Capitolo 5

Derivate.

5.1 Concetto di derivata e sua interpretazione geometrica.

Fissiamo $a, b \in I\!R$ e consideriamo la funzione $f : I\!R \to I\!R$ definita nel seguente modo:

$$f : x \to ax + b.$$

Una funzione di questo tipo si chiama *funzione lineare affine*. I grafici delle funzioni lineari affini sono dati da tutte le possibili rette non verticali. Consideriamo un punto di coordinate (x_0, y_0); per imporre il passaggio del grafico della funzione per tale punto, basta sostituire le coordinate del punto nell'equazione della funzione lineare affine e, quindi, otteniamo:

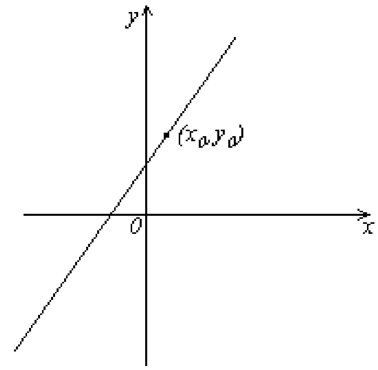
$$a\, x_0 + b = y_0 \Rightarrow b = y_0 - a\, x_0$$

Sostituendo il valore ottenuto nella funzione di partenza otteniamo la formula che rappresenta la generica funzione lineare che in x_0 assume il valore y_0 e cioé:

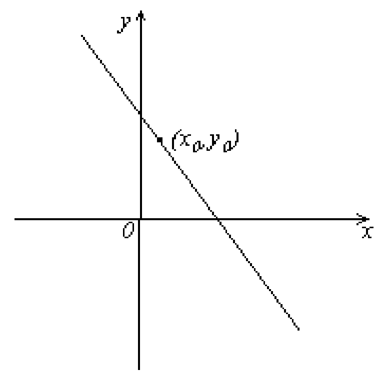
$$f : x \to a\,(x - x_0) + y_0.$$

Il coefficiente a indica la pendenza della retta, cioé quanto questa retta sta salendo. Abbiamo già osservato come il fatto che una funzione sia crescente o decrescente in un punto si possa apprezzare graficamente vedendo se il grafico della funzione in quel punto è in salita o in discesa. Questa relazione può anche essere quantificata: la velocità con cui la funzione cresce corrisponde, graficamente, alla pendenza con cui il grafico della funzione sale.

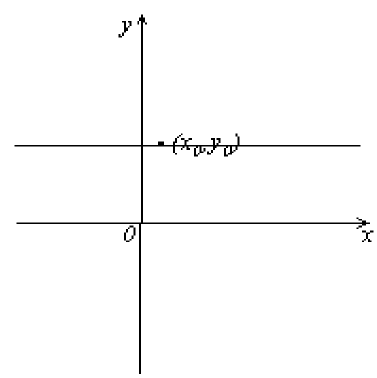
Quindi, se $a > 0$ la retta sale, come si può vedere graficamente:



Se $a < 0$ la retta scende:



Per $a = 0$ si ottiene la retta orizzontale passante per il punto (x_0, y_0) :



Le funzioni lineari affini sono quindi quelle funzioni che "crescono"a velocità costante e il coefficiente lineare a fornisce appunto la misura di questa velocità. Si può parlare di velocità di crescita anche per una funzione qualsiasi in un determinato punto dell'insieme di definizione?

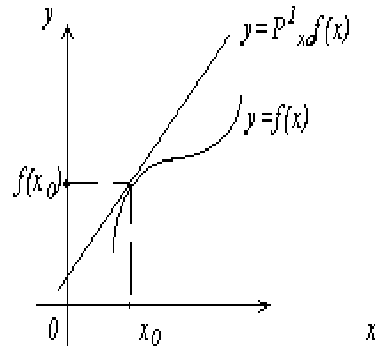
In caso affermativo ci aspettiamo, naturalmente, una velocità di crescita non costante se la funzione non è lineare affine.

Se siamo comunque in grado di valutare che in un certo punto x_0 la funzione ha una velocità di crescita a, la discussione precedente ci permette di dire che esiste una funzione lineare affine che passa per il punto $(x_0, f(x_0))$ e ha velocità di crescita costante a.

Si tratta della funzione:

$$P^1_{x_0}f : x \to a(x - x_0) + f(x_0).$$

Si intuisce graficamente che poichè la funzione f e la funzione lineare affine di f passano per lo stesso punto $(x_0, f(x_0))$ con la stessa velocità di crescita, cioè con la stessa pendenza, il grafico di $t_{x_0}f$ è la retta *tangente* al grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$:



Quando parliamo di velocità di crescita in un punto, lo facciamo nel senso di velocità istantanea. Se consideriamo un punto $x \neq x_0$, la velocità media di crescita della funzione fra x_0 e x è data dal rapporto incrementale:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

che rappresenta l'incremento della funzione in rapporto all'incremento della variabile, graficamente, il coefficiente lineare della retta secante che attraversa il grafico nei punti $(x_0, f(x_0))$ e $(x, f(x))$. La velocità istantanea (quando ha senso parlarne) si definisce come limite della velocità media su intervalli molto piccoli e cioè come limite della velocità di crescita media fra x_0 e x quando x tende a x_0.

Chiameremo questa velocità di crescita istantanea, quando esiste, *derivata di f in x_0* e la denoteremo nel seguente modo:

$$f'(x_0).$$

Il discorso precedente può essere, quindi, sintetizzato nella seguente definizione:

Definizione 5.1.1 *Sia $A \subset I\!R$, $f : A \to I\!R$, $x_0 \in A$ e di accumulazione per A. Si dice che f è derivabile in x_0 se esiste finito il limite del rapporto incrementale relativo ai punti x e x_0 della funzione f. Tale limite si dice* derivata di f in x_0 *e si denota nel seguente modo: $f'(x_0)$.*

Osservazione 5.1.1 *La derivata della funzione f in un punto è un numero; esso rappresenta il coefficiente angolare della retta tangente che è l'unica retta passante per quel punto ed avente la stessa velocitá di crescita della funzione. Quindi, la derivata, se esiste, è calcolata in un punto del dominio della funzione che è anche di accumulazione ed è un numero reale. Se, invece, il limite del rapporto incrementale è infinito allora, la retta tangente al grafico esiste ma è una retta verticale. In quest'ultimo caso ci riserviamo, comunque, di parlare ancora di derivata di f e di scrivere $f'(x_0) =^+_- \infty$ a seconda dei casi.*

Osservazione 5.1.2 *Si puó anche parlare di derivata sinistra e derivata destra della funzione f nel punto x_0 definite, se esistono, rispettivamente nel seguente modo:*

$$lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'_-(x_0)$$

$$lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'_+(x_0).$$

L'esistenza del limite sinistro (o destro) esprime l'esistenza della tangente soltanto nel ramo del grafico di f sinistro di x_0 (o nel ramo destro), equivalentemente, il limite sinistro (o destro) misura la pendenza della funzione soltanto nel ramo del grafico di f a sinistra di x_0 (o a destra).

Osservazione 5.1.3 *Ricordando alcune proprietà sui limiti, segue che f è derivabile in un punto x_0 se e solo se f è derivabile a sinistra e a destra in x_0 e, in tal caso, la derivata di f in x_0 è uguale alla derivata sinistra e destra di f in x_0.*

Osservazione 5.1.4 *Se f è derivabile in un punto x_0 allora f continua in x_0.*

5.2 Segno della derivata e monotonia puntuale.

Conoscere la velocità di crescita della funzione f in x_0 permette, in particolare, di sapere se la funzione sta crescendo oppure no. Infatti, se la velocità di crescita è positiva, la funzione sta sicuramente crescendo mentre, se la velocità di crescita è negativa, la funzione sta sicuramente decrescendo.

Precisiamo questo concetto e dimostriamolo formalmente:

Proposizione 5.2.1 *Se f è derivabile a sinistra in x_0 e se $f'_-(x_0) > 0$, allora f è strettamente crescente a sinistra in x_0.*

Proposizione 5.2.2 *Se f è derivabile a destra in x_0 e se $f'_+(x_0) > 0$, allora f è strettamente crescente a destra in x_0.*

Proposizione 5.2.3 *Se f è derivabile a sinistra in x_0 e se $f'_-(x_0) < 0$, allora f è strettamente decrescente a sinistra in x_0.*

Proposizione 5.2.4 *Se f è derivabile a destra in x_0 e se $f'_+(x_0) < 0$, allora f è strettamente decrescente a destra in x_0.*

Dimostriamo la prima delle quattro proposizioni:
Dim. *Per il teorema della permanenza del segno sappiamo che $\exists V$ intorno sinistro di x_0 t. c. $\forall x \in A \cap V \setminus \{x_0\}$: $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > 0$.*
Poiché stiamo considerando un intorno sinistro del punto x_0, possiamo limitarci a considerare tutti gli $x \in A \cap V$, $x < x_0$. Per tali x, si ha che: $x - x_0 < 0 \Rightarrow f(x) - f(x_0) < 0 \Rightarrow f(x) < f(x_0)$. Quindi, f é strettamente crescente a sinistra in x_0.

In particolare:

Proposizione 5.2.5 *Se f è derivabile in x_0 e se $f'(x_0) > 0$ allora f é strettamente crescente in x_0.*

Proposizione 5.2.6 *Se f è derivabile in x_0 e se $f'(x_0) < 0$ allora f é strettamente decrescente in x_0.*

Osservazione 5.2.1 *L'informazione più debole $f'(x_0) \geq 0$ non permette di dire niente sulla crescenza o decrescenza della funzione.*

La proposizione precedente è, come si può vedere dalla dimostrazione, un risultato di permanenza del segno. Può anche essere esposto, in maniera equivalente, anche in forma di passaggio al limite:

Proposizione 5.2.7 *Se f non è strettamente decrescente in x_0 e se $\exists\, f'(x_0)$, allora $f'(x_0) \geq 0$.*

Dim. *Infatti, se fosse per assurdo $f'(x_0) < 0$, allora la funzione f sarebbe strettamente decrescente in x_0 per l'osservazione precedente.*

Proposizione 5.2.8 *Se f non è strettamente crescente in x_0 e se $\exists\, f'(x_0)$, allora $f'(x_0) \leq 0$.*

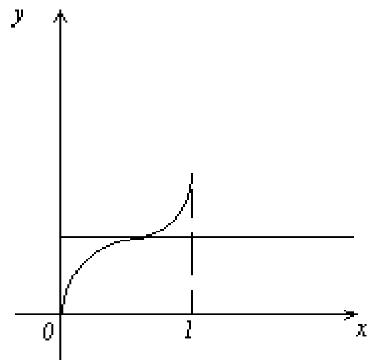
Corollario 5.2.1 *Se f è crescente in x_0 e se $\exists\, f'(x_0)$, allora $f'(x_0) \geq 0$.*

Corollario 5.2.2 *Se f è decrescente in x_0 e se $\exists\, f'(x_0)$, allora $f'(x_0) \leq 0$.*

Corollario 5.2.3 *Se f non è strettamente crescente nè strettamente decrescente in x_0 e se $\exists\, f'(x_0)$, allora $f'(x_0) = 0$.*

L'ultimo corollario si applica in particolare ai punti di massimo o di minimo locale interni o, più in generale, di accumulazione sia a sinistra che a destra.

Esempio 5.2.1 *Supponiamo di avere una funzione* $f : [0,1] \to I\!R$ *tale che* $\forall x \in]0,1[$: $f'(x) \neq 0$. *Allora, per l'osservazione 5.1.4 è possibile applicare il teorema di Weierstrass che garantisce l'esistenza di un punto di massimo per* f *che sicuramente non é interno.*
Se supponiamo che $\exists x \in]0,1[$ *t. c.* $f'(x) = 0$, *comunque non è detto che tale punto sia un punto di massimo o di minimo locale interno, come si può vedere dal seguente grafico:*



5.3 Differenziale.

All'inizio di questo capitolo abbiamo dato l'equazione della retta tangente $P^1_{x_0}f$ in un punto in cui la funzione ha una velocità di crescita a.

Adesso sappiamo che l'esistenza di tale velocità di crescita corrisponde alla derivabilità della funzione nel punto e che a è dato da $f'(\ x_0)$. Sostituendo a nella definizione di $P^1_{x_0}f$ si ottiene:

$$P^1_{x_0}f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0) = f(x_0) + d_{x_0}f(x),$$

dove si è posto :

$$d_{x_0}f(x) = f'(x_0)\,(x - x_0),$$

che prende il nome di *differenziale di ordine 1 di* f *in* x_0 o, più semplicemente, *differenziale di* f *in* x_0.

La quantità $f(x_0)$, che rappresenta semplicemente il valore della funzione nel punto, prende il nome di *valore iniziale di* f *in* x_0 o di *differenziale di ordine 0 di* f *in* x_0.

Alla luce di questa terminologia, il valore di $P^1_{x_0}f$ è dato dalla somma del differenziale di ordine 0 e di quello di ordine 1 o, in termini equivalenti, dalla somma del valore iniziale di f e del suo differenziale.

Introduciamo, ora, il concetto di resto r_1 della funzione f in x_0 definito come la differenza fra la funzione f e la funzione $P^1_{x_0}f$ che ha come grafico la retta tangente, cioè:

$$r_1(x) = f(x) - P^1_{x_0}f(x).$$

Naturalmente, questo dà luogo alla decomposizione:

$$f(x) = P^1_{x_0} f(x) + r_1(x),$$

che può essere anche scritta ancora più esplicitamente come:

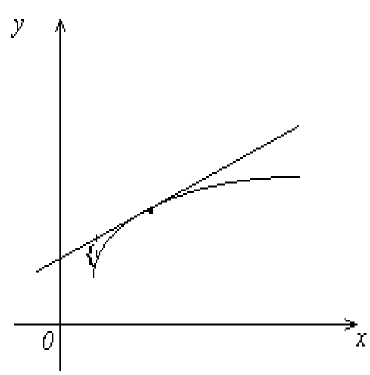
$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0) + r_1(x).$$

Chiameremo questa formula *"decomposizione canonica di f attorno al punto di differenziabilità x_0".*

Notiamo quindi che la decomposizione di una funzione vicino ad un punto di differenziabilità è costituita da tre termini:

1. un termine costante $f(x_0)$, dato dal valore iniziale;
2. il termine lineare $d_{x_0} f(x) = f'(x_0)\,(x - x_0)$, costituito dal differenziale che ha come coefficiente il valore della derivata;
3. il resto r_1, che chiameremo *resto del primo ordine.*

Analizziamo l'ultimo termine: graficamente r_1 rappresenta la distanza in verticale del punto $(x, f(x))$ dal grafico della retta tangente:



Dal disegno si può osservare come, non solo $r_1(x)$ tende a zero quando x tende a x_0, ma addirittura è una quantità piccola anche in proporzione allo stesso incremento della variabile, $x - x_0$.

Più precisamente:

Proposizione 5.3.1 *Sia $a \in \mathbb{R}$ e sia $r(x) = f(x) - f(x_0) - a\,(x - x_0)$, allora:*

1. $r(x_0) = f(x_0) - (f(x_0) + a(x_0 - x_0)) = 0;$
2. $a = f'(x_0)$ se e solo se $\frac{r(x)}{x - x_0}$ tende a zero quando x tende a x_0.

Quest'ultima proprietà esprime il fatto, a cui abbiamo accennato prima, che $r(x)$ tende a zero piú velocemente di $x - x_0$. Questo fatto si esprime dicendo che $r(x)$ è un infinitesimo di ordine maggiore di uno.

Quindi, r_1 che è ottenuto prendendo $a = f'(x_0)$, è un infinitesimo di ordine superiore a 1.

Il ragionamento precedente mostra che se prendiamo la differenza r fra la funzione f e la funzione che ha per grafico una generica retta passante per $(x_0, f(x_0))$, r è un infinitesimo di ordine maggiore di 1 solo quando questa retta è tangente al grafico e cioè solo quando il coefficiente lineare a coincide con il valore della derivata. Quindi, se sappiamo che esistono $a, b \in I\!R$ tale che:

$$r(x) = f(x) - b - a(x - x_0),$$

o, equivalentamente:

$$f(x) = b + a(x_0 - x_0) + r(x),$$

risulta che $r(x)$ è un infinitesimo di ordine maggiore di 1 se e solo se $f(x_0) = b$ e $f'(x_0) = a$.

Quindi, la decomposizione della funzione in un termine costante più un termine lineare più un infinitesimo di ordine maggiore di 1 risulta essere del tutto equivalente alla differenziabilità di f.

Usando la terminologia di differenziale di ordine o e di ordine 1 possiamo, infine, esprimere la decomposizione:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0) + r_1(x), \qquad (*)$$

dicendo che la fuzione f è decomponibile nella somma dei due differenziali e di un resto r_1 che risulta un infinitesimo di ordine maggiore di 1.

Osservazione 5.3.1 *r, in quanto infinitesimo, risulta continua in x_0. Il valore iniziale e il differenziale sono, ovviamente, due funzioni continue (infatti, la prima è costante e la seconda è lineare), quindi la decomposizione $(*)$ mostra anche chiaramente che ogni funzione differenziabile in un punto x_0 è anche continua.*

Esempio 5.3.1 *Consideriamo la funzione $f(x) = x^2$, definita in tutto $I\!R$ ed a valori in $I\!R$. Prendiamo un punto $x_0 \in I\!R$ e consideriamo l'equazione della retta che rappresenta la funzione:*

$$x \to {x_0}^2 + 2\,x_0\,(x - x_0).$$

Con gli strumenti della geometria analitica si può provare che la retta di cui sopra risulta essere tangente al grafico della funzione f nel punto di coordinate $(x_0, f(x_0))$.

tangente in tale punto

Consideriamo la decomposizione di f nel punto x_0, cioé:

$$f(x) = {x_0}^2 + 2\,x_0\,(x - x_0) + r(x).$$

Con calcoli algebrici ricaviamo che:

$$f(x) = x^2 = (x_0 + (x - x_0))^2 = {x_0}^2 + 2\,x_0\,(x - x_0) + (x - x_0)^2,$$

E vediamo subito che quest'ultima è proprio la decomposizione trattata in questo paragrafo. Infatti, $r(x) = (x - x_0)^2$ *è un infinitesimo di ordine due e, per quanto è stato detto prima, segue che* $f'(x_0)$ *esiste ed è data da* $2\,x_0$.

5.4 Funzione derivata. Derivate di ordine superiore.

Sia $A \subset I\!R$ un insieme privo di punti isolati:

Definizione 5.4.1 *Una funzione* $f : A \to I\!R$ *si dice* derivabile *se essa é derivabile in tutti i punti di* A. *Più in generale, se* $B \subset A$, *diremo che* f *è derivabile in* B *per dire che* f *è derivabile in tutti i punti di* B.

Per quanto visto alla fine del paragrafo precedente,una funzione derivabile è anche continua.

Osservazione 5.4.1 *Quando una funzione* f *è derivabile, si puó considerare la* funzione derivata *che è la funzione definita nel seguente modo:*

$$x_0 \in A \to f'(x_0).$$

Ovviamente, la funzione derivata può essere indicata senza problemi con il seguente simbolo:f'.

Osservazione 5.4.2 *É importante osservare che i concetti di funzione derivata e di derivata in un punto sono totalmente differenti perché la derivata in un punto é, come è stato giá detto, un numero mentre la funzione derivata é una funzione.*

Definizione 5.4.2 *Se* $f : A \to I\!R$ *è derivabile e se* $f' : A \to I\!R$ *è a sua volta derivabile, si puó considerare la derivata di* f', *a sua volta una funzione* $(f')'$ *che prende il nome di* derivata seconda di f; *essa si denota con:* f''.

In generale, si puó derivare una funzione $n-volte$ ottenendo la *derivata n-esima di* f che si denota con: $f^{(n)}$. Non si può definire, invece, in maniera iterativa, il concetto di funzione derivabile $n-volte$ in un punto. Infatti, derivando una funzione in un punto si ottiene, come sappiamo, un numero e non una funzione. Non si può, quindi, derivare ulteriormente. Il concetto di funzione derivabile $n - volte$ in un punto esiste e si definisce nel seguente modo:

Definizione 5.4.3 *Una funzione* $f : A \to I\!R$ *si dice* derivabile n-volte $(n \geq 1)$ in $x_0 \in A$ *se* $\exists V$ *intorno di* x_0 su A, *privo di punti isolati, tale che* f *risulta derivabile* $(n-1)$ *volte in* V *e la derivata* $f^{(n-1)}$ *è a sua volta derivabile in* x_0.

5.5 Operazioni sulle derivate.

Componendo funzioni derivabili, in generale, si ottengono funzioni derivabili e il calcolo della derivata può essere effettuato attraverso le derivate delle funzioni da comporre. Il caso più semplice è costituito dalla somma di due funzioni derivabili.

Proposizione 5.5.1 *Consideriamo $A \subset I\!R$, f, $g : A \to I\!R$ ed $x_0 \in A$, x_0 punto di accumulazione per A. Se $\exists$ $f'(x_0)$, $g'(x_0)$ e sono finiti, allora $\exists$ $(f+g)'(x_0)$ e si ha che:*

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

La proprietà analoga per quello che riguarda il prodotto di due funzioni è meno ovvia; possiamo interpretarla intuitivamente dicendo che questa derivata va calcolata in due tempi, derivando separatamente ciascuno dei due fattori senza modificare l'altro e sommando i due contributi che così si ottengono.

Proposizione 5.5.2 *Consideriamo $A \subset I\!R$, $f, g : A \to I\!R$ ed $x_0 \in A$, x_0 punto di accumulazione per A. Se $\exists$ $f'(x_0)$, $g'(x_0)$ e sono finiti, allora $\exists$ $(f\,g)'(x_0)$ e si ha che:*

$$(f\,g)'(x_0) = f'(x_0)\,g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

La derivata di un prodotto non è, dunque, uguale al prodotto delle due derivate. Il caso in cui le derivate delle due funzioni vanno semplicemente moltiplicate si riscontra quando si va a derivare una funzione composta $g \circ f$. E', però, importante osservare che la derivata della prima funzione f va calcolata nel punto di derivabilità x_0 mentre la derivata di g va calcolata nel punto immagine $f(x_0)$ ($g'(x_0)$, in generale, non avrebbe senso).

Proposizione 5.5.3 *Consideriamo $A, B, C \subset I\!R$, $f : A \to B$, $g : B \to C$, $x_0 \in A$, x_0 punto di accumulazione per A e $y_0 \in B$, y_0 punto di accumulazione per B. Supponiamo inoltre che $y_0 = f(x_0)$. Se $\exists$ $f'(x_0), g'(y_0)$ e sono finiti, allora $\exists$ $(g \circ f)'(x_0)$ e si ha che:*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))\,f'(x_0)$$

Quindi, in generale se f e g sono due funzioni derivabili, allora $g \circ f$ é derivabile e si ha che:

$$(g \circ f)' = (g' \circ f)\,f'.$$

Osserviamo che quest'ultima formula può sembrare poco naturale se non vista alla luce della proposizione precedente.

La formula afferma, semplicemente, che la derivata della funzione composta $g \circ f$ si ottiene moltiplicando f' e g'. Naturalmente, g' è definita su B e non su A quindi il valore di g' che va moltiplicato per $f'(x)$ è quello assunto nel punto $f(x) \in B$.

Le suddette formule permettono di ricondurre il calcolo delle derivate di tutte le funzioni elementari a pochi casi che si possono trattare facilmente.

Vediamo come altri casi possono essere facilmente ricondotti alle regole già viste. E' il caso della derivata del quoziente di due funzioni:

Esempio 5.5.1 *Si dimostra che* $(x^{-1})' = \frac{-1}{x^2} = -x^{-2}$. *Supponendo che* f *e* g *siano due funzioni derivabili in* x_0, *calcoliamo:*
$(\frac{f}{g})'(x_0) = (f\,\frac{1}{g})'(x_0) = (f\,g^{-1})'(x_0) = f'(x_0)\,g^{-1}(x_0) + f(x_0)\,(g^{-1})'(x_0) =$
$f'(x_0)\,g^{-1}(x_0) + f(x_0)\,(-g(x_0))^2\,g'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$.

Come esercizio il lettore può trovare una regola per derivare espressioni del tipo:

$$f(x) - g(x); \qquad [f(x)]^{g(x)}.$$

5.6 Teoremi di Rolle e Lagrange.

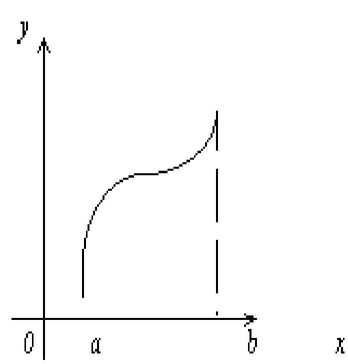
Teorema 5.6.1 (*Teorema di Lagrange o del valor medio*) *Siano* $a, b \in I\!R$, $a < b$, f *una funzione continua da* $[a, b]$ *in* $I\!R$, *derivabile in* $]a, b[$. *Allora,* $\exists\ x \in]a, b[$ *t. c.* $f'(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Tale Teorema esprime il fatto che deve esistere sempre un punto interno dell'intervallo $[a, b]$ in cui la velocità di crescita istantanea della funzione è uguale alla velocità di crescita media della funzione fra a e b.

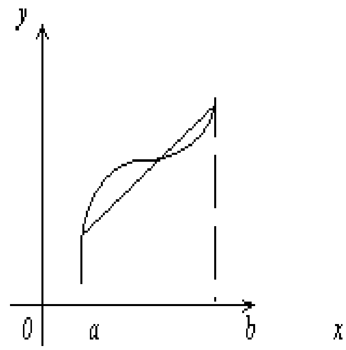
Per tale motivo è noto anche come *Teorema del valor medio.*

Graficamente, la velocità di crescita media della funzione fra a e b è il coefficiente angolare di una funzione lineare affine che fra a e b realizza lo stesso incremento della f. Questo capita, in particolare, per la funzione lineare affine che in a e in b assume gli stessi valori di f il cui grafico è dato dalla retta secante che taglia il grafico di f nei punti di ascissa a e b .

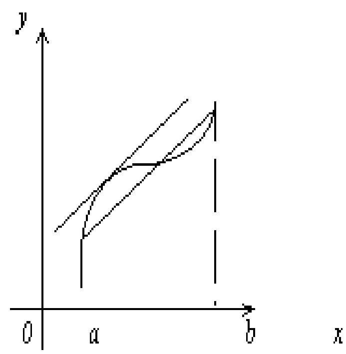
Esempio 5.6.1 *Data una funzione* f*:*



la funzione lineare affine che in a *e* b *assume gli stessi valori di* f *è quella che attraversa il grafico nei punti di ascissa* a *e* b *:*



Il termine lineare di questa funzione, cioè il coefficiente angolare della retta, rappresenta la velocità media di crescita di f fra a e b. Il significato geometrico del Teorema di Lagrange consiste nell'affermare l'esistenza di almeno un punto intermedio del grafico in cui c'è una tangente parallela alla secante:



Notiamo che questo punto può essere trovato come quello in cui il grafico di f si allontana maggiormente dalla retta secante.

Quando dimostreremo formalmente tale Teorema, non faremo altro che precisare questa idea.

Il Teorema di Lagrange ha molte interessanti conseguenze. Per esempio, esso permette ulteriori usi delle derivate nello studio della monotonia di una funzione.

Corollario 5.6.2 *Siano A un intervallo ed $f : A \to I\!R$ una funzione derivabile; se: $\forall\, x \in A$: $f'(x) \geq 0$, allora f é crescente.*
Inoltre, la crescenza è anche stretta a meno che f' non si annulli su tutto un intervallo di ampiezza positiva.

Dim: siano $x, y \in A$, $x < y$. Applichiamo il teorema di Lagrange all'intervallo $[x, y]$, allora:
$\exists\ z \in]x, y[$ t. c. $f'(z) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \geq 0$. Allora, poiché abbiamo supposto per ipotesi che fosse $x < y$, segue che $f(x) \leq f(y)$, quindi f è monotona crescente. Se la monotonia non fosse stretta, allora:
$\exists\ x, y \in A, x < y$ t. c. f sarebbe costante su tutto l'intervallo $[x, y]$, con $x < y$. Allora, $\forall\ z \in [x, y] : f'(z) = 0$.

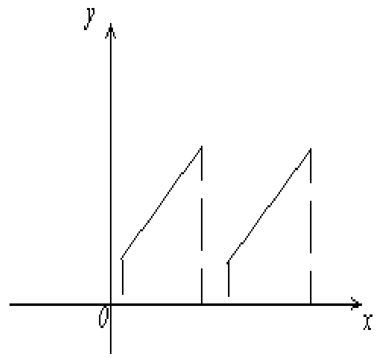
Corollario 5.6.3 *Siano A un intervallo ed $f : A \to I\!R$ una funzione derivabile; se: $\forall\, x \in A$: $f'(x) \leq 0$, allora f é decrescente.*
Inoltre, la decrescenza è anche stretta a meno che f' non si annulli su tutto un intervallo di ampiezza positiva.

Corollario 5.6.4 *Siano A un intervallo ed $f : A \to I\!R$ una funzione derivabile; se f' ha segno costante, allora f é monotona.*

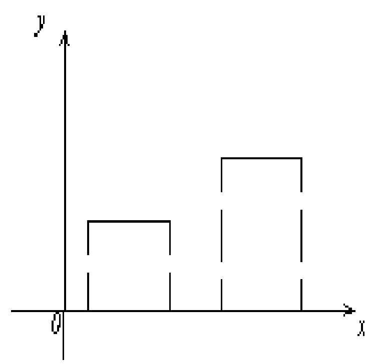
Corollario 5.6.5 *Siano A un intervallo ed $f : A \to I\!R$ una funzione derivabile; se $\forall x \in A$: $f'(x) = 0 \Rightarrow f$ é costante.*

Dim: poiché $f' = 0$: $f' \geq 0$ e $f' \leq 0$. Allora, f è sia crescente che decrescente e, quindi, è costante.

Esempio 5.6.2 *Se A non fosse un intervallo, potremmo avere una funzione non crescente la cui derivata prima è sempre maggiore o uguale a zero:*



oppure una funzione non costante ma avente derivata prima sempre uguale a zero:



Vediamo ora un'applicazione di diversa natura. Premettiamo che, in generale, la derivata di una funzione derivabile f definita su un intervallo può non essere continua. In questo paragrafo vedremo che, però, f' può esibire solo discontinuità di seconda specie. Vediamo come il Teorema di Lagrange permette di escludere la presenza di discontinuità eliminabili.

Corollario 5.6.6 *Siano A un intervallo, $f : A \to I\!R$, $\overline{x} \in A$; supponiamo inoltre che f sia continua in $\overline{x}$ e che $\exists\, lim_{x\to\overline{x}} f'(x) = l$. Allora, f è derivabile in $\overline{x}$ e $f'(x) = l$.*

Dim: E' importante osservare che nel dire che $\exists\, lim_{x\to\overline{x}} f'(x) = l$ stiamo implicitamente assumendo che f sia derivabile in un intorno di $\overline{x}$ su $A \setminus \{\overline{x}\}$. Scambiando A con un intervallo più piccolo, possiamo assumere senza restrizioni che f sia derivabile su $A \setminus \{\overline{x}\}$. sia $x \in A$, $x \neq \overline{x}$. Applichiamo il teorema di Lagrange all'intervallo $[x, \overline{x}]$, allora:

$$\exists y \in]x, \overline{x}[\text{ t.c. } f'(y) = \frac{f(x) - f(\overline{x})}{x - \overline{x}} .$$

Poiché y è compreso fra x e $\overline{x}$, quando x tende ad $\overline{x}$ anche y tende a $\overline{x}$. Quindi:

$$f'(\overline{x}) = lim_{x\to\overline{x}} \frac{f(x) - f(\overline{x})}{x - \overline{x}} = lim_{y\to\overline{x}} f'(y) = l .$$

Un caso particolare del Teorema di Lagrange è quello in cui l'incremento della funzione fra a e b risulta nullo. Questo caso è noto come Teorema di Rolle e può essere interpretato come un'informazione sulla regolarità di f'. Esso mostra infatti che f', anche quando non è continua, manda intervalli in intervalli.

Teorema 5.6.7 (*Teorema di Rolle*) *Siano $a, b \in I\!R$, $a < b$, $f : [a, b] \to I\!R$, funzione continua in $[a, b]$ e derivabile in $]a, b[$. Se $f(a) = f(b)$ allora:*
$\exists\ x \in]a, b[$ t.c. $f'(x) = 0$.

Dim. Basta applicare il Teorema di Lagrange considerando che $f(a) - f(b) = 0$.

Osservazione 5.6.1 *Il teorema di Rolle è equivalente al fatto che f' verifica la tesi del Teorema degli zeri, anche se non è continua.*

Dim: assumiamo vero il Teorema di Rolle e dimostriamo che se f' cambia segno su un intervallo si annulla. Siano A un intervallo, $f : A \to I\!R$ derivabile, $x, y \in A$ tale che $f'(x) < 0$ e $f'(y) > 0$.La funzione f non è crescente in x e non é decrescente in y allora, la funzione sicuramente non è monotona. Poiché f è una funzione continua, definita in un intervallo e non monotona, si ha che essa non è ingettiva. Quindi:

$$\exists a,\ b \in A,\ a < b \text{ t.c. } f(a) = f(b) .$$

Quindi, applicando il Teorema di Rolle alla restrizione di f all'intervallo $[a, b]$, si ha che:

$$\exists x \in A \text{ t.c. } f'(x) = 0 .$$

Viceversa, assumiamo vera l'ipotesi che f' verifica la tesi del Teorema degli zeri e dimostriamo che è anche verificato il Teorema di Rolle. Se

$f(a) = f(b)$, allora f non è strettamente monotona e, quindi, f' si deve annullare o deve cambiare segno. Per la proprietà del Teorema degli zeri, f' deve annullarsi in ogni caso.

Per quanto abbiamo visto nel Capitolo 3, il fatto che f' verifichi la proprietà descritta dal Teorema degli zeri permette subito di dire che verifica anche quella del Teorema di Bolzano, cioè f' manda intervalli in intervalli. Questo, in particolare, permette di escludere che f' possa fare dei salti o, in altri termini, che possa avere discontinuità di prima specie. Vediamo, infine, un esempio di funzione con derivata discontinua.

Esempio 5.6.3 *Consideriamo la funzione $f : I\!R \to I\!R$ definita per $x \neq 0$ da: $f(x) = x^2 sen\frac{1}{x}$ e per $x = 0 : f(x) = 0$. E' facile vedere che $f'(0) = 0$, mentre per $x \neq 0$ un semplice calcolo mostra che:*

$$f'(x) = 2x sen\frac{1}{x} \; - \cos\frac{1}{x}.$$

Si vede subito che lo zero è un punto di discontinuità di seconda specie di f'. Notiamo però che, in un qualunque intorno dello zero, $\cos\frac{1}{x}$ assume tutti i valori compresi fra 1 e -1 e, quindi, manda qualunque intorno di zero in un intervallo.

Tale esempio mostra anche una funzione non continua che verifica la tesi del Teorema degli zeri e del Teorema di Bolzano.

Abbiamo puntualizzato a suo tempo che queste proprietà, a differenza di quelle di permanenza del segno, nomn caratterizzano la continuità.

5.7 Formula di Taylor.

Abbiamo visto in questo capitolo come il valore iniziale e il differenziale di una funzione in un punto x_0 permettano di ottenere il valore di una funzione a meno di un resto che risulta infinitesimo di ordine maggiore di 1. E' possibile trovare descrizioni analoghe che approssimano la funzione a meno di resti ancora più piccoli?

Per intuire la risposta di questa domanda, proviamo a fare un passo indietro e ad approssimare la funzione usando il solo valore iniziale e non il differenziale. Avremo, quindi, la funzione costante $f(x_0)$ che ci darà la funzione f a meno del resto $r_0$definito da:

$$r_0(x) = f(x) - f(x_0).$$

Vediamo facilmente che se x_0 è un punto di continuità, r_0 risulta infinitesimo, cioè infinitesimo di ordine maggiore di 0. Abbiamo cosi' un'approssimazione di f di tipo ancora più semplice (cioè una funzione costante) ma un resto meno piccolo di prima, quindi un'approssimazione peggiore.

Mettiamo quindi a confronto le due approssimazioni:

- l'ultimo caso ci ha fornito quella che chiameremo *approssimazione di ordine* 0. Ci serve solo la continuità in x_0. Il valore iniziale $f(x_0)$, cioè il differenziale di ordine zero, ci da l'approssimazione di f data da una funzione costante ma con un resto r_0 non troppo piccolo, di cui sappiamo solo che è un infinitesimo.

- La differenziabilità ci da quella che chiameremo *approssimazione di ordine* 1. Abbiamo bisogno, in questo caso, di un'ipotesi più forte:la differenziabilità in x_0. L'approssimazione della funzione non è più costante ma è lineare affine e viene data dalla somma del valore iniziale e del differenziale, cioè dalla somma del differenziale di ordine 0 e quello di ordine 1. Il resto r_1, però, è migliore infatti è un infinitesimo di ordine maggiore di 1.

L'idea suggerita dalla comparazione di questi due casi è che per avere resti più piccoli occorre usare più differenziali e che per avere più differenziali occorrono maggiori ipotesi di regolarità. A questo scopo chiederemo che la funzione f sia derivabile n volte in un punto x_0 e chiameremo *differenziale di ordine* n la funzione:

$$x \to \frac{1}{n!}\, f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n,$$

termine algebrico di grado n.

Se sommiamo tutti i differenziali dall'ordine 0 fino all'ordine n avremo un polinomio$\mathcal{P}_n$ di grado $\leq n$ dato dalla formula:

$$\mathcal{P}_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x-x_0) + \frac{1}{2}\, f^{(2)}(x_0)\,(x-x_0)^2 + \cdots +$$

$$+\tfrac{1}{n!}\, f^{(n)}(x_0)\,(x-x_0)^n,$$

e cioè:

$$\mathcal{P}_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\, f^{(k)}(x_0)\,(x-x_0)^k,$$

che chiameremo *Polinomio di Taylor di ordine n in x_0.*

Chiamando r_n la differenza fra f e $\mathcal{P}_n$ otterremo la decomposizione:

$$f(x) = \mathcal{P}_n(x) + r_n(x),$$

che chiameremo *formula di Taylor di ordine n.*

Notiamo che i casi esaminati prima rientrano in questa formula prendendo $n = 0$ oppure $n = 1$.

Se $n = 0$ l'ipotesi su f si riduce alla pura continuità in x_0. Si vede subito che $\mathcal{P}_0$ è il polinomio di grado nullo dato dalla costante $f(x_0)$ e r_0 è quello definito prima.

Se $n = 1$ l'ipotesi su f è che sia differenziabile in x_0. Si vede che $\mathcal{P}_1$ è un polinomio di grado ≤ 1 cioè una funzione lineare affine e che coincide con $P^1_{x_0} f$. Quindi, la *formula di Taylor di ordine 1* non è altro che la formula sulla decomposizione di una funzione differenziabile.

Ci aspettiamo che utilizzando Polinomi di Taylor di ordine più elevato otteniamo resti sempre più infinitesimi. Tale aspettativa è fondata, infatti si dimostra il seguente Teorema:

Teorema 5.7.1 *Teorema sulla Formula di Taylor Cosideriamo A un intervallo,$x_0 \in A$, $f : A \to I\!R$ differenziabile n volte in x_0. Allora, r_n è un infinitesimo di ordine maggiore di n.*

Quindi, questo Teorema ci mostra che per descrivere la funzione a meno di resti infinitesimi di ordine molto grande occorre chiedere una differenziabilità di ordine elevato e utilizzare polinomi di grado elevato.

Esempio 5.7.1 *Sia $f(x) = x^3$, n=2, $x_0 \in I\!R$. Si ha che:*

$$f(x_0) = {x_0}^3;\ f'(x_0) = 3\,{x_0}^2;\ f"(x_0) = 6\,x_0.$$

Allora, applicando la formula di Taylor:

$$x^3 = {x_0}^3 + 3\,{x_0}^2\,(x - x_0) + \frac{6}{2!}\,x_0\,(x - x_0)^2 + r_2(x).$$

Per via algebrica otteniamo:

$$x^3 = (x_0 + (x - x_0))^3 = {x_0}^3 + 3\,{x_0}^2\,(x - x_0) + 3\,x_0\,(x - x_0)^2 + (x - x_0)^3.$$

Quindi:

$$r_2(x) = (x - x_0)^3.$$

È facile dimostrare che tale resto è un infinitesimo di ordine superiore a due in x_0, infatti:

$$lim_{x \to x_0} \frac{r_2(x)}{(x - x_0)^2} = lim_{x \to x_0} (x - x_0) = 0.$$

Quindi, in questo caso, r_2 è un infinitesimo di ordine $3 > 2$.
Scriviamo il Polinomio di Taylor di x^3 per $n = 3$:

$$x^3 = {x_0}^3 + 3\,{x_0}^2\,(x - x_0) + 3\,x_0\,(x - x_0)^2 + \frac{6}{3!}(x - x_0)^3 + r_3(x).$$

Da quest'ultima formula si ricava che:

$$r_3(x) = 0,$$

dato che abbiamo considerato il Polinomio di Taylor di grado uguale al polinomio di partenza $f(x) = x^3$.

Vedremo in seguito che, in generale, se f è un polinomio di grado $\leq n$ allora avremo $r_n = 0$, cioè il polinomio di Taylor di ordine n descrive esattamente la funzione f.

Osservazione 5.7.1 *Generalizziamo il sistema per calcolare la derivata della funzione $f(x) = x^n$.*
Calcoliamo le derivate:

$$f'(x) = n\,x^{n-1};\ f''(x) = n\,(n-1)\,x^{n-2};\ \cdots f^{(k)}(x) =$$

$$= n\,(n-1)\,(n-2)\cdots(n-k+1)\,x^{n-k}.$$

Moltiplicando e dividendo quest'ultima espressione per: $(n-k)(n-k-1)\cdots 1$, *otteniamo:*

$$f^{(k)}(x) = \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\cdots(n-k+1)\,(n-k)\,(n-k-1)\cdots 1}{(n-k)\,(n-k-1)\cdots 1} x^{n-k} =$$

$$= \tfrac{n!}{(n-k)!}\,x^{n-k}.$$

Allora, si ricava che:

- *Se* $k < n$:

$$f^{(k)}(x) = \frac{n!}{(n-k)!}\,x^{n-k};$$

in particolare, se $k = n$:

$$f^{(n)}(x) = n!,$$

e quindi una funzione costante. Siccome derivando una costante si ottiene 0, le derivate ulteriori di f *sono tutte nulle e quindi:*

- $\forall\ k > n$:

$$f^{(k)}(x) = 0.$$

Esempio 5.7.2 *Consideriamo* $f(x) = x^n$*; fissiamo, inoltre,* $a, b \in \mathbb{R}$*. Valutiamo la formula di Taylor di ordine* n *nel punto* $x_0 = a$*, tenendo presente che avremo resto nullo perchè* x^n *è un polinomio di grado* n*.*

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\,f^{(k)}(a)\,(x-a)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\,\frac{n!}{(n-k)!}\,(a)^{n-k}\,(x-a)^k.$$

Valutiamo questa formula prendendo $x = a + b$*:*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\,(a)^{n-k}\,b^k.$$

Quest'ultima, rappresenta la formula del binomio di Newton.

5.8 Applicazioni della formula di Taylor.

Vediamo ora l'utilità pratica dei concetti introdotti nel paragrafo precedente. Perchè è utile saper descrivere una funzione con un polinomio e perchè serve conoscere l'ordine di infinitesimo del resto?

Una risposta a questa domanda consiste nel fatto che l'uso della formula di Taylor permette di studiare il segno della funzione nelle vicinanze del punto x_0. Abbiamo già visto, con il Teorema della permanenza del segno, che quando $f(x_0) \neq 0$ ed f è continua il segno di $f(x)$ è lo stesso di $f(x_0)$ se x è abbastanza vicino a x_0. Cosa possiamo dire quando $f(x_0) = 0$? Ricorrendo a formule di Taylor di ordine superiore, possiamo provare a derivare la funzione finchè non perveniamo ad una derivata che non si annulli più in x_0. Se n è l'ordine di tale derivata il Polinomio di Taylor di ordine n in x_0 si riduce al solo differenziale di ordine n, perchè i precedenti sono tutti nulli per costruzione.

La formula di Taylor allora diventa:

$$f(x) = \mathcal{P}_n(x) + r_n(x) = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)\,(x - x_0)^n + r_n(x) =$$

$$= \left(\tfrac{1}{n!} f^{(n)}(x_0) + \tfrac{r_n(x)}{(x-x_0)^n}\right)(x - x_0)^n .$$

Posto: $\frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0) + \frac{r_n(x)}{(x-x_0)^n} = a(x)$, $\forall x \neq x_0$ e $a(x_0) = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)$, è facile verificare che a è continua in x_0 e $a(x_0) \neq 0$ ha lo stesso segno di $f^{(n)}(x_0)$.
possiamo applicare il Teorema della permanenza del segno al coefficiente $a(x)$ e, quindi, otteniamo che:

$$\exists V \text{ intorno di } x_0 \text{ t.c. } \forall x \in V \cap A : \ a(x) \text{ ha lo stesso segno di } f^{(n)}(x_0) \, .$$

Allora, se vogliamo capire quale sia il segno della funzione f, distinguiamo i seguenti due casi:

1. n è pari: $(x - x_0)^n > 0 \Rightarrow f(x)$ ha lo stesso segno di $a(x)$ in $V \cap A$; quindi, $f(x)$ ha lo stesso segno di $f^{(n)}(x_0)$ in $V \cap A$.

2. n è dispari: $(x - x_0)^n > 0$ a destra di x_0 mentre $(x - x_0)^n < 0$ a sinistra di x_0. Allora, $f(x)$ ha lo stesso segno di $a(x)$ a destra di x_0 e segno opposto a sinistra di x_0.

Possiamo riassumere questi casi nella seguente tabella, in cui n è il più piccolo numero naturale tale che $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Osserviamo che $n = 0$ significa che la funzione non si annulla in x_0.

Parità di n	**Segno di $f^{(n)}(x_0)$**	**Segno di f a sinistra di x_0**	**Segno di f a destra di x_0**
Pari	Positivo	Positivo	Positivo
Pari	Negativo	Negativo	Negativo
Dispari	Positivo	Negativo	Positivo
Dispari	Negativo	Positivo	Negativo

Esempio 5.8.1 *Supponiamo che risulti:*

$$\forall k < 4 : \ f^{(k)}(x_0) = 0 \ \ e \ f^{(4)}(x_0) > 0 \, ;$$

allora, possiamo applicare l'analisi precedente con $n = 4$, quindi n pari:

$$\exists V \textit{ intorno di } x_0 \textit{ t.c. } \forall x \in V \cap A : f(x) > 0 \, .$$

Supponiamo che:

$$\forall\, k < 3 : \; f^{(k)}(x_0) = 0 \text{ e } f^{(3)}(x_0) < 0 \; .$$

Possiamo applicare l'analisi precedente con $n = 3$, quindi n dispari:

$$\exists V \text{ intorno di } x_0 \text{ t.c. } \forall x \in V \cap A : f(x) < 0 \text{ se } x > x_0, \quad f(x) > 0 \text{ se } x < x_0 \; .$$

Supponiamo che:

$$\forall\, k < 7 : \; f^{(k)}(x_0) = 0 \text{ e } f^{(7)}(x_0) > 0 \; .$$

In questo caso: $n = 7$, quindi n dispari e si ha che:

$$\exists V \text{ intorno di } x_0 \text{ t.c. } \forall x \in V \cap A : f(x) > 0 \text{ se } x > x_0, f(x) < 0 \text{ se } x < x_0.$$

Supponiamo che risulti:

$$\forall\, k < 8 : \; f^{(k)}(x_0) = 0 \text{ e } f^{(8)}(x_0) < 0;$$

allora essendo $n = 8$, quindi n pari si ha che:

$$\exists V \text{ intorno di } x_0 \text{ t.c. } \forall x \in V \cap A : f(x) < 0.$$

Quindi, per la conoscenza del segno di una funzione differenziabile in un intorno di un punto di differenziabilitá, è importante conoscere il segno della prima derivata non nulla. Potrebbe accadere che calcolando tutte le derivate esistenti della funzione in x_0 non se ne riesca a trovare una diversa da zero. Allora, in tal caso, questo strumento non è più utilizzabile.

Applichiamo ad alcuni casi particolari tutto ció che è stato detto sul segno di una funzione:

1. *monotonia:*

   Per studiare la monotonia della funzione f in un punto x_0, interessa studiare il segno dell' incremento $r_0(x) = f(x) - f(x_0)$ in un intorno di x_0. Questa analisi può essere fatta usando la precedente tabella che richiede lo studio delle derivate di r_0. Notiamo subito, però, che per $n = 0$ abbiamo che: $r_0^{(n)}(x_0) = r_0(x_0) = 0$, mentre per $n > 0$ risulta $r_0^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0)$, poichè r_0 ed f differiscono per una costante. Allora, occorre semplicemente considerare le derivate di f partendo però da $n = 1$ e non da $n = 0$. Applicando la tabella precedente si vede che:

   - se la prima derivata non nulla di f in x_0 è di ordine dispari, abbiamo monotonia. In particolare, se tale derivata è positiva la funzione è strettamente crescente in x; se tale derivata è negativa, la funzione è strettamente decrescente in x_0.

- se la prima derivata non nulla di f in x_0 è di ordine pari, abbiamo una monotonia diversa a sinistra e a destra di x_0. In particolare, se tale derivata è positiva, abbiamo decrescenza a sinistra e crescenza a destra di x_0, quindi x_0 è un punto di minimo. Se, invece, tale derivata è negativa, abbiamo crescenza a sinistra e decrescenza a destra di x_0, quindi x_0 è un punto di massimo.

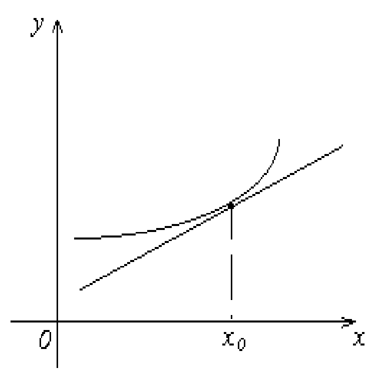
2. *Concavitá e convessitá:*
Allo scopo di evitare che lo studente sia fuorviato da una consuetudine con una terminologia diversa da quella che stiamo per usare, cominciamo col puntualizzare che graficamente una funzione che rivolge la concavità verso l'alto si dice *convessa* ed una funzione che rivolge la concavità verso il basso si dice *concava*. In questo ci occuperemo di distinguere se una funzioine presenta concavità o convessità in un punto x_0 in cui essa risulta differenziabile. A questo scopo possiamo definire la funzione *convessa in* x_0 se vicino al punto di ascissa x_0 il grafico di f si trova al di sopra della retta tangente e *concava in* x_0 se vicino al punto di ascissa x_0 il grafico di f si trova al di sotto della retta tangente. Quando invece il grafico di f attraversa la retta tangente diremo che x_0 è un *punto di flesso*. Per sapere se il grafico della funzione si trova sopra o sotto la tangente occorre studiare il segno della funzione:$r_1(x) = f(x) - P^1_{x_0}f(x)$. Ci troviamo in una situazione totalmente analoga al caso della monotonia.Questa volta: $r_1(x_0) = (r_1)'(x_0) = 0$, mentre per $n \geq 2$ si ha che: ${r_1}^{(n)}(x_0) = f^{(n)}\ (x_0)$. Bisogna quindi considerare il più piccolo indice $n \geq 2$ tale che $f^{(n)}\ (x_0) \neq 0$. Applicando la tabella si ha che:

- Se n è pari, abbiamo concavità o convessità. Più precisamente abbiamo convessità se $f^{(n)}\ (x_0) > 0$, mentre abbiamo concavità se $f^{(n)}\ (x_0) < 0$.

- Se n è dispari, abbiamo un punto di flesso.

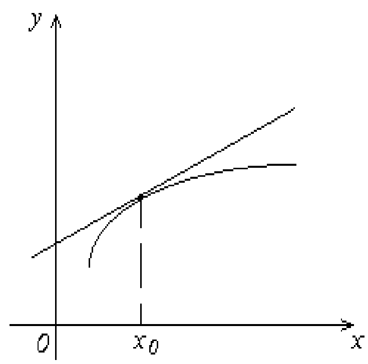
Tutti questi casi sono illustrati nei seguenti esempi grafici:

Esempio 5.8.2 *La funzione rappresentata dal seguente grafico:*



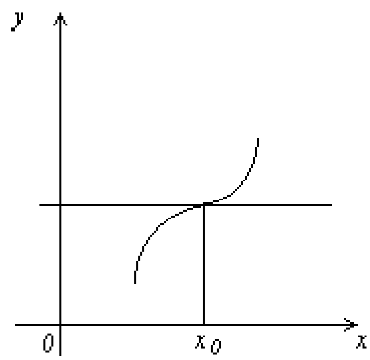
è convessa in x_0.

Esempio 5.8.3 *La funzione rappresentata dal seguente grafico:*



è concava in x_0.

Esempio 5.8.4 *La funzione rappresentata dal seguente grafico:*



ha in x_0 un punto di flesso.

Nell'analisi precedente abbiamo parlato di punti a sinistra o a destra di x_0 senza fare ipotesi che garantiscano l'esistenza di tali punti. Chiaramente nei punti che sono di accumulazione solo da un lato non c'è una significativa differenza fra il caso n pari e quello n dispari.

Vediamo infine come utilizzare le osservazioni precedenti per la ricerca di punti di massimo e di minimo locale. Ci occuperemo di punti di accumulazione da entrambi i lati perchè negli altri casi per vedere se un punto è di minimo o di massimo basta studiare la monotonia della funzione.

Se x_0 è un punto di massimo locale interno o, più in generale, di accumulazione da entrambi i lati, la funzione non è strettamente decrescente nè strettamente crescente e quindi $f'(x_0) = 0$, quando esiste. Quindi, se f è una funzione derivabile, i punti di minimo e di massimo locale interni vanno cercati fra gli zeri di f. La condizione $f'(x_0) = 0$ non è comunque sufficiente a garantire che x_0 sia un punto di massimo o di minimo locale. La condizione $f'(x_0) = 0$ esprime il fatto che la retta tangente è orizzontale. In questo caso, x_0 risulta un minimo locale se è un punto di convessità e un massimo locale se è un punti di concavità. Quindi, una volta trovati i punti x_0 in cui f' si annulla, occorre vedere in ciascuno di questi qual'è il più piccolo $n \geq 2$ tale che $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Se n è pari, abbiamo convessità (quando $f^{(n)}(x_0) > 0$) o concavità (se $f^{(n)}(x_0) < 0$) e quindi nel primo caso x_0 è un punto di minimo locale, nel secondo caso è un punto di massimo locale. Se n è dispari, abbiamo un flesso e quindi x_0 non è nè un minimo nè un massimo locale interno.

5.9 Asintoti

Si consideri una funzione $f : A \to I\!R$, dove A è un insieme illimitato superiormente.

Definizione 5.9.1 *Si dice che la retta orizzontale di equazione $y = b$ è un* asintoto orizzontale destro *della funzione f se:*

$$lim_{x \to +\infty} f(x) = b.$$

Quindi, se si ha un asintoto orizzontale destro la funzione ha velocitá di crescita zero a $+\infty$. In tal caso, il grafico della funzione si avvicina alla retta orizzontale quando x tende a $+\infty$.

Si consideri una funzione $f : A \to I\!R$, dove A è un insieme illimitato inferiormente.

Definizione 5.9.2 *Si dice che la retta orizzontale di equazione $y = b$ è un* asintoto orizzontale sinistro *della funzione f se:*

$$lim_{x \to -\infty} f(x) = b.$$

Possiamo definire la velocità di crescita di una funzione come:

$$a_+ = lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}, a_- = lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} ,$$

naturalmente nelle ipotesi che A sia illimitato superiormente per $x \to +\infty$ e illimitato inferiormente per $x \to -\infty$.

Quando questi valori a_+ e a_- esistono finiti e sono diversi da zero, possiamo cercare asintoti obliqui costituiti da rette aventi equazioni:

$$y = a_+ \; x + b,$$

$$y = a_- \; x + b.$$

Avremo l'asintoto obliquo destro se:

$$b = lim_{x \to +\infty} (f(x) - a_+ \; x) \in I\!R ,$$

ed avremo l'asintoto obliquo sinistro se:

$$b = lim_{x \to -\infty} (f(x) - a_- \; x) \in I\!R .$$

Osservazione 5.9.1 *L'asintoto orizzontale è, quindi, un caso particolare di asintoto obliquo che corrisponde alla condizione* $a_+ = 0$, $a_- = 0$.

Si consideri una funzione $f : A \to I\!R$, $A \subset I\!R$, x_0 punto di accumulazione per A.

Definizione 5.9.3 *Si dice che la funzione f ha un* asintoto verticale *sinistro in x_0 se:*

$$lim_{x \to x_0^-} f(x) =^+_- \infty.$$

Definizione 5.9.4 *Si dice che la funzione f ha un* asintoto verticale *destro in x_0 se:*

$$lim_{x \to x_0^+} f(x) =^+_- \infty.$$

Definizione 5.9.5 *Diremo che la retta verticale passante per x_0 è un asintoto verticale se risulta sia un asintoto verticale a sinistra che a destra di x_0. Questo non vuol dire che $\exists\ lim_{x \to x_0} f(x)$, ma solo che il limite destro e il limite sinistro esistono e sono infiniti (potrebbero avere segno diverso).*

Esempio 5.9.1 *Consideriamo la funzione:*

$$f(x) = \frac{1}{x},$$

avente il seguente grafico:

Si vede subito che la retta di equazione $y = 0$ rappresenta l'asintoto orizzontale destro e sinistro, mentre la retta di equazione $x = 0$ rappresenta l'asintoto verticale infatti:

$$lim_{x \to ^+_- \infty} f(x) = 0;$$

$$lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty \text{ e } lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty.$$

5.10 Studio del grafico di una funzione.

Spesso abbiamo la necessità di individuare un grafico approssimativo di una funzione reale di variabile reale di cui si conosce la relazione funzionale $\mathcal{R}$ che la contraddistingue e l'insieme di arrivo. E' opportuno,allora, determinare l'insieme di partenza: in questo modo la funzione è ben definita. Elenchiamo una serie di operazioni opportune da fare allo scopo di studiarne l'andamento del grafico:

1. vedere se l'insieme di definizione e la funzione presentano simmetrie;
2. studiare il segno della funzione (in particolare, determinare i punti in cui la funzione è uguale a zero, cioé le intersezioni del grafico di f con l'asse delle ascisse);

3. determinare l'andamento agli estremi dell'insieme di definizione col calcolo dei limiti;

4. determinare l'andamento all'interno dell'insieme di definizione studiando la continuitá e la derivabilitá della funzione: se la derivata esiste, si deve studiarne il segno che permette di dedurre gli intervalli di monotonia della f;

5. determinare eventuali punti di minimo o di massimo locale e i valori che la funzione assume in tali punti;

6. studiare il segno della derivata seconda per vedere dove la funzione é convessa e dove è concava;

7. calcolare, se esistono, $f'(-\infty)$ e $f'(+\infty)$ ed, inoltre, determinare eventuali asintoti obliqui.

Esempio 5.10.1 *Consideriamo la funzione:*

$$f(x) = \frac{1}{x-1}.$$

L'insieme di definizione di tale funzione è $I\!R \setminus \{1\}$. La retta di equazione $y = 1$ è un asintoto verticale per la funzione; inoltre, la retta di equazione $y = 0$ è asintoto orizzontale sia a destra che a sinistra. è strettamente decrescente in $]-\infty, 1]$ e in $]1, +\infty[$ ma non è decrescente in senso globale. La derivata seconda di tale funzione è data da: $f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3}$; per cui la funzione è convessa per $x > 1$ ed è concava per $x < 1$. Il grafico della funzione è il seguente:

Esempio 5.10.2 *Consideriamo la funzione:*

$$f(x) = \sin\frac{1}{x-1}$$

L'insieme di definizione della funzione è $I\!R \setminus \{1\}$. *In questo caso, la funzione non è piú definibile nel punto di ascissa uno: non esiste l'asintoto obliquo e la funzione presenta nell'intorno del punto infinite oscillazioni, come si può vedere dal grafico:*

Esempio 5.10.3 *Consideriamo la funzione:*

$$f(x) = x^3.$$

L'insieme di definizione della funzione è $I\!R$. *La funzione non ha asintoti ed è strettamente crescente in tutto il suo insieme di definizione; inoltre, la funzione è convessa per* $x > 0$ *ed è concava per* $x < 0$.