Capitolo 3

Proprietà elementari delle funzioni reali

Ricordiamo che una funzione f si dice *reale di variabile reale* se il suo insieme di partenza e quello di arrivo sono sottoinsiemi di $\mathbb{R}$. Nel seguito useremo l'espressione abbreviata *funzioni reali* per riferirci alle precedenti e ne studieremo le proprietà elementari.

3.1 Funzioni monotone.

Definizione 3.1.1 *Una funzione reale $f : A \to B$, definita in A ed a valori in B si dice crescente se*

$$\forall x, y \in A \ t.c. \ x \leq y : f(x) \leq f(y).$$

Quindi, dire che una funzione è crescente equivale a dire che conserva le disuguaglianze. In termini ancora più informali, possiamo dire che una funzione f è crescente se è lecito, in una disuguaglianza concernente le variabili, sostituire ai due membri i valori assunti in essi dalla funzione.

Esempio 3.1.1 *Se a è un numero reale maggiore o uguale a zero, la funzione $f : x \to ax$ è crescente. Infatti, sappiamo che se due elementi x e y verificano la disuguaglianza $x \leq y$, allora moltiplicando i due membri per $a \geq 0$, la disuguaglianza si conserva.*

Esempio 3.1.2 *Consideriamo la seguente diseguaglianza:*

$$z + y \leq -3b + 1.$$

Ci chiediamo se è lecito passare a:

$$(z + y)^3 \leq (-3b + 1)^3 .$$

Questa domanda è esattamente equivalente a chiedere se la funzione che manda x in x^3 è crescente. Quando lo studente conoscerà teoremi che gli permettano di decidere se una funzione è monotona, saprà con sicurezza dire se tale passaggio è lecito o no per lo studio della disuguaglianza.

Osservazione 3.1.1 *Una funzione $f : A \to B$ è crescente se*

$$\forall x, y \in A \text{ t.c. } x < y : f(x) \leq f(y).$$

DIMOSTRAZIONE. Questo criterio differisce dalla definizione solo per l'uso del $<$ al posto del $\leq$ fra gli elementi x e y . Supponiamo che questo criterio sia verificato e siano x e y appartenenti ad A, tali che $x \leq y$. Allora, $x < y$ oppure $x = y$. Se $x < y$, abbiamo chiesto che sia $f(x) \leq f(y)$; se, invece, $x = y$ avremo che $f(x) = f(y)$ e, quindi, $f(x) \leq f(y)$. Quindi, $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$ in ogni caso, per cui f è crescente. ∎

Definizione 3.1.2 *Una funzione reale $f : A \to B$, si dice strettamente crescente se*

$$\forall x, y \in A \text{ t.c. } x < y : f(x) < f(y).$$

Quindi, dire che una funzione è strettamente crescente significa dire che conserva le disuguaglianze strette. In diversi casi, si premette ad un termine la parola *strettamente*, per indicare che la precedente definizione va cambiata interpretando le diseguaglianze in senso stretto.

Proposizione 3.1.1 *Una funzione f è strettamente crescente se e solo se è crescente e ingettiva.*

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che $f : A \to B$ sia ingettiva e crescente. Siano $x, y \in A$ tali che $x < y$. Poiché f è crescente, da $x < y$ segue che $x \leq y$ e, quindi, $f(x) \leq f(y)$. Essendo f ingettiva, da $x < y$ segue che $x \neq y$ e, quindi, $f(x) \neq f(y)$. Dire che $f(x) \leq f(y)$ e $f(x) \neq f(y)$ equivale a dire che $f(x) < f(y)$. Viceversa, sia f strettamente crescente. Presi $x, y \in A$ con $x \neq y$, allora o $x < y$ oppure $y < x$. Se $x < y$, allora $f(x) < f(y)$ e pertanto $f(x) \neq f(y)$. Alla stessa conclusione si perviene se $y < x$, quindi f è ingettiva.

Dunque, se una funzione conserva le disguaglianze strette, allora è strettamente crescente; se, invece, le conserva in una forma più debole, cioè lasciandole come disguaglianze larghe, allora è solo crescente.

Esempio 3.1.3 *Abbiamo visto che la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ t.c. $\forall x \in \mathbb{R}$: $f(x) = ax$ è crescente se $a \geq 0$. Infatti, se $a = 0$ da $x < y$ abbiamo $ax = ay = 0$ e, quindi, le diseguaglianze strette si conservano solo in forma larga. Questo vuol dire che se $a = 0$, la funzione è crescente ma non strettamente. Se, invece, $a > 0$ da $x < y$ segue che $ax < ay$ e, quindi, la funzione risulta strettamente crescente.*

Definizione 3.1.3 *Una funzione $f : A \to B$, si dice decrescente se*

$$\forall x, y \in A \text{ t.c. } x \leq y : f(x) \geq f(y).$$

Quindi, dire che una funzione è decrescente significa dire che inverte le disuguaglianze. In termini ancora più informali, possiamo dire che una funzione f è decrescente se è lecito, in una diseguaglianza concernente le variabili, sostituire ai due membri i valori assunti in essi dalla funzione, a patto di invertire il verso della disuguaglianza.

Esempio 3.1.4 *Dato* $a \leq 0$, *la funzione* $f : x \to ax$ *è decrescente. Infatti, sappiamo che se due elementi* x *e* y *verificano la disuguaglianza* $x \leq y$, *allora moltiplicando i due membri per* $a \leq 0$, *la disuguaglianza si inverte.*

Osservazione 3.1.2 *Una funzione* $f : A \to B$ *è decrescente se*

$$\forall x, y \in A \ t.c. \ x < y : f(x) \geq f(y).$$

Definizione 3.1.4 *Una funzione* $f : A \to B$, *si dice* strettamente decrescente *se* $\forall x, y \in A$ *t.c.* $x < y : f(y) < f(x)$.

Quindi, dire che una funzione è strettamente decrescente significa dire che inverte le diseguaglianze strette. Se una funzione inverte le diseguaglianze strette è strettamente decrescente. Se, invece, le inverte in una forma più debole, cioè considerandole come diseguaglianze larghe, allora è solo decrescente.

Esempio 3.1.5 *Abbiamo visto che la funzione* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *t.c.* $\forall x \in \mathbb{R}$: $f(x) = ax$ *è decrescente se* $a \leq 0$. *Infatti, se* $a = 0$ *da* $x < y$ *segue che* $ax = ay = 0$ *e, quindi, le diseguaglianze strette si invertono solo in forma larga. Questo vuol dire che se* $a = 0$, *la funzione è decrescente ma non strettamente. Se* $a < 0$, $x < y$ *implica* $ax > ay$ *e, quindi, la funzione risulta strettamente decrescente.*

Una funzione reale $f : A \to \mathbb{R}$ tale che $f(A) = \{c\}$ con $c \in \mathbb{R}$ viene detta *funzione costante.*

Osservazione 3.1.3 *Una funzione* f *è costante se e solo se è sia crescente che decrescente. Infatti, se* $f : A \to B$ *è sia crescente che decrescente, presi due punti* $x, y \in A$ *si ha* $f(x) \leq f(y)$ *e* $f(y) \leq f(x)$ *e, cioè,* $f(x) = f(y)$. *Quindi, la funzione assume sempre lo stesso valore.*

Definizione 3.1.5 *Una funzione* f *crescente o decrescente si dice* monotona. *Una funzione* f *si dice* strettamente monotona *se e solo se è strettamente crescente o strettamente decrescente.*

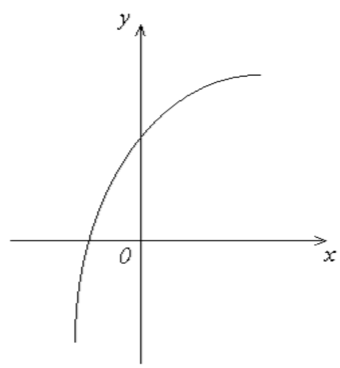
Abbiamo visto che, quando una funzione è monotona ma non strettamente monotona esistono due punti $x, y \in A$ con $x < y$ e $f(x) = f(y)$. È facile vedere che la monotonia della funzione la obbliga ad essere costante in tutti i punti del dominio eventualmente compresi fra x e y.

Osservazione 3.1.4 *Una funzione reale* f *è strettamente monotona se e solo se è monotona e ingettiva.*

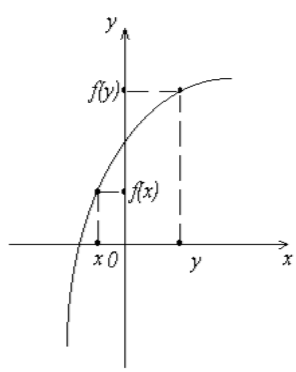
3.2 Grafici di funzioni monotone.

Dal grafico di una funzione, si capisce facilmente se essa è monotona o meno. Infatti, se consideriamo due punti x e y tali che $x \leq y$, cioè x è a sinistra di y in rappresentazione cartesiana, perché f sia monotona crescente occorre che sia $f(x) \leq f(y)$, cioè il punto del grafico che ha ascissa x è più in basso del punto del grafico che ha ascissa y. Occorre, quindi, che spostando un punto da sinistra a destra, sul grafico di f il punto si sposti sempre verso l'alto e, quindi, che il grafico abbia un andamento in salita da sinistra verso destra. Analogamente, perché una funzione sia decrescente, occorre che il grafico abbia un andamento in discesa da sinistra verso destra.

Esempio 3.2.1 *Consideriamo una funzione f avente il seguente grafico:*

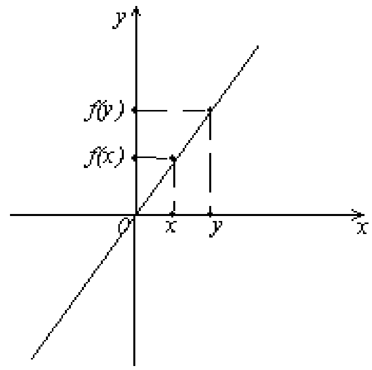


Si vede che questo grafico è in salita e, quindi, vuol dire che se prendiamo un punto x a sinistra di un altro punto y (cioè $x \leq y$), l'altezza del grafico sulla verticale di x sarà inferiore dell'altezza del grafico sulla verticale di y. Queste due altezze, sappiamo che corrispondono rispettivamente ai valori $f(x)$ e $f(y)$ e, quindi, da $x \leq y$ segue che $f(x) \leq f(y)$:

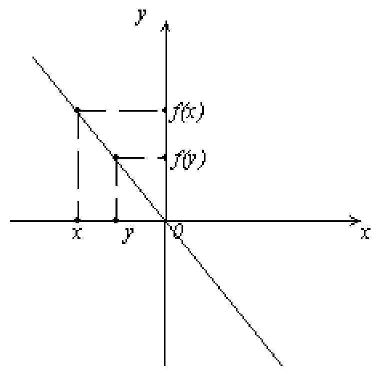


Esempio 3.2.2 *Consideriamo la funzione $f : I\!R \to I\!R$, definita nel seguente modo: $\forall x \in I\!R \; f(x) = ax$. Questa funzione è crescente se $a \geq 0$, mentre è decrescente se $a \leq 0$. Il grafico della funzione $f(x) = ax$ è una retta passante per l'origine ed avente a come coefficiente angolare, essa pertanto è detta funzione lineare. Quindi, una funzione lineare è sempre monotona, inoltre, essa è strettamente crescente quando*

$a > 0$ e strettamente decrescente se $a < 0$. Nel caso $a > 0$, il grafico della funzione $f(x) = ax$ è il seguente:

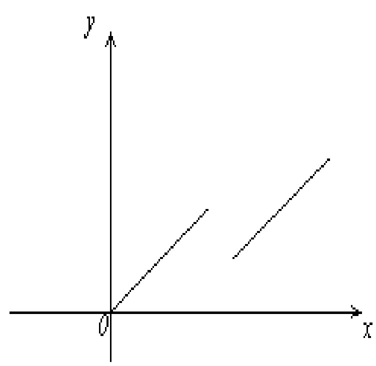


Se $a < 0$, il grafico è il seguente:

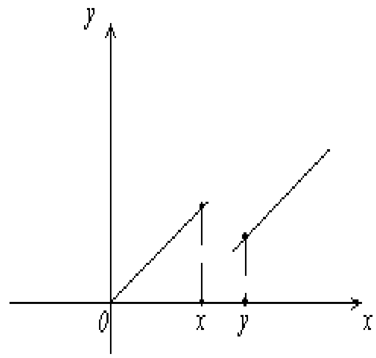


Nell'analizzare l'andamento del grafico di una fuzione al fine di constatarne la monotoniae, occorre prestare attenzione ai punti in cui il grafico si interrompe.

Esempio 3.2.3 *Consideriamo il seguente grafico di funzione:*



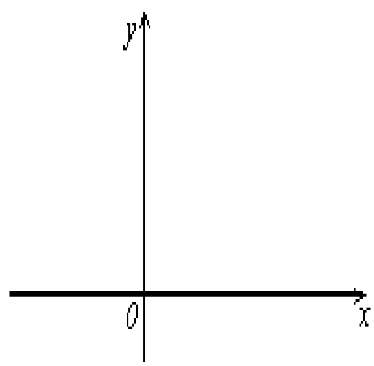
Ci chiediamo se questa funzione è monotona crescente. Possiamo affermare che, pur essendo entrambi i pezzi del grafico in salita, la funzione non è crescente. Infatti, basta prendere i punti x e y come segue in figura:



Si vede dal grafico che l'altezza sulla verticale per x è superiore a quella sulla verticale per y. Risulta, quindi, che $x \leq y$ e $f(x) > f(y)$. Inoltre, se i punti x e y sono presi sulla proiezione di uno stesso pezzo di grafico, la disuguaglianza si conserva e quindi la funzione non è neanche decrescente. Il grafico rappresentato è, quindi, quello di una funzione non monotona.

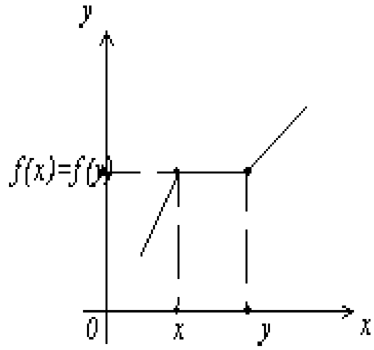
Osservazione 3.2.1 *Il grafico di una funzione costante è, ovviamente, orizzontale.*

Esempio 3.2.4 *Consideriamo la funzione $f : I\!R \to I\!R$, definita nel seguente modo: $\forall x \in I\!R \; f(x) = ax$. Se $a = 0$, allora $f(x) = 0$, la funzione è costante e, quindi, ha la seguente rappresentazione grafica:*



Se una funzione è monotona e non strettamente monotona, esiste sempre una parte del grafico (costituita almeno da due punti), che è perfettamente orizzontale. Infatti, se f è monotona e non strettamente monotona, esistono due punti x e y fra cui la funzione è costante.

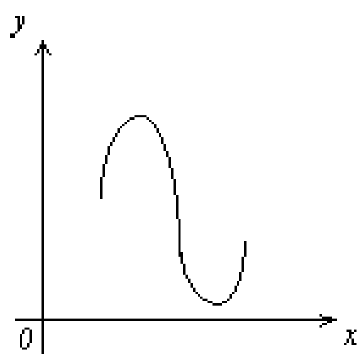
Esempio 3.2.5 *Consideriamo la funzione avente il seguente grafico:*



Si vede subito che questa funzione è monotona ma non strettamente monotona. Infatti, come si può osservare, in questo caso il grafico tende a salire ma la funzione non è ingettiva dato che essa risulta costante in alcune parti dell'insieme di partenza.

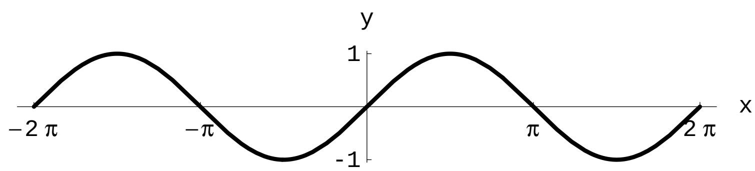
Se il grafico di una funzione in alcune parti tende a salire e in altre tende a scendere, abbiamo una funzione che sicuramente non è monotona (cioè né crescente né decrescente).

Esempio 3.2.6 *Il grafico seguente è quello di una funzione non monotona:*



In alcuni casi, nello studio del grafico di una funzione non monotona, può essere interessante passare a delle restrizioni monotone.

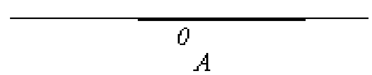
Esempio 3.2.7 *Consideriamo la funzione $f : I\!R \to I\!R$ definita nel seguente modo: $\forall x \in I\!R$, $f(x) = \sin x$; essa non è monotona in tutto il suo insieme di partenza ma basta restringerla all'intervallo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ per ottenere una restrizione strettamente crescente.*



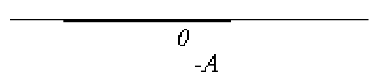
3.3 Funzioni pari, dispari e periodiche.

Dato un insieme $A \subset I\!R$, denotiamo con $-A$ l'insieme *simmetrico*, cioè l'insieme costituito dai punti $-x$ al variare di x in A.

Esempio 3.3.1 *Se A è il seguente insieme:*

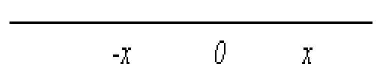


l'insieme simmetrico $-A$ rispetto allo zero è il seguente:



Definizione 3.3.1 *Sia $A \subset I\!R$, si dice che A è un insieme simmetrico se $A = -A$.*

In termini grafici, la precedente definizione restituisce un insieme tale che, se il punto x appartiene ad A, anche il suo simmetrico rispetto all'origine vi appartiene.



Definizione 3.3.2 *Sia A un insieme simmetrico e sia $f : A \rightarrow I\!R$. Si dice che f è una funzione pari se*

$$\forall x \in A : f(-x) = f(x).$$

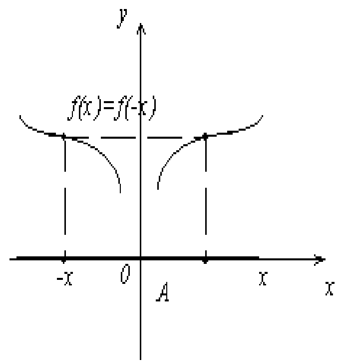
Definizione 3.3.3 *Sia A un insieme simmetrico e sia $f : A \to \mathbb{R}$. Si dice che f è una funzione dispari se*

$$\forall x \in A : f(-x) = -f(x).$$

Osservazione 3.3.1 *L'ipotesi che A sia un insieme simmetrico è fondamentale, altrimenti non avrebbe senso considerare $f(-x)$.*

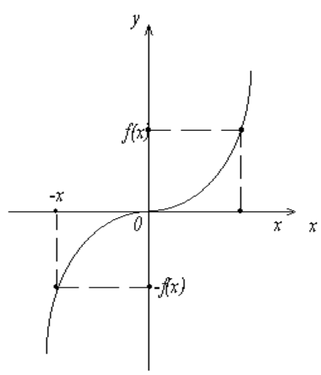
Commentiamo graficamente queste definizioni: consideriamo gli assi cartesiani e una funzione f definita su un insieme simmetrico A. Fissiamo $x \in A$ e consideriamo $f(x)$, se f è pari, allora anche il punto di coordinate $(-x, f(x))$ è un punto del grafico. Questo vuol dire che il grafico della funzione è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate.

Esempio 3.3.2 *Il seguente è il grafico di una funzione pari:*



Si vede che il grafico non cambia a seguito di una riflessione rispetto all'asse delle ordinate. Se la funzione f è dispari, oltre al punto $(x, f(x))$, sul grafico deve esserci anche il punto $(-x, -f(x))$.

Esempio 3.3.3 *Il seguente è il grafico di una funzione dispari:*



In questo caso il grafico non cambia se si riflette rispetto ad entrambi gli assi e cioè rispetto all'origine del sistema di riferimento.

Esempio 3.3.4 *La funzione valore assoluto e la funzione coseno sono entrambe pari.*

Esempio 3.3.5 *La funzione $f(x) = x^n$ è pari se n è pari ed è dispari se n è dispari.*

In generale, se una funzione è definita su un insieme simmetrico non è detto che sia pari o dispari. Tuttavia, si può dire che se A è simmetrico ed f è una funzione definita in A ed a valori in $I\!R$, allora è possibile esprimere in un unico modo la funzione come somma di due funzioni f_1 e f_2, una dispari ed una pari. Infatti, basta prendere $\forall x \in A : f_1(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$ e $\forall x \in A : f_2(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$. È facile verificare che f_1 è una funzione dispari e f_2 è pari. f_1 si dice *parte dispari di* f, mentre f_2 si dice *parte pari di* f. Dire che una funzione f, definita su un insieme simmetrico, è pari è totalmente equivalente a dire che la sua parte dispari è nulla o che la funzione f coincide con la sua parte pari. Analogamente, una funzione è dispari se e solo se la sua parte pari è nulla e cioè se e solo se coincide con la sua parte dispari. Il concetto di parte pari e parte dispari di una funzione, risulta utile per definire alcune funzioni elementari.

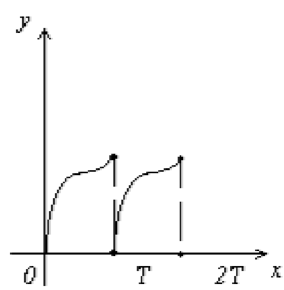
Siano $f : I\!R \to I\!R$ e $T \in I\!R$. Escludiamo il caso banale $T = 0$ e consideriamo il caso $T > 0$.

Definizione 3.3.4 *Si dice che f è una funzione* periodica *di periodo T se*

$$\forall x \in I\!R \; : \; f(x) = f(x+T).$$

Il grafico di una funzione periodica gode della proprietà che, sommando alla variabile x la quantità T, i valori assunti dalla funzione si ripetono. L'esempio classico è dato dalla sinusoide.

Osservazione 3.3.2 *Se f è una funzione periodica di periodo T, è sufficiente considerare il suo grafico in un intervallo di ampiezza T, ad esempio $[0, T[$, e poi replicare il grafico su tutto $I\!R$.*



Osservazione 3.3.3 *Se una funzione è periodica di periodo T, essa lo sarà anche di periodo $2T$. Infatti, $f(x+2T) = f(x+T) = f(x)$.*

Più in generale, una funzione è periodica di periodo T è anche periodica di periodo kT, $\forall k \in \mathbf{Z}$. L'osservazione precedente mostra che una funzione periodica non ha un unico periodo. Tuttavia, se f è una funzione periodica che non ha periodi arbitrariamente piccoli, si parla ugualmente di *periodo di f* intendendo con questo il periodo minimo della funzione, introdotto nella seguente definizione.

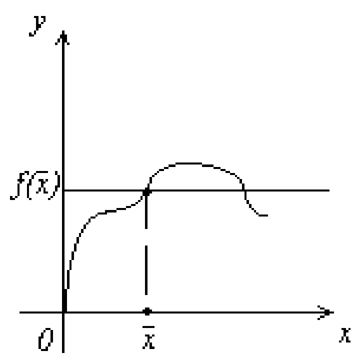
Definizione 3.3.5 *Se f è periodica di periodo $T > 0$ e $\forall 0 < S < T$ f non è periodica di periodo S allora T si dir* periodo minimo *della funzione f.*

Osservazione 3.3.4 *Se T è il periodo minimo di una funzione f i periodi di f sono tutti e soli i numeri kT con $k \in \mathbb{Z}$.*

3.4 Monotonia in un punto.

Definizione 3.4.1 *Siano $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ed $\overline{x} \in \mathbb{R}$. Si dice che f è crescente a destra (sinistra) in $\overline{x}$ se esiste A intorno destro (sinistro) di $\overline{x}$ tale che $\forall x \in A : f(\overline{x}) \leq f(x)$ $(f(x) \leq f(\overline{x}))$.*

Una funzione crescente a destra in $\overline{x}$ ha un grafico tale che, considerata la retta orizzontale che ha come quota $f(\overline{x})$, in tutti i punti "abbastanza vicini" ad $\overline{x}$ e a destra di esso la funzione si trova al di sopra di tale retta. Analogamente si caratterizza graficamente una funzione crescente a sinistra in $\overline{x}$.



Definizione 3.4.2 *Siano $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ed $\overline{x} \in \mathbb{R}$. Si dice che f è decrescente a destra (sinistra) in $\overline{x}$ se esiste A intorno destro (sinistro) di $\overline{x}$ tale che $\forall x \in A : f(x) \leq f(\overline{x})$ $(f(x) \leq f(\overline{x}))$.*

Definizione 3.4.3 *Una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice crescente (decrescente) in un punto $\overline{x} \in \mathbb{R}$ se essa è crescente (decrescente) sia a sinistra che a destra in $\overline{x}$.*

Osservazione 3.4.1 *Una funzione f è decrescente in un punto $\overline{x}$ quando $-f$ è crescente in tale punto.*

Definizione 3.4.4 *Si dice che $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è strettamente crescente a destra (sinistra) in $\overline{x}$ se esiste A intorno destro (sinistro) di $\overline{x}$ tale che $\forall x \in A, x \neq \overline{x} : f(\overline{x}) < f(x)$ $(f(x) < f(\overline{x}))$.*

Definizione 3.4.5 *Si dice che $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è strettamente decrescente a destra (sinistra) in $\overline{x}$ se esiste A intorno destro di $\overline{x}$ tale che $\forall x \in A, x \neq \overline{x} : f(x) < f(\overline{x})$ $(f(\overline{x}) < f(x))$.*

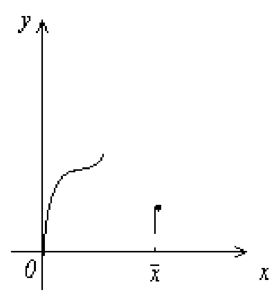
Definizione 3.4.6 *Una funzione $f : I\!R \to I\!R$ si dice strettamente crescente (decrescente) in un punto $\overline{x} \in I\!R$ se essa è strettamente crescente (decrescente) sia a sinistra che a destra in $\overline{x}$.*

Definizione 3.4.7 *Una funzione $f : I\!R \to I\!R$ si dice (strettamente) monotona in un punto $\overline{x} \in I\!R$ se essa è (strettamente) crescente o (strettamente) decrescente in tale punto.*

Definizione 3.4.8 *Si dice che $\overline{x} \in I\!R$ è un punto di minimo locale (stretto) per f se f è una funzione (strettamente) decrescente a sinistra e (strettamente) crescente a destra in $\overline{x}$.*

Definizione 3.4.9 *Si dice che $\overline{x} \in I\!R$ è un punto di massimo locale (stretto) per f se f è una funzione (strettamente) crescente a sinistra e (strettamente) decrescente a destra in $\overline{x}$.*

Le definizioni precedenti possono essere anche date per funzioni definite in un sottoinsieme $A \subset I\!R$, a condizione che il punto $\overline{x}$ appartenga all'insieme A e che esso non sia un punto isolato. Questo vuol dire graficamente che non si possono dare tali definizioni per il punto $\overline{x}$ nel caso in cui la funzione f abbia un grafico come quello mostrato nella successiva figura.



3.5 Relazione fra monotonia puntuale e globale.

Studiamo ora la relazione esistente tra il concetto di funzione monotona e quello di funzione monotona in tutti i punti. Tale tipo di relazione riguarda la connessione tra proprietà *globali*, che valgono cioè in tutti i punti, e proprietà *locali*, che valgono in un intorno del punto. Nel seguito avremo modo di ritornare più volte su questo tipo di studio, pertanto, è bene che il lettore si soffermi nel cogliere la differenza tra il carattere locale e quello globale delle proprietà enunciate.

Proposizione 3.5.1 *Siano $A \subset I\!R$ e $f : A \to I\!R$. Se f è (strettamente) crescente, allora $\forall\ \overline{x} \in A$: f è (strettamente) crescente in $\overline{x}$. Se f è (strettamente) decrescente, allora $\forall\ \overline{x} \in A$:f è (strettamente) decrescente in $\overline{x}$.*

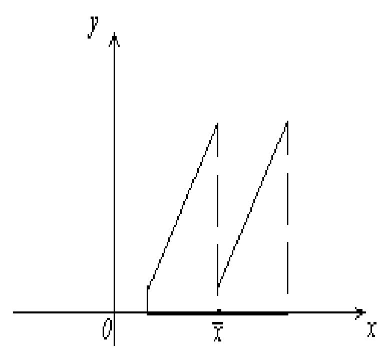
Quindi, se una funzione f è monotona allora essa è monotona in tutti i punti con lo stesso tipo di monotonia. Il viceversa, in generale, non è vero.

Proposizione 3.5.2 *Sia $A \subset I\!R$ un intervallo e sia $f : A \to I\!R$. Se f è (strettamente) crescente in tutti i punti di A, allora f è (strettamente) crescente. Se f è (strettamente) decrescente in tutti i punti di A, allora f è (strettamente) decrescente.*

Osserviamo che, per passare dalla monotonia puntuale a quella globale è necessario che A sia un intervallo, che la monotonia sia dello stesso tipo in tutti i punti di A e che questa sussista sia a sinistra che a destra. Mostriamo con un esempio come, indebolendo anche di poco le ipotesi della proposizione precedente, la tesi non risulta più vera. Si conclude quindi che la proprietà di monotonia è significativamente diversa da quella di monotonia puntuale.

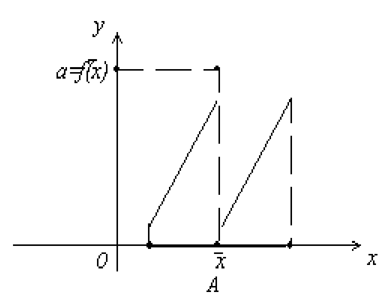
Esempio 3.5.1 *Sia $f : A \to I\!R$ una funzione il cui grafico è mostrato in figura. Distinguiamo i seguenti casi:*

1. $\overline{x} \notin A$.



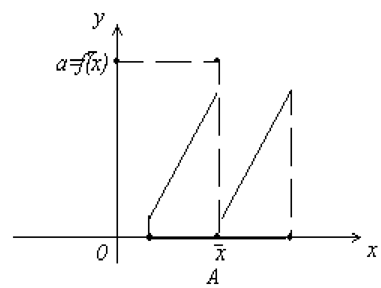
In questo caso, come si può vedere, f è monotona crescente in tutti i punti di A (fra i quali non rientra x) ma non è monotona in senso globale. Infatti viene a mancare l'ipotesi che A sia un intervallo che è , quindi, indispensabile per dedurre la tesi dell'ultima proposizione.

2. $\overline{x} \in A$. *Chiamiamo a il valore che f assume in $\overline{x}$:*



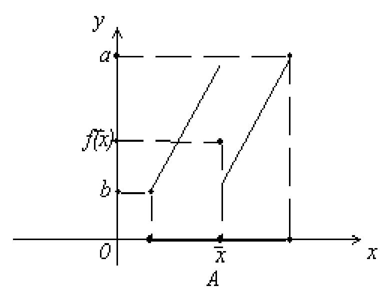
In questo caso, f è sicuramente crescente a sinistra in $\overline{x}$ oltre che crescente in tutti i punti diversi da $\overline{x}$, ma non è crescente . Quindi, quest'ultimo caso, *come il prossimo, mostra che, fra le ipotesi della proposizione precedente, la monotonia puntuale va richiesta necessariamente sia a sinistra che a destra in ogni punto. Anche facendo una sola eccezione in cui comunque si abbia la monotonia richiesta solo a sinistra o a destra, non è sufficiente ad ottenere la tesi.*

3. $\overline{x} \in A$. *Supponiamo che sia* $f(\overline{x}) \leq b$:



In tal caso, f *è crescente in tutti i punti diversi da* $\overline{x}$ *ma solo crescente a destra di* $\overline{x}$.

4. $\overline{x} \in A$. *Supponiamo che sia* $b \leq f(\overline{x}) < a$:



In quest'ultimo caso f *è crescente in tutti i punti diversi da* $\overline{x}$ *ma decrescente in* $\overline{x}$. *Quindi, anche se l'insieme di definizione è un intervallo e la funzione è monotona in tutti i punti, non risulta monotona perché il tipo di monotonia non è lo stesso.*