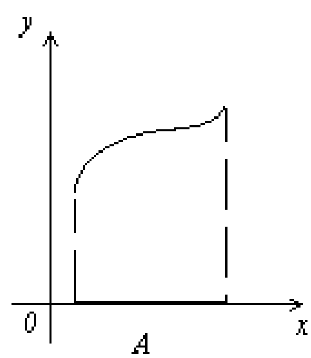
Capitolo 4

Continuità e limiti.

4.1 Funzioni continue.

Introduciamo il concetto di funzione continua prima da un punto di vista intuitivo, basato sulla rappresentazione grafica: consideriamo una funzione definita su un intervallo A di $\mathbb{R}$. Graficamente la funzione è continua quando il suo grafico non si spezza, cioè quando il suo grafico può essere considerato una deformazione continua senza strappi dell'intervallo A.

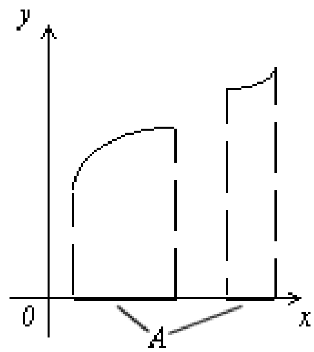
Esempio 4.1.1 *La funzione rappresentata dal seguente grafico:*



è continua in tutto A.

Se la funzione risulta definita sulla riunione di due intervalli disgiunti e se essa è continua su ciascuno di questi intervalli, allora essa è continua in tutto il suo insieme di definizione.

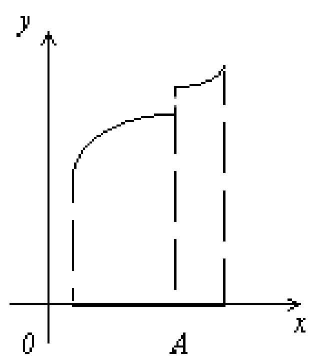
Esempio 4.1.2 *La funzione rappresentata dal seguente grafico:*



è continua in A.

Naturalmente, in quest'ultimo caso, il grafico della funzione si interrompe. Questo, però, non dà luogo a discontinuità, perché l'interruzione del grafico corrisponde ad una interruzione dell'insieme di partenza. Rimane comunque salvo il principio che il grafico corrisponde ad una deformazione senza strappi dell'insieme di partenza A. Ad ogni pezzo non interrotto di A corrisponde un pezzo non interrotto del grafico. In particolare, se A contiene qualche punto isolato $\overline{x}$, l'insieme $\{\overline{x}\}$ costituisce un pezzo di A su cui il grafico non può interrompersi perché costituito da un solo punto. Questo fatto si riflette in una proprietà, che vedremo fra poco, che dice che una funzione è sempre continua sui punti isolati dell'insieme di partenza. Sintetizzando i casi finora esaminati, possiamo concludere che una funzione non è continua quando il suo grafico si interrompe senza che si interrompa il suo insieme di partenza.

Esempio 4.1.3 *La funzione avente il seguente grafico:*

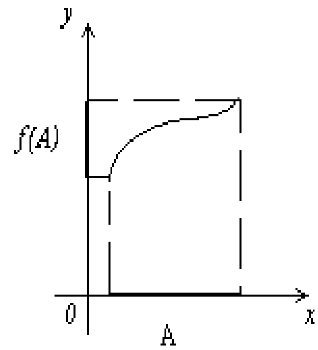


non è continua.

Ancora prima di passare ad una definizione formale di continuità, vediamo alcune importanti proprietà delle funzioni continue che possono essere facilmente comprese e giustificate in modo intuitivo.

Teorema 4.1.1 *(Teorema di Bolzano) Se A è un intervallo di $\mathbb{R}$ ed $f : A \to \mathbb{R}$ è una funzione continua, allora $f(A)$ è un intervallo.*

Quindi, le funzioni continue mandano intervalli in intervalli. La dimostrazione di tale teorema dal punto di vista grafico è molto semplice: proiettiamo la curva sull'asse verticale per trovare l'immagine della funzione.

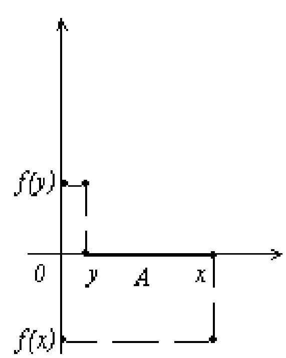


Come si può vedere, la proiezione è un intervallo. Infatti, se non si può interrompere il grafico non si può neanche interrompere la sua proiezione.

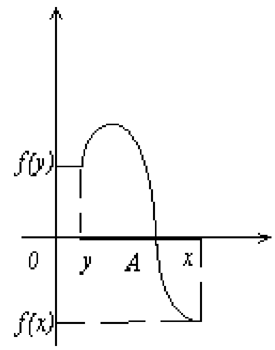
Osservazione 4.1.1 *Se A è un intervallo ed $f : A \to \mathbb{R}$ è una funzione continua, il Teorema di Bolzano si può esprimere dicendo che un numero compreso fra due valori assunti da f è ancora un valore assunto da f.*

Teorema 4.1.2 *(Teorema degli zeri) Siano A un intervallo di $\mathbb{R}$ ed $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Se esistono x, $y \in A$ tali che $f(x) \leq 0$ e $f(y) \geq 0$, allora esiste $z \in A$ tale che $f(z) = 0$.*

Vediamo la dimostrazione grafica del Teorema degli zeri. Il punto del grafico di f di ascissa x si trova nel semipiano al di sotto dell'asse delle ascisse, perché $f(x) \leq 0$. Analogamente, il punto del grafico di f di ascissa y si trova nel semipiano al di sopra dell'asse delle ascisse essendo $f(y) \geq 0$.



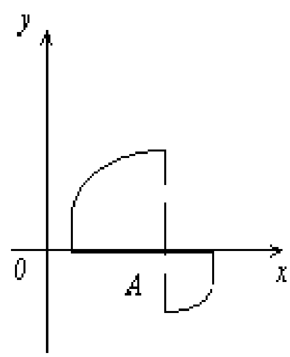
Poichè il grafico di f non può interrompersi, deve intersecare necessariamente l'asse delle ascisse, come si può vedere dal grafico:



Osservazione 4.1.2 *I due teoremi sopra enunciati, si deducono facilmente l'uno dall'altro. Quindi, quando ne avremo dimostrato formalmente uno, si potrà considerare acquisito anche l'altro. Se* $c \in I\!R$ *è compreso fra due valori assunti da* f*, allora la funzione* $f - c$ *(che risulta ancora continua, come vedremo fra poco) cambia segno, e quindi per il Teorema degli zeri, si annulla in un punto* $x \in A$*. Ovviamente, in tale punto si ha* $f(x) = c$*. Il Teorema di Bolzano segue, quindi, dal Teorema degli zeri. Viceversa, se* A *è un intervallo,* f *è continua e assume due valori di segno opposto, l'immagine* $f(A)$ *contiene due valori di segno opposto. Per il teorema di Bolzano,* $f(A)$ *è un intervallo. Ma, un intervallo che contiene due numeri di segno opposto contiene anche lo zero. Quindi, il Teorema degli zeri segue dal Teorema di Bolzano.*

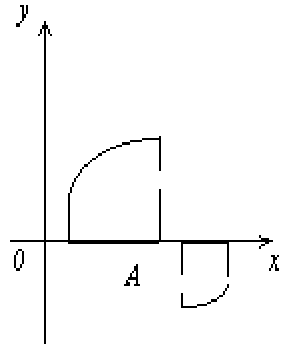
Naturalmente, per applicare questi due teoremi, occorre controllare che sussistano le ipotesi: se f non è continua o A non è un intervallo, le due tesi possono essere false.

Esempio 4.1.4 *Consideriamo la funzione espressa dal seguente grafico:*



Si vede che $f(A)$ *non è un intervallo e che assume valori di segno diverso senza annullarsi. I due teoremi non sono applicabili perché manca l'ipotesi di continuità della funzione.*

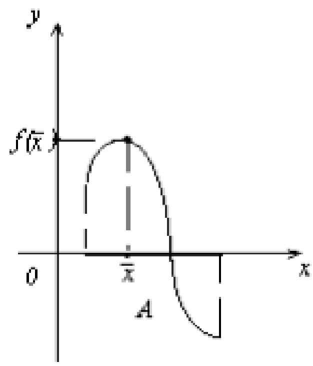
Esempio 4.1.5 *Consideriamo la funzione rappresentata dal seguente grafico:*



Questo esempio è molto simile al precedente, ma la funzione è continua mentre l'insieme A non è un intervallo.

Teorema 4.1.3 *(Teorema della permanenza del segno) Siano $A \subset I\!R$, $f : A \to I\!R$ una funzione continua ed $\overline{x} \in A$ tale che $f(\overline{x}) > 0$. Allora $\exists\, V$ intorno di $\overline{x}$ t.c. $\forall x \in V \cap A : f(x) > 0$.*

Motiviamo graficamente questo teorema:



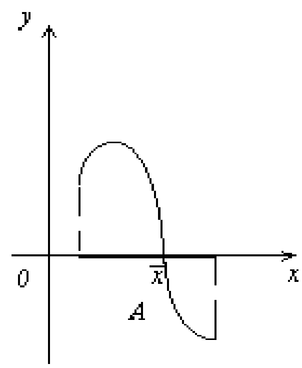
Dal momento che il grafico di f non si interrompe, per quanto rapidamente la funzione possa andare al di sotto dell'asse delle ascisse deve, comunque, mantenersi positiva per un certo tratto. Analogamente, se $f(\overline{x}) < 0$, allora si potrà dire che la funzione si manterrà minore di zero in un intorno di $\overline{x}$. Questo teorema si può esprimere in maniera equivalente come *teorema di passaggio al limite delle diseguaglianze*:

Teorema 4.1.4 *(Teorema di passaggio al limite delle diseguaglianze) Siano $A \subset I\!R$, $f : A \to I\!R$ una funzione continua ed $\overline{x} \in A$ tale che $\forall V$ intorno di $\overline{x}$, $\exists x \in A \cap V$ tale che $f(x) \geq 0$ $(f(x) \leq 0)$, allora $f(\overline{x}) \geq 0$ $(f(\overline{x}) \leq 0)$.*

Osservazione 4.1.3 *Quindi, per poter conservare la diseguaglianza in un intorno occorre conoscere una diseguaglianza stretta in $\overline{x}$. Mentre, se in ogni intorno V di $\overline{x}$ abbiamo un punto in cui f è maggiore (minore) di zero, questa diseguaglianza passa al limite solo in una forma debole $f(\overline{x}) \geq 0$ $(f(\overline{x}) \leq 0)$. In generale, non si può* *dire che* $f(\overline{x}) > 0$ *(* $f(\overline{x}) < 0$*). Al contrario, può anche capitare che* f *campbi segno su ogni intorno di* $\overline{x}$*, come nel corollario seguente in cui applichiamo due volte il Teorema 4.1.4.*

Corollario 4.1.5 *Siano* $A \subset I\!R$*,* $f : A \to I\!R$ *una funzione continua ed* $\overline{x} \in A$ *tale che* $\forall\, V$ *intorno di* $\overline{x}$*,* $\exists\ x, y \in A \cap V$ *t.c.* $f(x) \leq 0$ *e* $f(y) \geq 0$*. Allora* $f(\overline{x}) = 0$*.*

Esempio 4.1.6 *Consideriamo la funzione rappresentata dal seguente grafico:*



In questo caso, $f(\overline{x}) = 0$ *e, quindi, è vero sia che* $f(\overline{x}) \leq 0$ *sia che* $f(\overline{x}) \geq 0$*. Le due diseguaglianze sono, però, in forma larga e quindi in forma troppo debole per essere conservate localmente. Infatti, non è possibile trovare alcun intorno di* $\overline{x}$ *su cui* f *si mantenga sempre* ≥ 0 *o sempre* ≤ 0*. Inoltre,in ogni intorno di* $\overline{x}$ *possiamo sempre trovare un punto* x *tale che sia* $f(x) < 0$ *(basta prendere* x *a sinistra di* $\overline{x}$*). Questa diseguaglianza passa al limite in forma larga, infatti* $f(\overline{x}) \leq 0$*. Invece, la diseguaglianza stretta* $f(x) < 0$ *non può passare al limite perché è falso che sia* $f(\overline{x}) < 0$*.*

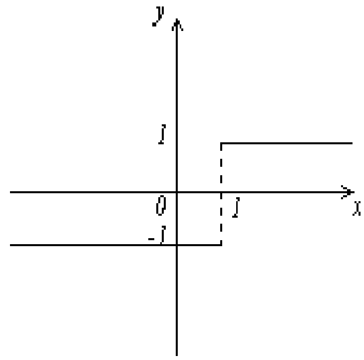
Questo esempio illustra anche l'ultimo corollario perché in ogni intorno di $\overline{x}$ *troviamo un punto in cui* $f > 0$ *ed un punto in cui* $f < 0$*.*

Vediamo, ora, come queste proprietà di permanenza del segno non sono vere se f non è continua.

Esempio 4.1.7 *Consideriamo la funzione* $f : I\!R \to I\!R$ *definita nel seguente modo:* $\forall x \in I\!R$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & se \quad x \geq 1 \\ -1 & se \quad x < 1 \end{cases}$$

rappresentata graficamente nel seguente modo:



Come si vede dal grafico, questa funzione non è continua perché il grafico si interrompe in corrispondenza del punto di ascissa $\overline{x} = 1$. Si vede che in tale caso abbiamo $f(\overline{x}) = 1 > 0$ ma in nessun intorno di $\overline{x}$ f si mantiene sempre positiva perché tutti i valori che f assume a sinistra di $\overline{x}$ sono negativi.

In realtà, un esempio di quest'ultimo tipo può essere dato considerando qualsiasi funzione non continua. Questo significa che la proprietà di permanenza del segno (diversamente dalle altre considerate in precedenza) caratterizza la continuità. Ce ne serviremo, dunque, per pervenire ad una definizione formale del concetto di continuità.

Consideriamo un intorno V di $f(\overline{x})$. Per definizione, esiste un intervallo aperto $]a, b[$ tale che $f(\overline{x}) \in]a, b[\subset V$. Notiamo che $f(\overline{x}) \in]a, b[$ significa $f(\overline{x}) - a > 0$ e $f(\overline{x}) - b < 0$. Queste due diseguaglianze devono conservarsi in un intorno U di $\overline{x}$ per il Teorema della permanenza del segno. Allora, $\forall x \in U$ si avrà: $f(x) - a > 0$ e $f(x) - b < 0$, cioè $f(x) \in]a, b[\subset V$. Questo fatto giustifica la seguente definizione.

Definizione 4.1.1 *Siano $A \subset I\!R$, $f : A \to I\!R$ una funzione ed $\overline{x} \in A$. Si dice che f è una funzione continua in $\overline{x}$ se $\forall\, V$ intorno di $f(\overline{x})$, $\exists\, U$ intorno di $\overline{x}$ t.c. $\forall x \in U \cap A : f(x) \in V$.*

Definizione 4.1.2 *Si chiama* intorno di $\overline{x}$ su A *la traccia di U sull'insieme A e cioè: $A \cap U$.*

Osservazione 4.1.4 *Le seguenti sono tutte riformulazioni della definizione di funzione continua:*

- *f è continua in $\overline{x}$ se e solo se $\forall\, V$ intorno di $f(\overline{x})$ $\exists\, U$ intorno di $\overline{x}$ su A tale che $\forall x \in U : f(x) \in V$;*
- *f è continua in $\overline{x}$ se e solo se $\forall\, V$ intorno di $f(\overline{x})$ $\exists\, U$ intorno di $\overline{x}$ tale che $f(U \cap A) \subset V$;*
- *f è continua in $\overline{x}$ se $\forall\, V$ intorno di $f(\overline{x})$ $\exists\, U$ intorno di $\overline{x}$ su A tale che $f(U) \subset V$;*

- *f è continua in $\overline{x}$ se $\forall\, V$ intorno di $f(\overline{x})$ $\exists\, U$ intorno di $\overline{x}$ su A tale che $U \subset f^{-1}(V)$;*
- *f è continua in $\overline{x}$ se $\forall\, V$ intorno di $f(\overline{x})$: $f^{-1}(V)$ è intorno di $\overline{x}$ su A.*

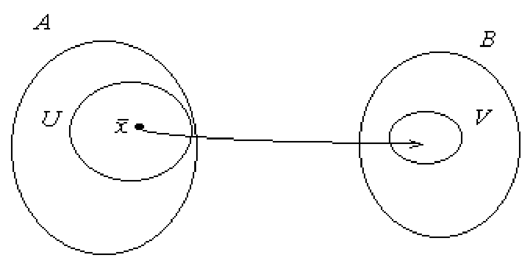
Quindi, possiamo dire in maniera informale che una funzione è continua in un punto $\overline{x}$ se "le sue antimmagini mandano intorni di $f(\overline{x})$ in intorni di $\overline{x}$".

Definizione 4.1.3 *Una funzione è continua se è continua in ogni punto del suo insieme di definizione.*

Osservazione 4.1.5 *Siccome siamo pervenuti alla definizione formale di continuità tramite il Teorema della permanenza del segno, quest'ultimo è dimostrabile formalmente come una conseguenza immediata della definizione.*

Dimostrazione del Teorema della permanenza del segno. Se risulta $f(\overline{x}) > 0$, allora $V =]0, +\infty[$ è intorno di $f(\overline{x})$. Essendo f continua in $\overline{x}$, per definizione, esiste U intorno di $\overline{x}$ tale che $\forall x \in U \cap A$: $f(x) \in V$, cioè $f(x) > 0$. ∎

Visualizziamo la nozione di continuità con i diagrammi fatti con le frecce: se consideriamo una funzione $f : A \to B$ e un intorno V di $f(\overline{x})$, l'antimmagine mediante la funzione f deve costituire un intorno di $\overline{x}$ affinché f risulti continua in tale punto:



Teorema 4.1.6 *Siano A, B, C tre sottoinsiemi di $\mathbb{R}$, $f : A \to B$ e $g : B \to C$ due funzioni reali; sia inoltre $\overline{x} \in A$. Se f é continua in $\overline{x}$ e g è continua in $f(\overline{x})$, allora $g \circ f$ è continua in $\overline{x}$.*

Dimostrazione. Applichiamo la definizione formale di continuità; consideriamo, pertanto, un intorno W del punto di arrivo $g \circ f(\overline{x}) = g(f(\overline{x}))$. Se g è continua, allora si ha che $g^{-1}(W) = V$ è un intorno di $f(\overline{x})$. Essendo anche f continua in $\overline{x}$, si ha che $f^{-1}(V)$ è intorno di $\overline{x}$ e cioé $f^{-1}(g^{-1}(W))$ è un intorno di $\overline{x}$. Si dimostra che $f^{-1}(g^{-1}(W)) = (g \circ f)^{-1}(W)$. Quindi, l'antimmagine di W è un intorno di $\overline{x}$ su A, per cui $g \circ f$ è continua in $\overline{x}$. ∎

Quando abbiamo dato la definizione di intorno di un numero reale $\overline{x}$, abbiamo visto come questa possa essere formulata tramite una soglia che distingue i punti da considerarsi vicini ad $\overline{x}$. Quindi, nella definizione di continuità possiamo limitarci a considerare il caso $V = V_\varepsilon(f(\overline{x}))$ per $\varepsilon > 0$ generico. Per inclusione si copre il caso di qualunque V. Allo stesso modo, possiamo limitarci a prendere $U = V_\delta(\overline{x})$ in corrispondenza di una (diversa) generica soglia $\delta > 0$. Quindi, la definizione di funzione continua in un punto $\overline{x}$ si può riformulare nel seguente modo.

Definizione 4.1.4 *Siano $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ ed $\overline{x} \in A$. f è continua in $\overline{x}$ se* $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0$ *tale che* $\forall x \in U = V_\delta(\overline{x}) : f(x) \in V = V_\varepsilon(f(\overline{x}))$.

Esplicitando il significato di $V_\delta(\overline{x})$ e di $V_\varepsilon(\overline{x})$ la definizione precedente assume la seguente forma.

Definizione 4.1.5 *La funzione f è continua in $\overline{x}$ se*

$$\forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0 \ t.c. \ \forall x \in A, |x - \overline{x}| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(\overline{x})| < \varepsilon.$$

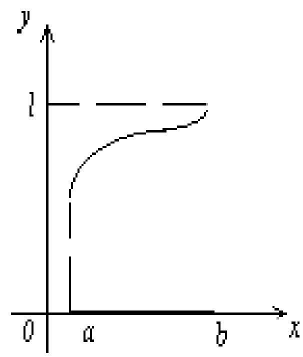
Da tutte le caratterizzazioni appena esposte, si capisce che il concetto di continuità in un punto $\overline{x}$ traduce la proprietà secondo la quale il valore di $f(x)$ è molto vicino al valore di $f(\overline{x})$ se x è molto vicino a $\overline{x}$. Più precisamente, quantificando con un valore ε una "soglia sulla distanza", possiamo intendere che $f(x)$ è molto vicino a $f(\overline{x})$ se $|f(x) - f(\overline{x})| < \varepsilon$. Se la funzione è continua, per quanto ε possa essere stato fissato piccolo, deve essere possibile fissare una ulteriore soglia δ che esprima una condizione di vicinanza fra x e $\overline{x}$ in modo tale che quando questa risulti soddisfatta (cioè $|x-\overline{x}| < \delta$), $f(x)$ risulti vicino a $f(\overline{x})$ nei termini desiderati ($|f(x)-f(\overline{x})| < \varepsilon$).

4.2 Limite di funzioni.

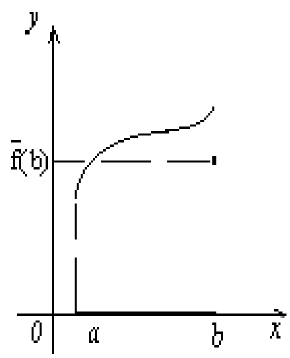
Anche per il concetto di limite, cominciamo col dare una definizione, in un caso particolare, di tipo intuitivo. Questa ci condurrà subito alla definizione formale, anche in condizioni più generali.

Consideriamo un intervallo aperto e non vuoto $]a, b[\subset \mathbb{R}$ ed una funzione $f :]a, b[\to \mathbb{R}$. Naturalmente non possiamo parlare di valore della funzione in b, dal momento che b non appartiene all'insieme di definizione. Esiste comunque, in certi casi, un valore a cui $f(x)$ si avvicina quando x si avvicina a b. Possiamo facilmente precisare tale condizione ricorrendo al concetto già noto di continuità. Dire che $f(x)$ si avvicina ad un valore $l \in \mathbb{R}$ quando x si avvicina a b significa dire che prolungando la funzione f in b, ponendola uguale ad l, si ottiene una funzione che in b risulta continua.

Esempio 4.2.1 *Consideriamo la funzione, non definita nel punto $\overline{x} = b$, il cui andamento è espresso dal seguente grafico:*



È impossibile vedere dal grafico che la funzione in b non è definita ma graficamente si nota che l'unico valore che rende la funzione prolungata continua in $\overline{x} = b$ è $l \in I\!R$. Infatti, se consideriamo un diverso prolungamento $\overline{f}$ dove $\overline{f}(b) \neq l$, si ottiene una funzione non continua come si può vedere dal disegno seguente.



Troveremo una definizione formale di limite esplicitando la richiesta di continuità di $\overline{f}$ in $\overline{x} = b$.

Poniamo $A =]a, b]$ e teniamo conto del fatto che $\overline{f} = f$ su $]a, b[$, cioè su $A \setminus \{\overline{x}\}$, e che $\overline{f}(\overline{x}) = l$. Applicando la definizione formale di continuità di $\overline{f}$ in $\overline{x}$, abbiamo che: $\overline{f}$ è continua in $\overline{x}$ se e solo se

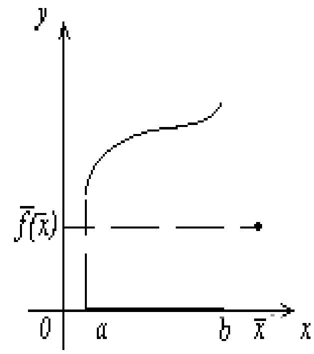
$$\forall\, V \text{ intorno di } \overline{f}(\overline{x}) \;\exists\, U \text{ intorno di } \overline{x} \text{ tale che } \forall x \in A \cap U : \; \overline{f}(x) \in V.$$

Essendo la condizione $\overline{f}(x) \in V$ soddisfatta per $x = \overline{x}$ poiché $\overline{f}(\overline{x}) = l$, possiamo limitarci ai valori di x diversi da $\overline{x}$, su cui f e $\overline{f}$ assumono lo stesso valore. La richiesta diventa: $\overline{f}$ è continua in $\overline{x}$ se e solo se

$$\forall\, V \text{ intorno di } l, \;\exists\, U \text{ intorno di } \overline{x} \text{ t.c. } \forall x \in A \cap U\,, x \neq \overline{x} : \; f(x) \in V.$$

Si vede subito che questo modo di ragionare non ha più senso se cerchiamo di definire un valore limite in un punto $\overline{x} > b$; infatti, prolungando la funzione in $\overline{x}$, questo sarebbe un punto isolato del nuovo insieme di definizione e qualunque valore di l renderebbe la funzione $\overline{f}$ continua in $\overline{x}$.

Esempio 4.2.2 *Consideriamo la funzione dell'esempio precedente e consideriamo un punto* $\overline{x} \in I\!R$, $\overline{x} > b$:



Questo prolungamento deve essere per forza continuo in $\overline{x}$, *perché* $\overline{x}$ *è un punto isolato per* $\overline{f}$.

Da questi esempi si capisce che prendendo, in generale, $A \subset I\!R$ ed $f : A \to I\!R$, parleremo di limite di f in $\overline{x}$ solo per punti $\overline{x}$ che non risultino isolati da A, tali cioè che $\overline{x}$ sia un punto di accumulazione per A. In questo caso, possiamo assumere la caratterizzazione precedente quale definizione formale di limite di f in $\overline{x}$.

Definizione 4.2.1 *Dati* $A \subset I\!R$, $f : A \to I\!R$, $\overline{x} \in \overline{I\!R}$ *punto di accumulazione per* A *ed* $l \in \overline{I\!R}$, *diciamo che* l *è limite di* $f(x)$ *per* x *che tende ad* $\overline{x}$ *e scriviamo:*

$$\lim_{x \to \overline{x}} f(x) = l$$

se $\forall\, V$ *intorno di* l *esiste* U *intorno di* $\overline{x}$ *tale che* $\forall x \in A \cap U \setminus \{\overline{x}\} : f(x) \in V$.

Osservazione 4.2.1 *Notiamo subito i seguenti particolari:*

- *Anche se il discorso introduttivo è stato fatto nel caso in cui* $\overline{x}$, $l \in I\!R$, *non c'è alcuna ragione di doversi limitare a tale caso nel dare la precedente definizione. Infatti, il concetto di intorno è stato dato sia per numeri reali che per* $\pm\infty$.

- *È assolutamente irrilevante sapere se* $\overline{x} \in A$ *oppure no, dal momento che solo i valori di* f *in* $A \setminus \{\overline{x}\}$ *risultano presi in considerazione.*

Quindi, mentre per la definizione di continuità è importante che $\overline{x} \in A$ *ed è assolutamente irrilevante sapere se* $\overline{x}$ *è di accumulazione o no, per la definizione di limite le cose stanno esattamente al contrario: è indispensabile che* $\overline{x}$ *sia di accumulazione ed è irrilevante sapere se* $\overline{x} \in A$.

Analogamente a quanto fatto nel caso della continuità anche per il limite, quando $\overline{x}$, $l \in I\!R$, al posto degli intorni U e V si possono usare due soglie sulla distanza ε e δ.

Definizione 4.2.2 *Dati* $A \subset I\!R$, $f : A \to I\!R$, $\overline{x} \in I\!R$ *punto di accumulazione per* A *ed* $l \in I\!R$, *si ha che* $\lim_{x \to \overline{x}} f(x) = l$ *se* $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \, \delta > 0$ *tale che* $\forall x \in A$, $x \neq \overline{x}$, *risulta che* $|x - \overline{x}| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$.

Osservazione 4.2.2 *Notiamo subito che, così come la definizione di limite può essere data facendo riferimento al concetto di continuità, la definizione di continuità può essere, a sua volta, caratterizzata ricorrendo al concetto di limite.*

Teorema 4.2.1 *Dati* $A \subset I\!R$, $f : A \to I\!R$ *ed* $\overline{x} \in A$, *si distinguono i seguenti casi:*

1. *se* $\overline{x}$ *è un punto di accumulazione, allora* f *è continua in* $\overline{x}$ *se e solo se* $\lim_{x \to \overline{x}} f(x) = f(\overline{x})$;

2. *se* $\overline{x}$ *è un punto isolato, allora* f *è sempre continua in tale punto (come abbiamo già visto).*

Osservazione 4.2.3 *Notiamo che poiché questo teorema è enunciato nelle condizioni che servono per parlare di continuità, cioè chiedendo che* $\overline{x} \in A$, *non ha sempre senso parlare di limite finché non si esclude il caso che* $\overline{x}$ *sia un punto isolato.*

La stretta relazione esistente fra il concetto di limite e quello di continuità permette di estendere facilmente al caso dei limiti alcune proprietà principali della continuità.

Teorema 4.2.2 *(Teorema di passaggio al limite delle diseguaglianze) Siano* $A \subset I\!R$, $f : A \to I\!R$ *una funzione ed* $\overline{x} \in A$ *punto di accumulazione per* A *t.c.* $\forall \, U$ *intorno di* $\overline{x}$, $\exists \, x \in A \cap U \setminus \{\overline{x}\}$ *t.c.* $f(x) \geq 0$, *allora* $\lim_{x \to \overline{x}} f(x) \geq 0$.

Teorema 4.2.3 *Siano* $A \subset I\!R$, f_1, $f_2 : A \to I\!R$ *due funzioni,* $\overline{x} \in \overline{I\!R}$ *punto di accumulazione per* A *ed* l_1, $l_2 \in \overline{I\!R}$ *tale che* $l_1 = \lim_{x \to \overline{x}} f_1(x)$ *ed* $l_2 = \lim_{x \to \overline{x}} f_2(x)$. *Se* $\forall \, U$ *intorno di* $\overline{x}$, $\exists \, x \in A \cap U \setminus \{\overline{x}\}$ *tale che* $f_1(x) \leq f_2(x)$, *allora* $l_1 \leq l_2$.

Corollario 4.2.4 *Nelle stesse ipotesi del teorema precedente, se* $\exists \, U$ *intorno di* $\overline{x}$ *tale che* $\forall x \in A \cap U \setminus \{\overline{x}\} : \; f_1(x) \leq f_2(x)$, *allora* $l_1 \leq l_2$.

Quest'ultimo teorema si può ricondurre a quello analogo stabilito per la continuità quando $\overline{x}, l_1, l_2 \in I\!R$. È chiaro dalla definizione che il limite di una funzione in un punto di accumulazione può esistere o non esistere; esso è un oggetto ipotetico e vediamo ora che, comunque, nel caso dovesse esistere, esso sarebbe unico, cioé è un oggetto ben determinato.

Corollario 4.2.5 *(Unicità del limite) Sia* $f : A \to I\!R$, $\overline{x}$ *punto di accumulazione per* A; *se* l_1, $l_2 \in \overline{I\!R}$ *sono entrambi limiti di* f *in* $\overline{x}$, *allora* $l_1 = l_2$.

DIMOSTRAZIONE. Se $l_1,\ l_2 \in \overline{I\!R}$ sono entrambi limiti di f in $\overline{x}$, applicando il Teorema 4.2.3, prendendo $f_1 = f_2 = f$, si trova $l_1 \le l_2$ e, analogamente, $l_2 \le l_1$. Da questo segue che $l_1 = l_2$ e, quindi, il limite, quando esiste, è unico. ∎

Nelle ipotesi del Teorema 4.2.3 si enuncia il seguente Corollario.

Corollario 4.2.6 *(Teorema sul limite della restrizione) Se $\exists\, U$ intorno di $\overline{x}$ t.c. $\forall x \in A \cap U \setminus \{\overline{x}\} :\ f_1(x) = f_2(x)$, allora $l_1 = l_2$.*

Notiamo, inoltre, che la nozione di limite ha carattere locale in quanto dipende solo dalla restrizione di f ad un qulsiasi intorno del punto $\overline{x}$, cioè, in altri termini, i valori di f su un sottoinsieme B di A di cui $\overline{x}$ non è punto di accumulazione sono del tutto ininfluenti per l'esistenza e il valore del limite.

Teorema 4.2.7 *(Teorema della permanenza del segno) Siano $A \subset I\!R$, $\overline{x}, l \in \overline{I\!R}$, $\overline{x}$ punto di accumulazione per A, $f : A \to I\!R$. Se $l > 0$, allora esiste U intorno di $\overline{x}$ tale che $\forall x \in A \cap U \setminus \{\overline{x}\} : f(x) > 0$.*

4.3 Operazioni sui limiti.

Siano $A \subset I\!R$, $f, g : A \to \overline{I\!R}$ ed $\overline{x} \in I\!R$ punto di accumulazione per A.

Proposizione 4.3.1 *Se $\exists \lim_{x\to\overline{x}} f(x) = l_1$ ed $\exists \lim_{x\to\overline{x}} g(x) = l_2$ e se $l_1 + l_2$ ha senso, allora:*

$$\exists \lim_{x\to\overline{x}} (f(x) + g(x)) = l_1 + l_2.$$

La somma di due numeri di $\overline{I\!R}$ ha sempre senso tranne quando uno dei due è $+\infty$ a l'altro è $-\infty$. Se accade questo, si dice che il limite della funzione somma $f + g$ si presenta sotto forma indeterminata.

Proposizione 4.3.2 *Se $\exists \lim_{x\to\overline{x}} f(x) = l_1$ ed $\exists \lim_{x\to\overline{x}} g(x) = l_2$ e se $l_1 l_2$ ha senso, allora:*

$$\exists \lim_{x\to\overline{x}} f(x) g(x) = l_1 l_2.$$

Il prodotto di due numeri di $\overline{I\!R}$ ha sempre senso tranne quando uno dei due 'e $\pm\infty$ e l'altro è 0. In tal caso si dice che il limite della funzione prodotto $f\ g$ si presenta sotto forma indeterminata.

Sostituendo g con $-g$ nell'enunciato della Proposizione 4.3.1 si ha anche che:

Proposizione 4.3.3 *Se $\exists \lim_{x\to\overline{x}} f(x) = l_1$ ed $\exists \lim_{x\to\overline{x}} g(x) = l_2$ e se $l_1 - l_2$ ha senso, allora:*

$$\exists \lim_{x\to\overline{x}} (f(x) - g(x)) = l_1 - l_2$$

La differenza di due numeri di $\overline{I\!R}$ ha sempre senso tranne quando $l_1 = l_2 = \pm\infty$.

Proposizione 4.3.4 *Se* $\exists \lim_{x\to\overline{x}} f(x) = l_1$ *ed* $\exists \lim_{x\to\overline{x}} g(x) = l_2$ *e se* $g(x) neq 0$ *in un intorno di* $\overline{x}$ *e* $\frac{l_1}{l_2}$ *ha senso, allora:*

$$\exists \lim_{x\to\overline{x}} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l_1}{l_2}.$$

Nella proposizione precedente, l'ipotesi che sia $g(x) \neq 0$ è importante: infatti ha senso considerare $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ solo quando $g(x) \neq 0$; allora tale ipotesi permette di parlare del quoziente $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ almeno per x "vicino" a $\overline{x}$, cioè in un opportuno intorno di $\overline{x}$ e quindi di considerare il limite. La forma di indeterminazione, in questo caso, si ha quando l_1 e l_2 sono entrambi infiniti o $l_1 = l_2 = 0$.

Teorema 4.3.1 *Siano* $A, B, C \subset I\!R$, $f : A \to B$, $g : B \to C$, $\overline{x}$ *punto di accumulazione per* A, $\overline{y}$ *punto di accumulazione per* B, $l \in I\!R$ *tale che* $lim_{x\to\overline{x}} f(x) = \overline{y}$ *e* $\exists lim_{y\to\overline{y}} g(y) = l$. *Allora, in alcuni casi si può calcolare il limite della funzione composta* $g \circ f$ *e, se esiste, si ha che:*

$$\lim_{x\to\overline{x}} g \circ f(x) = \lim_{y\to\overline{y}} g(y) = l.$$

I casi in cui questo si verifica sono i seguenti:

1. $\overline{y} \in B$ *e* $g(\overline{y}) = l$, *(cioè g è continua in* $\overline{y}$*);*

2. $\exists\, U$ *intorno di* $\overline{x}$ *tale che* $\forall x \in A \cap U \setminus \{\overline{x}\} : f(x) \neq \overline{y}$.

Osservazione 4.3.1 *Se non siamo in alcuno dei casi prescritti dal precedente teorema, si può anche affermare che la tesi del teorema è falsa, più precisamente che* $\lim_{x\to\overline{x}} g \circ f(x)$ *o non esiste o è uguale a* $g(\overline{y}) \neq \lim_{y\to\overline{y}} g(y)$.

Osservazione 4.3.2 *Il Teorema precedente, fornisce in altri termini, un criterio di sostituzione o di cambio di variabile per il calcolo del limite. Infatti, se indichiamo con* y *il valore della funzione* $f(x)$, *vediamo che* $y = f(x)$ *tende al* $\lim_{x\to\overline{x}} f(x)$, *cioè* $\overline{y}$. *Sostituendo, si ha che:*

$$\lim_{x\to\overline{x}} g \circ f(x) = \lim_{x\to\overline{x}} g(f(x)) = \lim_{y\to\overline{y}} g(y) = l.$$

Questo procedimento è reso rigoroso dal Teorema 4.3.1 che ne indica i limiti di validità, cioè i casi 1) e 2).

Esempio 4.3.1 *Consideriamo la funzione* $f : I\!R \setminus \{0\} \to I\!R$ *definita nel seguente modo:* $\forall x \in I\!R \setminus \{0\}$: $f(x) = x \sin\frac{1}{x}$ *ed, inoltre, la funzione* $g : I\!R \to I\!R$ *definita nel seguente modo:* $\forall x \in I\!R :\ g(x) = x^2$. *Poniamo* $\overline{x} = 0$ *e, di conseguenza,* $\overline{y} = \lim_{x\to 0} f(x) = 0$. *Siamo nel caso 1), infatti g è continua in zero, e quindi il teorema è applicabile. È utile, comunque, osservare che non siamo nel caso 2), infatti in* *ogni intorno di zero ci sono punti x tali che $\frac{1}{x}$ sia un multiplo di π e di conseguenza* $\sin \dfrac{1}{x} = 0$. *Poichè il Teorema 4.3.1 è applicabile, si ha:*

$$\lim_{x \to 0} (x \sin \frac{1}{x})^2 = \lim_{x \to 0} g(x \sin \frac{1}{x}) = \lim_{y \to 0} g(y) = \lim_{y \to 0} y^2 = 0,$$

dove $y = x \sin \frac{1}{x} \to 0$ *per* $x \to 0$.

Esempio 4.3.2 *Consideriamo la funzione* $f : I\!R \to I\!R$ *così definita:* $\forall x \in I\!R$ $f(x) = x^3$ *ed, inoltre, la funzione* $g : I\!R \to I\!R$ *tale che:* $\forall x \in I\!R$ $g(x) = 1$ *se* $x \neq 0$ *e* $g(x) = 0$ *se* $x = 0$. *Anche in questo caso poniamo* $\overline{x} = 0$. *Siamo nel caso 2), infatti per* $x \neq 0$: $f(x) = x^3 \neq 0$. *Quindi il teorema è applicabile e si ha che*

$$\lim_{x \to 0} g(x^3) = \lim_{y \to 0} g(y) = 1.$$

Osserviamo che non siamo nel caso 1), dato che la funzione g non è continua in zero.

Esempio 4.3.3 *Consideriamo la funzione* $f : I\!R \setminus \{0\} \to I\!R$ *definita nel seguente modo:* $\forall x \in I\!R \setminus \{0\}$: $f(x) = x \sin \dfrac{1}{x}$ *ed, inoltre, la funzione* $g : I\!R \to R$ *tale che:* $\forall x \in I\!R$ $g(x) = 1$ *se* $x \neq 0$ *e* $g(x) = 0$ *se* $x = 0$. *In questo caso, come abbiamo osservato, non siamo né nel caso 1) né nel caso 2), quindi, il teorema non è applicabile e, come abbiamo già detto, non deve esserci il limite o questo, se esiste, non può essere uguale a* $\lim_{y \to \overline{y}} g(y) = 1$. *Infatti, il limite non esiste poichè in ogni intorno di* $\overline{x} = 0$ *possiamo prendere un punto* $x \neq 0$ *tale che* $\dfrac{1}{x}$ *sia un multiplo di* π *e, quindi, avremo* $f(x) = 0$ *e* $(g \circ f)(x) = 0$. *Effettuando un passaggio al limite, se eventualmente esistesse il* $\lim_{x \to 0} (g \circ f)(x)$, *questo dovrebbe essere uguale a 0. Analogamente, possiamo prendere un punto* $x \neq 0$ *tale che* $\dfrac{1}{x}$ *non sia un multiplo di* π *e, quindi, avremo* $f(x) \neq 0$ *e* $(g \circ f)(x) = 1$. *Per il Teorema di passaggio al limite segue che l'eventuale limite deve essere uguale a 1. Quindi, il limite non esiste.*

4.4 Limite destro e sinistro.

Sia $A \subset I\!R$, $f : A \to I\!R$ una funzione ed $\overline{x}$ punto di accumulazione per A. Consideriamo i sottoinsiemi A_+ e A_- di A definiti come segue:

$$A_+ = \{x \in A \mid x \geq \overline{x}\}, \quad A_- = \{x \in A \mid x \leq \overline{x}\}.$$

Essi rappresentano rispettivamente l'insieme dei punti di A a destra e a sinistra di $\overline{x}$. Notiamo che $\overline{x}$ è di accumulazione per A_+ se e solo se è di accumulazione a destra per A ed è di accumulazione per A_- se e solo se è di accumulazione a sinistra per A. Quindi, in generale, $\overline{x}$ sarà di accumulazione per almeno uno dei due sottoinsiemi.

Definizione 4.4.1 *Se $\overline{x}$ è di accumulazione a destra per A, e quindi è di accumulazione per A_+ , possiamo considerare l'eventuale limite in $\overline{x}$ di $f_{|A_+}$. Tale limite, se esiste, si chiama limite destro di f in $\overline{x}$.*

Analogamente si definisce il limite sinistro come segue.

Definizione 4.4.2 *Se $\overline{x}$ è di accumulazione a sinistra per A, e quindi è di accumulazione per A_- , possiamo considerare l'eventuale limite in $\overline{x}$ di $f_{|A_-}$. Tale limite, se esiste, si chiama limite sinistro di f in $\overline{x}$.*

Osservazione 4.4.1 *Il limite destro e il limite sinistro di una funzione si possono definire anche direttamente, ottenendo una definizione molto simile a quella di limite, con la sola differenza che invece di considerare un intorno del punto $\overline{x}$ se ne considera solo un intorno destro o un intorno sinistro.*

Definizione 4.4.3 *Diciamo che l è limite destro di $f(x)$ per x tendente ad $\overline{x}$ e scriviamo:*

$$\lim_{x\to\overline{x}^+} f(x) = l$$

se $\forall\, V$ intorno di l $\exists\, U$ intorno destro di $\overline{x}$ tale che $\forall x \in A \cap U \setminus \{\overline{x}\} : f(x) \in V$.

Definizione 4.4.4 *Diciamo che l è limite sinistro di $f(x)$ per x tendente ad $\overline{x}$ e scriviamo:*

$$\lim_{x\to\overline{x}^-} f(x) = l$$

se $\forall\, V$ intorno di l $\exists\, U$ intorno sinistro di $\overline{x}$ tale che $\forall x \in A \cap U \setminus \{\overline{x}\} : f(x) \in V$.

Vediamo quali sono le relazioni fra il concetto di limite e quello di limite destro o sinistro in un punto di accumulazione $\overline{x}$.

Proposizione 4.4.1 *Sia $A \subset I\!R$, $f : A \to I\!R$ una funzione ed $\overline{x}$ punto di accumulazione per A. Distinguiamo i seguenti tre casi:*

1. *Se $\overline{x}$ è punto di accumulazione solo a destra per A, allora $\lim_{x\to\overline{x}} f(x)$ esiste se e solo se esiste il $\lim_{x\to\overline{x}^+} f(x)$ e i due limiti sono uguali.*
2. *Se $\overline{x}$ è punto di accumulazione solo a sinistra per A, allora $\lim_{x\to\overline{x}} f(x)$ esiste se e solo se esiste il $\lim_{x\to\overline{x}^-} f(x)$ e i due limiti sono uguali.*
3. *Se $\overline{x}$ è punto di accumulazione sia a sinistra che a destra per A, allora $\lim_{x\to\overline{x}} f(x)$ esiste se e solo se esistono il $\lim_{x\to\overline{x}^-} f(x)$ e il $\lim_{x\to\overline{x}^+} f(x)$ e tali limiti sono uguali. In tal caso il valore del limite coincide con quello del limite sinistro e del limite destro.*

Osservazione 4.4.2 *Se $\overline{x} = +\infty$, $\overline{x}$ è di accumulazione solo a sinistra per A e, quindi, siamo nel caso 2); allora, è equivalente parlare di limite o di limite sinistro. Analogamente, se $\overline{x} = -\infty$ esso è di accumulazione solo a destra per A e, quindi, siamo nel caso 1); allora, è equivalente parlare di limite o di limite destro.*

Allo stesso modo si può parlare di continuità a sinistra e a destra in un punto $\overline{x} \in A$ per una funzione $f : A \to I\!R$.

Definizione 4.4.5 *Una funzione f si dice continua a destra in $\overline{x}$ se $f_{|A_+}$ è continua in $\overline{x}$.*

Definizione 4.4.6 *Una funzione f si dice continua a sinistra in $\overline{x}$ se $f_{|A_-}$ è continua in $\overline{x}$.*

Anche i concetti di continuità a destra e a sinistra possono essere definiti direttamente, ricorrendo ai concetti di intorno destro e sinistro di $\overline{x}$.

Definizione 4.4.7 *f è continua a destra in $\overline{x}$ se $\forall\ V$ intorno di $f(\overline{x})$ $\exists U$ intorno destro di $\overline{x}$ t.c. $\forall x \in A \cap U$: $f(x) \in V$.*

Definizione 4.4.8 *f è continua a sinistra in $\overline{x}$ se $\forall\ V$ intorno di $f(\overline{x})$ $\exists U$ intorno sinistro di $\overline{x}$ t.c. $\forall x \in A \cap U$: $f(x) \in V$.*

Anche nel caso della continuità si può enunciare la seguente proposizione:

Proposizione 4.4.2 *Sia $A \subset I\!R$, $f : A \to I\!R$ una funzione ed $\overline{x} \in A$. Allora, f è continua in $\overline{x}$ se e solo se essa è continua sia a sinistra che a destra in $\overline{x}$.*

Osservazione 4.4.3 *Queste ultime due proposizioni si deducono facilmente l'una dall'altra visto lo stretto legame che intercorre fra il concetto di continuità e quello di limite.*

4.5 Continuità e monotonia. Teorema di Weierstrass.

Esistono diverse proprietà che coinvolgono sia il concetto di monotonia che quello di continuità o di limite. Cominciamo con l'osservare che una funzione monotona ha sempre limite sinistro o destro in un punto di accumulazione a sinistra o a destra.

Proposizione 4.5.1 *Sia $A \subset I\!R$, $f : A \to I\!R$ una funzione ed $\overline{x}$ punto di accumulazione a sinistra per A. Se f è crescente, allora esiste*

$$\lim_{x \to \overline{x}^-} f(x) = \sup f(A_- \setminus \{\overline{x}\}).$$

In particolare,

$$\lim_{x \to \overline{x}^-} f(x) \le f(\overline{x}).$$

Questa proposizione ammette tre varianti immediate.

Proposizione 4.5.2 *Sia $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione ed $\overline{x}$ punto di accumulazione a destra per A. Se f è crescente, allora esiste*

$$\lim_{x \to \overline{x}^+} f(x) = \inf f(A_+ \setminus \{\overline{x}\}).$$

In particolare,

$$\lim_{x \to \overline{x}^+} f(x) \geq f(\overline{x}).$$

Proposizione 4.5.3 *Sia $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione ed $\overline{x}$ punto di accumulazione a sinistra per A. Se f è decrescente, allora esiste*

$$\lim_{x \to \overline{x}^-} f(x) = \inf f(A_- \setminus \{\overline{x}\}).$$

In particolare,

$$\lim_{x \to \overline{x}^-} f(x) \geq f(\overline{x}).$$

Proposizione 4.5.4 *Sia $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione ed $\overline{x}$ punto di accumulazione a destra per A. Se f è decrescente, allora esiste*

$$\lim_{x \to \overline{x}^+} f(x) = \sup f(A_+ \setminus \{\overline{x}\}).$$

In particolare,

$$\lim_{x \to \overline{x}^+} f(x) \leq f(\overline{x}).$$

Teorema 4.5.1 *Se $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ è una funzione monotona e se $f(A)$ è un intervallo, allora f è continua.*

DIMOSTRAZIONE. Dire che f è monotona significa dire che f è crescente o decrescente. Supponiamo, quindi, che f sia crescente e supponiamo, inoltre, che f non sia continua in un punto $\overline{x} \in A$ e che non risulti continua, per esempio, a sinistra. Questo significa che:

$$\lim_{x \to \overline{x}^-} f(x) < f(\overline{x}).$$

Prendiamo un punto a tale che $\lim_{x \to \overline{x}^-} f(x) < a < f(\overline{x})$. Prendiamo, inoltre, un qualunque $x \in A$; se $x < \overline{x}$, allora:

$$f(x) \leq \sup f(A_- \setminus \{\overline{x}\}) = \lim_{x \to \overline{x}^-} f(x) < a.$$

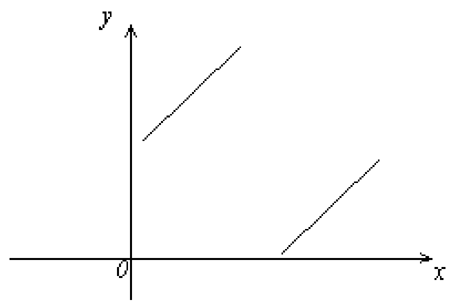
Se $x \geq \overline{x}$, allora:

$$a < f(\overline{x}) \leq f(x).$$

In ogni caso, $\forall x \in A : f(x) \neq a$. Siccome f assume valori inferiori ad a (a sinistra di $\overline{x}$) e valori maggiori di a (in $\overline{x}$ e alla sua destra), l'immagine di f non è un intervallo. ∎

Ricordiamo che una funzione reale risulta strettamente monotona se e solo se è monotona e ingettiva. La stretta monotonia appare, quindi, una condizione più forte dell'ingettività. Vediamo ora che in generale tale condizione è strettamente più forte, nel senso cioè che esistono funzioni ingettive che non sono monotone.

Esempio 4.5.1 *La funzione rappresentata dal seguente grafico:*



è ingettiva, infatti nessuna retta orizzontale interseca il grafico più di una volta e non è monotona. Il lettore è invitato a rendersi conto del fatto che questo tipo di funzione risulta:

1. *definita su un insieme che non è un intervallo, se i due rami non toccano la stessa verticale;*

2. *discontinua altrimenti.*

Ci si può facilmente convincere del fatto che è impossibile trovare un controesempio del tipo precedente prendendo la funzione continua e definita su un intervallo. Infatti, con l'aiuto del Teorema degli zeri, si può provare il seguente risultato.

Teorema 4.5.2 *Se A è un intervallo di $\mathbb{R}$ ed $f : A \to \mathbb{R}$ è una funzione continua, allora:*

$$f \text{ è ingettiva } \Leftrightarrow f \text{ è strettamente monotona.}$$

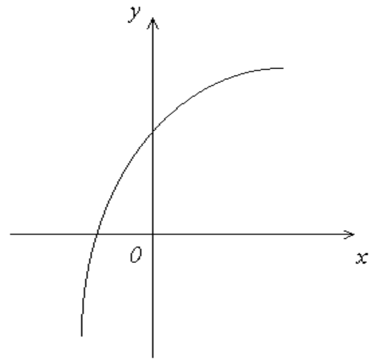
Osservazione 4.5.1 *Se A è un intervallo di $\mathbb{R}$ ed $f : A \to \mathbb{R}$ è una funzione continua, la non monotonia di f risulta peraltro equivalente alla presenza di punti di minimo o di massimo locale interni. Quindi, il precedente teorema può essere formulato nel seguente modo:*

Teorema 4.5.3 *Se A è un intervallo di $\mathbb{R}$ ed $f : A \to \mathbb{R}$ è una funzione continua, allora:*

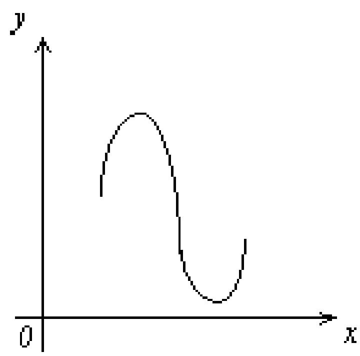
$$f \text{ è ingettiva } \Leftrightarrow f \text{ non ha punti di massimo o di minimo locale interni.}$$

In altri termini, le funzioni continue definite su un intervallo sono ingettive quando hanno un andamento sempre in salita o sempre in discesa, mentre presentano punti di minimo o di massimo locale interni se cambia l'andamento (cioè se in alcuni tratti il grafico scende e in altri sale).

Esempio 4.5.2 *Consideriamo la funzione f espressa dal seguente grafico:*



La funzione è ingettiva perché nessuna retta orizzontale interseca più di una volta il grafico. Inoltre, non ci sono punti di minimo o di massimo locale interni. Mentre la funzione rappresentata dal seguente grafico:



non è ingettiva. In questo caso, come si può vedere dal grafico, la funzione ammette punti di minimo e di massimo locale interni.

È bene prestare attenzione al fatto che le ultime considerazioni coinvolgono il concetto di punti di minimo o di massimo locale *interni* infatti, se la funzione è ad esempio strettamente monotona crescente, un punto risulta minimo locale se e solo se è isolato a sinistra e risulta massimo locale se e solo se è isolato a destra. In particolare, se A è un intervallo ed f è strettamente monotona crescente, f assume minimo se e solo se A contiene il suo estremo sinistro e assume massimo se e solo se contiene il suo estremo destro. È quindi chiaro che all'interno punti di massimo o di minimo non vi possono essere, ma questo non impedisce che vi possano essere punti di massimo o di minimo sul bordo. Vedremo anzi, fra poco, che quando A contiene tutti i suoi punti di bordo e gli estremi di A sono finiti (A chiuso limitato e non vuoto), qualunque funzione continua deve necessariamente avere punti di minimo e di massimo assoluti.

Teorema 4.5.4 *(Teorema di Weierstrass) Sia $A \subset \mathbb{R}$, A chiuso e limitato, $A \neq \emptyset$; sia $f : A \to \mathbb{R}$ continua, allora f ha minimo e massimo assoluto (quindi, f è limitata).*

Osservazione 4.5.2 *Non serve che A sia un intervallo, occorre e basta che sia chiuso limitato e non vuoto.*

Osservazione 4.5.3 *Siano $A \subset \mathbb{R}$, A un intervallo, $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Per poter invertire f è necessario richiedere la stretta monotonia. Si può allora parlare di funzione inversa che possiamo considerare definita su $f(A)$ ed a valori in A, cioè:*

$$f^{-1} : f(A) \to A.$$

Per il Teorema di Bolzano, $f(A)$ è ancora un intervallo e quindi f^{-1} è ancora definita su un intervallo. Poiché f è strettamente monotona anche f^{-1} è strettamente monotona. Allora, f^{-1} è continua perché l'immagine di f^{-1} è l'insieme A che è un intervallo.

4.6 Classificazione dei punti di discontinuità.

Siano $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ ed $\overline{x} \in A$.

Definizione 4.6.1 *$\overline{x}$ si dice punto di discontinuità di f se la funzione f non è continua in $\overline{x}$.*

Se $\overline{x}$ è un punto di discontinuità, allora esso è certamente un punto di accumulazione per A perché se fosse isolato la funzione sarebbe continua. I punti di discontinuità si classificano in tre categorie:

1. $\overline{x}$ si dice punto di *discontinuità eliminabile* se $\exists \lim_{x \to \overline{x}} f(x) \in \mathbb{R}$.
   Questo vuol dire che tale limite è diverso da $f(\overline{x})$ altrimenti f sarebbe continua in $\overline{x}$. Si dice punto di discontinuità eliminabile perché possiamo ridefinire la funzione in $\overline{x}$ uguale al valore del limite, rendendola continua.

2. $\overline{x}$ si dice punto di *discontinuità di prima specie* se

   $$\exists \lim_{x \to \overline{x}^+} f(x) = l_+ \in \mathbb{R} \text{ e } \exists \lim_{x \to \overline{x}^-} f(x) = l_- \in \mathbb{R} \text{ con } l_+ \neq l_-.$$

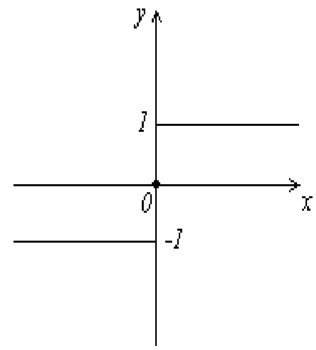
   In questo caso, non esiste la possibilità di modificare la funzione in $\overline{x}$ in modo da renderla continua; si ha, comunque, la possibilità di modificarla per renderla continua a sinistra o di modificarla (in altro modo) per renderla continua a destra. Si parla anche di *salto* della funzione f nel punto $\overline{x}$, rappresentato dalla quntità $l_+ - l_-$.

3. $\overline{x}$ si dice punto di *discontinuità di seconda specie* in ogni altro caso, cioé quando uno dei due limiti o non esiste o è infinito.

Esempio 4.6.1 *Consideriamo la funzione* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tale che*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x \neq 0 :\ f(x) = \frac{x}{|x|}$$

e definita in qualsiasi modo nello zero, avente il seguente grafico:



Si vede che tale funzione ha una discontinuità nello zero. Si tratta di una discontinuità di prima specie e qualunque altro modo di definire la funzione nello zero lascia sempre una discontinuità dello stesso tipo. Il caso in cui $f(0) = -1$ *rende la funzione continua a sinistra nello zero. Se* $f(0) = 1$ *la funzione risulta, invece, continua a destra nello zero. Il salto è dato dalla differenza:*

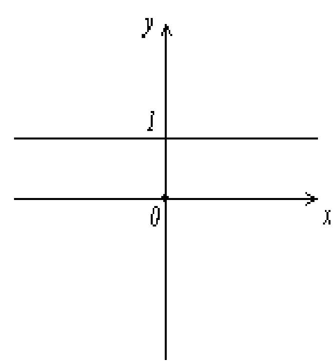
$$\lim_{x \to 0x^+} f(x) - \lim_{x \to 0^-} f(x) = 1 - (-1) = 2.$$

Studiamo la funzione precedente prendendo $f(0) = 0$, *che sembra la scelta più naturale. A questo punto, vediamo che lo zero risulta anche un punto di discontinuità di* $|f|$, *infatti abbiamo che*

$$|f(0)| = |0| = 0 \text{ e per } x \neq 0$$

$$|f(x)| = \left|\frac{x}{|x|}\right| = \frac{|x|}{|x|} = 1.$$

Questa volta, però, basterebbe cambiare il valore nello zero per rendere $|f|$ *una funzione continua. Si tratta infatti di una discontinuità eliminabile.*



Esempio 4.6.2 *Sia* $f : I\!\!R \to I\!\!R$ *definita nel seguente modo:* $\forall x \neq 0 \ f(x) = \dfrac{1}{x}$ *ed estesa in qualsiasi modo nello zero. I limiti sinistro e destro in zero esistono ma non sono finiti. Più precisamente:*

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty \ e \ \lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty.$$

Quindi, abbiamo in questo caso in zero una discontinuità di seconda specie.

Esempio 4.6.3 *Se prendiamo la funzione* $f : I\!\!R \to I\!\!R$ *definita nel seguente modo:* $\forall x \neq 0 \ f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ *ed estesa in qualsiasi modo in zero, addirittura abbiamo il limite in zero e vale* $+\infty$*. Non essendo tale limite finito, non si tratta di una discontinuità eliminabile ma di seconda specie.*

Esempio 4.6.4 *Consideriamo la funzione* $f : I\!\!R \to I\!\!R$ *definita nel seguente modo:* $\forall x \neq 0 \ f(x) = \dfrac{1}{\frac{x}{|x|} + x - 1}$ *ed estesa in qualsiasi modo in zero. Si vede che il limite sinistro è uguale a* $-\dfrac{1}{2}$ *e quello destro vale* $+\infty$*. Quindi, i due limiti esistono ma solo uno dei due è finito, per cui si ha comunque una discontinuità di seconda specie.*

Esempio 4.6.5 *Consideriamo la funzione* $f : I\!\!R \to I\!\!R$ *definita nel seguente modo:* $\forall x \neq 0 \ f(x) = \sin \dfrac{1}{x}$ *ed estesa in qualsiasi modo in zero. In questo caso, non esiste né il limite sinistro né quello destro. Si ha quindi in zero una discontinuità di seconda specie.*

Osservazione 4.6.1 *Combinando gli esempi precedenti, si possono ottenere esempi di tutti i possibili casi di discontinuità di seconda specie. Ad esempio, se per* $x \neq 0$ *prendiamo* $f(x) = \sin \dfrac{1}{\frac{x}{|x|} + x - 1}$*, si ottiene una funzione che ha limite sinistro finito ma non ha limite destro.*

Osservazione 4.6.2 *Una funzione monotona f, in un punto di accumulazione* $\overline{x}$ *da destra e da sinistra, può avere soltanto una discontinuità di prima specie cioé il punto* $\overline{x}$ *può essere o un punto di continuitá o un punto di salto. Graficamente, infatti, si può vedere che tale punto non può essere di dicontinuitá eliminabile. Comunque i risultati del paragrafo precedente permettono di dimostrarlo formalmente. Supponiamo per esempio che la funzione* f *sia crescente, allora se* $\exists \lim_{x \to \overline{x}} f(x)$ *si ha:*

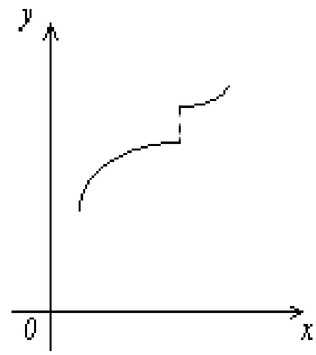
$$\lim_{x \to \overline{x}} f(x) = \lim_{x \to \overline{x}^-} f(x) \leq f(\overline{x}) \leq \lim_{x \to \overline{x}^+} f(x) = \lim_{x \to \overline{x}} f(x).$$

Quindi:

$$\lim_{x \to \overline{x}} f(x) = f(\overline{x}).$$

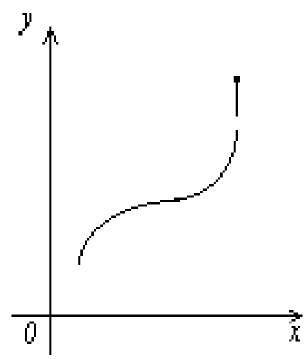
Allo stesso modo si vede invece che se $\overline{x}$ *è un punto isolato da uno dei due lati, tale punto può essere al più di discontinuità eliminabile. Infatti, l'intero limite si riduce al limite sinistro o destro e questo esiste ed è reale come abbiamo già visto.*

Esempio 4.6.6 *Consideriamo la funzione rappresentata dal seguente grafico:*



Il grafico si interrompe in un punto interno ed ha un salto. Per cui si ha una discontinuità di prima specie.

Esempio 4.6.7 *Consideriamo la funzione rappresentata dal seguente grafico:*



Si ha in questo caso una discontinuità in un punto di bordo, quindi tale punto è di accumulazione solo da un lato. Si tratta di una discontinuità eliminabile.

4.7 Uniforme continuitá.

Consideriamo una funzione $f : I\!R \to I\!R$; anche quando la funzione è continua può accadere che un piccolo errore nella determinazione di un valore x possa causare un errore consistente nella determinazione di $f(x)$. Chiariamo questo concetto con il seguente esempio:

Esempio 4.7.1 *Se consideriamo il grafico di una funzione f definita in un insieme $A \subset I\!R$ rappresentato da tutti i punti di un intervallo tranne il punto $\overline{x}$ e se supponiamo che tale funzione presenti un salto in $\overline{x}$ (la funzione rimane continua perché $\overline{x} \notin A$), allora un errore anche molto piccolo nel valutare $x \in A$ può farci passare da un lato all'altro di $\overline{x}$ se il valore di x è molto vicino a $\overline{x}$. Per cui, nel valutare $f(x)$ commetteremo un errore approssimativamente pari al valore del salto della funzione.*

Esempio 4.7.2 *Consideriamo la funzione definita come segue: $f(x) = \frac{1}{x}$ definita in tutto $\mathbb{R} \setminus \{0\}$: se si prende in considerazione la parte del grafico posta nel semipiano delle ascisse positive e considerati due punti $x = 10^{-9}$ e $y = 2 \cdot 10^{-9}$, si può vedere che la distanza fra i due punti è minima mentre la distanza fra i valori assunti dalla funzione f nei due punti è dell'ordine di 10^8.*

Esempio 4.7.3 *Consideriamo la funzione $f(x) = x^2$; subito, possiamo calcolare: $f(x) - f(y) = (x - y) \cdot (x + y)$. Se approssimiamo x con y con un errore molto piccolo, ad esempio prendendo $x = 10^{18}$ e $y = 10^{18} + 10^{-9}$ (quindi, $(x - y)$ è molto piccolo) si vede che, invece, $f(x) - f(y) = (x - y) \cdot (x + y) \geq 2 \cdot 10^{18} \cdot 10^{-9} = 2 \cdot 10^9$, quindi, è un numero molto grande.*

Definizione 4.7.1 *Siano $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$. Si dice che la funzione f è uniformemente continua se:*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ tale che } \forall x, y \in A,\ |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Chiedendo l'uniforme continuità si esclude quindi che la funzione presenti comportamenti evidenziati negli esempi precedenti. Infatti, per quanta precisione si voglia nel determinare il valore $f(x)$ (fissando una soglia ε) è possibile soddisfare la richiesta conoscendo con sufficiente precisione x (con un errore inferiore alla soglia δ). Mettiamo a confronto la definizione di uniforme continuità con quella di continuità. Ricordiamo che dire che f è continua significa dire che

$$\forall y \in A: \ f \text{ è continua in } y$$

cioè

$$\forall y \in A \text{ risulta: } \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ tale che } \forall x \in A, |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Mettendo a confronto quest'ultima definizione con quella di uniforme continuità si vede che per la continuità basta che $\forall\ y \in A$ si possa fissare un valore di δ che quindi dipende da ε e da y, mentre per l'uniforme continuità occorre invece, dato ε, trovare un valore di δ che vada bene per tutti i punti x e y e che, quindi, permetta di avere la stima $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ in maniera, appunto, uniforme.

Per una classe importante di insiemi A non è possibile trovare funzioni continue che non siano anche uniformemente continue. È quello che accade per gli insiemi A che sono chiusi e limitati come è mostrato nel seguente teorema:

Teorema 4.7.1 *(Teorema di uniforme continuità di Cantor) Siano $A \subset \mathbb{R}$, A chiuso e limitato, $f : A \to \mathbb{R}$. Se f è continua, allora f è uniformemente continua.*

Osservazione 4.7.1 *Se l'insieme A fosse solo chiuso, potremmo dire che la funzione continua f é uniformemente continua su tutte le parti limitate di A.*

Teorema 4.7.2 *Siano $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$. Supponiamo che f sia continua e che sia possibile prolungare la f in maniera continua su tutto l'asse reale, cioé stiamo supponendo che f ammetta un prolungamento continuo $\overline{f}$ su tutto $\mathbb{R}$. Allora, f è uniformemente continua sui sottoinsiemi limitati di $\mathbb{R}$. Vale anche il viceversa: se una funzione f è uniformemente continua su ogni sottoinsieme limitato di A, allora ammette un prolungamento continuo su tutto $\mathbb{R}$.*

4.8 Infinitesimi.

Sia $f : A \subset I\!R \to I\!R$ e sia x_0 un punto di accumulazione per A. Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$, diciamo che f *è un infinitesimo per* $x \to x_0$.

Esempio 4.8.1 *Cosideriamo i seguenti esempi.*

1. x *è un infinitesimo per* $x \to 0$;

2. $\sin x$ *è un infinitesimo per* $x \to 0$;

3. $1 - \cos x$ *è un infinitesimo per* $x \to 0$;

4. x^2 *è un infinitesimo per* $x \to 0$;

5. $\dfrac{x}{3}$ *è un infinitesimo per* $x \to 0$;

6. $x - 1$ *è un infinitesimo per* $x \to 1$;

7. $\log x$ *è un infinitesimo per* $x \to 1$;

Se analizziamo i primi cinque casi dell'esempio precedente, notiamo che siamo in presenza di cinque funzioni che risultano essere infinitesimi per $x \to 0$, ma che assumono valori sempre più piccoli con " velocità" diverse.

Un modo per misurare questa " velocità" consiste nel definire l'infinitesimo campione

$$u(x) = x - x_0, \quad \text{infinitesimo per} \quad x \to x_0$$

e nel definire l'ordine di un altro infinitesimo $g(x)$ per $x \to x_0$ nel seguente modo.

Definizione 4.8.1 *Diciamo che* $g(x)$ *è un infinitesimo di ordine* α *(*$\alpha > 0$*) per* $x \to x_0$ *se*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{(x - x_0)^\alpha} = k, \qquad k \in I\!R \setminus \{0\}.$$

In questo caso $k(x - x_0)^\alpha$ *si dice parte principale di* $g(x)$.

Esempio 4.8.2 $u(x) = x$ *è l'infinitesimo campione per* $x \to 0$. *Pertanto, in base alla definizione precedente, possiamo classificare i seguenti infinitesimi*

1. x^2 *è un infinitesimo del secondo ordine;*

2. $\sin x$ *è un infinitesimo del primo ordine;*

3. $\frac{x}{3}$ *è un infinitesimo del primo ordine;*

Dati due infinitesimi $f(x)$ e $g(x)$ per $x \to 0$, le cui parti principali sono rispettivamente $k_1(x-x_0)^\alpha$ e $k_2(x-x_0)^\beta$, si dimostrano le seguenti proprietà.

Se $\alpha < \beta$,

$f(x) \pm g(x)$ ha parte principale $k_1(x-x_0)^\alpha$;

$f(x)g(x)$ ha parte principale $k_1k_2(x-x_0)^{\alpha+\beta}$;

$\frac{f(x)}{g(x)}$ ha parte principale $\frac{k_2}{k_1}(x-x_0)^{\beta-\alpha}$.

Se $\alpha = \beta$ e $k_1 + k_2 \neq 0$,

$f(x) + g(x)$ ha parte principale $k_1 + k_2(x-x_0)^\alpha$.

Se $\alpha = \beta$ e $k_1 + k_2 = 0$,

$f(x) + g(x)$ ha ordine maggiore di α;

$f(x)g(x)$ ha parte principale $-k_1^2(x-x_0)^\alpha$ se $k_1 \neq 0$;

$\frac{f(x)}{g(x)}$ non è un infinitesimo, ma $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = -1$.

Osservazione 4.8.1 *Notiamo che non sempre é possibile stabilire l'ordine di un infinitesimo, come si evince dagli esempi seguenti.*

1.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{-x}}{\frac{1}{x^\alpha}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^\alpha}{e^x} = 0 \quad \forall \alpha > 0,$$

quindi e^{-x} *è un infinitesimo di ordine infinito, per* $x \to +\infty$.

2.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x \, \sin\frac{1}{x}}{x^\alpha} \begin{cases} \text{non esiste se } \alpha = 1 \\ = 0 \text{ se } \alpha < 1 \\ \text{non esiste se } \alpha > 1. \end{cases}$$