una primitiva. L'osservazione precedente mostra come le funzioni integrabili siano tutte le primitive di f.

Proposizione 6.4.2 *Siano A un intervallo, $f : A \to I\!R$ una funzione continua; se g è una primitiva di f, allora $\forall\, x_0 \in A$: g è la funzione integrale di f di punto iniziale x_0 e valore iniziale $c_0 = g(x_0)$. Quindi, ogni primitiva è una funzione integrale.*

Dim. Sia F la funzione integrale di f di punto iniziale x_0 e valore iniziale $c_0 = g(x_0)$ (ha senso perché f è continua e, quindi, misurabile). Quindi, F e g risultano due primitive di f che assumono lo stesso valore in x_0 e quindi sono uguali.

Quest'ultima osservazione permette di affermare che il concetto di funzione integrale e quello di primitiva risultano totalmente equivalenti. Questo consente il calcolo di integrali definiti attraverso primitive.

Teorema 6.4.1 *Siano A un intervallo, $f : A \to I\!R$ una funzione continua; se g è una primitiva di f, allora:*

$$\forall\, a, b \in A : \int_a^b f(x)\, dx = g(b) - g(a).$$

Questa proprietá è stata dimostrata per le funzioni integrali nella Proposizione. Per quanto appena detto, assumere che g sia una funzione integrale di f o assumere che g sia una primitiva di f è esattamente la stessa cosa.

Esempio 6.4.1 *Sia $A = I\!R$ ed $f : I\!R \to I\!R$ la funzione definita nel seguente modo:*

$$\forall\, x \in I\!R :\ f(x) = x^2.$$

Se si considera, inoltre, la funzione $g : I\!R \to I\!R$ tale che:

$$\forall x \in I\!R : g(x) = \frac{1}{3}\, x^3,$$

si vede che essa è proprio una primitiva della funzione f, infatti:

$$g'(x) = \frac{1}{3}\, 3\, x^2 = f(x).$$

Fissati $a, b \in I\!R$, calcoliamo:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b x^2\, dx = (\frac{1}{3}\, x^3)_{x=b} - (\frac{1}{3}\, x^3)_{x=a} = [\frac{1}{3}\, x^3]_a^b = \frac{1}{3}(b^3 - a^3).$$

In particolare:

$$\int_2^5 x^2\, dx = [\frac{1}{3}\, x^3]_2^5 = \frac{1}{3}(125 - 8) = 39.$$

Prima di terminare questo argomento puntualizziamo ancora una volta l'importanza dell'ipotesi di continuità su f. Per la verità l'ultimo risultato rimane vero anche in assenza di tale ipotesi ma non rientra negli scopi di questo testo stabilirlo in casi di massima generalità.

Intanto osserviamo che non tutte le funzioni misurabili sono continue. Infatti, dimostreremo in seguito la seguente proposizione:

Proposizione 6.4.3 *Tutte le funzioni monotone definite su un intervallo risultano misurabili quindi, per parlare di funzioni integrali basta la monotonia della funzione*

Pertanto si può parlare di funzioni integrali anche per funzioni che abbiano discontinuità di prima specie.

D'altro canto abbiamo visto che la derivata di una funzione non presenta mai discontinuità di prima specie, quindi tali funzioni non hanno una primitiva. Allora, non sempre l'esistenza di una funzione integrale assicura l'esistenza di primitive.

Proposizione 6.4.4 *Siano A un intervallo, $f : A \to I\!R$ una funzione monotona. Allora, f è dotata di primitiva se e solo se f è continua.*
Dim. Se la funzione f è continua, allora f ha primitive. Viceversa, se f ha primitive, ricordando che il Teorema di Rolle è equivalente al Teorema degli zeri per le derivate, f manda intervalli in intervalli e quindi, $f(A)$ è un intervallo; essendo la funzione f monotona, essa deve necessariamente essere continua.

Osservazione 6.4.4 *Sia $A \subset I\!R$ un intervallo, $f : A \to I\!R$ una funzione di classe $\mathcal{C}^1$, cioè derivabile con derivata prima continua. Allora, si dimostra che:*

$$\forall a, b \in A : \, f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)\, dx.$$

Dim. Basta applicare la proposizione precedente, tenendo presente che f è una primitiva di f'.

Proposizione 6.4.5 *(Formula di cambio di variabile degli integrali definiti) Sia A un intervallo, $\varphi : A \to I\!R$ una funzione di classe $\mathcal{C}^1$. Allora, $\varphi(A)$ è ancora un intervallo. Si consideri: $f : \varphi(A) \to I\!R$ una funzione continua. Quindi, in particolare, f è misurabile su $\varphi(A)$ e $f \circ \varphi$ é continua su A e quindi misurabile su A. Allora, si ha che :*

$$\forall\, a, b \in A : \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\, dx = \int_a^b f(\varphi(t))\, \varphi'(t)\, dt.$$

Dim. Sia F una primitiva della funzione f; innanzitutto, si vede che $F \circ \varphi$ è una funzione di classe $\mathcal{C}^1$perché:

$$(F \circ \varphi)'(t) \; = (f(\varphi(t))\, \varphi'(t).$$

Quindi:
$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\, dx \; = \; F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) \; = \; F \circ \varphi(b) - F \circ \varphi(a) \; = \; \int_a^b (F \circ \varphi)'(t)\, dt \; = \int_a^b (F'(\varphi(t))\, \varphi'(t)\, dt = \int_a^b (f(\varphi(t))\, \varphi'(t)\, dt.$

Il cambio di variabile formalmente si ottiene ponendo $x = \varphi(t)$; per far variare x tra $\varphi(a)$ e $\varphi(b)$, t deve variare tra a e b. Quindi, se prendiamo una partizione molto fitta dell'intervallo $[a, b]$ l'ampiezza del generico intervallino è rappresentata come al solito dall'incremento dt. Tramite la φ otteniamo una partizione corrispondente sull'intervallo $[\varphi(a), \varphi(b)]$ e l'ampiezza del generico intervallino di tale partizione viene indicato con dx.

Prendendo un opportuno t nell'intervallino si ha che:

$$dx = \varphi'(t)\, dt.$$

Ponendo $x = \varphi(t)$ abbiamo quindi:

$$f(x)\; dx = f(\varphi(t))\; \varphi'(t)\, dt.$$

Al variare di t fra a e b e, conseguentamente, x fra $\varphi(a)$ e $\varphi(b)$ abbiamo che:

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\, dx = \int_a^b (f(\varphi(t))\, \varphi'(t)\, dt.$$