Capitolo 2

Proprietà elementari dell'insieme $I\!R$ dei numeri reali

In questo capitolo riportiamo alcune delle proprietà elementari dell'insieme dei numeri reali, allo scopo di evidenziare le caratterizzazioni di $I\!R$ necessarie per lo studio di funzioni definite su suoi sottoinsiemi.

2.1 Insiemi separati. Estremo superiore e inferiore.

Definizione 2.1.1 *Sia $A \subset I\!R$ un sottoinsieme non vuoto. Si dice che $y \in I\!R$ è un maggiorante di A se per ogni $x \in A$ si ha $x \leq y$. Si dice che $z \in I\!R$ è un minorante di A se per ogni $x \in A$ si ha $x \geq z$.*

Definizione 2.1.2 *Un insieme $A \subset I\!R$ non vuoto, si dice limitato superiormente se ha almeno un maggiorante, (cioè se esiste $k \in I\!R$ tale che $x \leq k \ \forall x \in A$).*

Definizione 2.1.3 *Un insieme $A \subset I\!R$ non vuoto, si dice limitato inferiormente se ha almeno un minorante, (cioè se esiste $k \in I\!R$ tale che $x \geq k \ \forall x \in A$).*

Un insieme $A \subset I\!R$ che sia limitato superiormente e inferiormente si dice *limitato.*

Esempio 2.1.1 *Consideriamo l'insieme $A = \{x \in I\!R \mid x \geq 0\}$. Esso è limitato inferiormente ma non superiormente, quindi non è un insieme limitato. L'insieme $B = \{x \in I\!R \mid 0 \leq x < 1\}$ è limitato sia superiormente che inferiormente, quindi è un insieme limitato.*

Definizione 2.1.4 *Due insiemi non vuoti $A, B \subset I\!R$ si dicono separati (A a sinistra di B) se $x \leq y \ \ \forall x \in A, \forall y \in B$.*

Osservazione 2.1.1 *In base alle definizioni precedenti, si verifica che le seguenti condizioni sono tra loro equivalenti.*

1. *A e B sono separati;*

2. *A è incluso nell'insieme dei minoranti di B;*

3. *B è incluso nell'insieme dei maggioranti di A;*

Dunque se A e B sono separati, allora B è l'insieme dei maggioranti di A o un insieme più piccolo.

Se A e B sono separati, allora $A \cap B$ contiene al più un elemento. Infatti, se x e y appartengono a $A \cap B$, allora deve essere $x \leq y$ e $y \leq x$ e quindi $x = y$.

Esempio 2.1.2 *Consideriamo gli insiemi $A = \{x \in I\!R \mid 0 \leq x \leq 1\}$ e $B = \{x \in I\!R \mid 1 \leq x \leq 2\}$. Essi sono separati, inoltre $A \cap B = \{1\}$.*

Definizione 2.1.5 *Siano $A \subset I\!R$ e $B \subset I\!R$ due insiemi separati. Si dice che $\overline{x}$ è elemento di separazione tra A e B se $\forall x \in A$ e $\forall y \in B$: $x \leq \overline{x} \leq y$.*

Se $A \subset I\!R$ e $B \subset I\!R$ sono separati e $A \cap B \neq \emptyset$, l'elemento (unico) $\overline{x} \in A \cap B$ è l'elemento di separazione tra A e B. Enunciamo la seguente importante proprietà di completezza dell'insieme $I\!R$:

Per ogni coppia A, B di sottoinsiemi separati di $I\!R$ esiste $\overline{x} \in I\!R$ elemento di separazione tra A e B.

Dato un insieme non vuoto $A \subset I\!R$, denotiamo con $M(A)$ l'insieme dei suoi maggioranti.

Definizione 2.1.6 *Dato un insieme non vuoto $A \subset I\!R$, se $A \cap M(A) \neq \emptyset$, allora l'unico elemento $m \in A \cap M(A)$ si dice massimo di A e si denota con $\max A$. Più in generale, l'elemento di separazione tra A e $M(A)$ si dice estremo superiore di A e si denota con $\sup A$.*

Dalla definizione precedente seguono facilmente le seguenti proprietà

1. $\max A \in A \cap M(A)$, ovvero $\max A \in A$ e $x \leq \max A$, $\forall x \in A$.

2. $x \leq \sup A$, $\forall x \in A$ e $\sup A \leq m$, $\forall m \in M(A)$.

Esempio 2.1.3 *Dato $A = \{x \in I\!R \mid 0 \leq x \leq 1\}$, si ha che $M(A) = \{x \in I\!R \mid x \geq 1\}$. Pertanto, $A \cap M(A) = \{1\}$ e dunque esiste $\max A$ e si ha $\max A = 1$.*

Nel caso $A = \{x \in I\!R \mid 0 < x < 1\}$, risulta $M(A) = \{x \in I\!R \mid x \geq 1\}$, non esiste $\max A$ *ma esiste* $\sup A$ *e si ha* $\sup A = 1$.

Osservazione 2.1.2 *Evidentemente, se esiste* $\max A$*, allora esiste* $\sup A$ *e risulta* $\sup A = \max A$*. D'altra parte, se esiste* $\sup A$ *e* $\sup A \in A$*, allora esiste* $\max A$ *e si ha* $\max A = \sup A$*. Notiamo anche che, se un sottoinsieme non vuoto* $A \subset \mathbb{R}$ *è limitato superiormente, allora esiste* $\sup A$ *e questo coincide con il minimo di* $M(A)$*.*

L'estremo superiore di un insieme rimane pertanto caratterizzato attraverso le proprietà di seguito enunciate.

Proposizione 2.1.1 *Sia* $A \subset \mathbb{R}$ *un sottoinsieme non vuoto.* $k \in \mathbb{R}$ *è l'estremo superiore di* A *se e solo se valgono le seguenti proprietà*

1. $k \in M(A)$*, cioè per ogni* $x \in A$ *si ha* $x \leq k$*.*

2. *Per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste* $x \in A$ *tale che* $x > k - \varepsilon$*.*

In maniera analoga alla precedente, dato $A \subset \mathbb{R}$ un sottoinsieme non vuoto e detto $m(A)$ l'insieme dei minoranti di A, si definiscono il minimo e l'estremo inferiore di A, detti rispettivamente $\min A$ e $\inf A$, con le relative proprietà.

2.2 Intervalli di numeri reali.

Richiamiamo brevemente il concetto di intervallo di numeri reali.

Definizione 2.2.1 *Dati* $a, b \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \left\{ \pm\infty \right\}$*,* $a < b$*, si definiscono i seguenti quattro intervalli di estremi* a *e* b*:*

$$
\begin{array}{lcll}
[a,b] & = & \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} & \textit{intervallo chiuso} \\
]a,b[& = & \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} & \textit{intervallo aperto} \\
[a,b[& = & \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\} & \textit{intervallo chiuso a sinistra e aperto a destra} \\
]a,b] & = & \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\} & \textit{intervallo aperto a sinistra e chiuso a destra}
\end{array}
$$

Se $a = b$ gli ultimi tre intervalli sopra definiti risultano vuoti. Se un intervallo è non vuoto, i suoi estremi a e b risultano univocamente determinati e prendono il nome di *estremi dell'intervallo.* I punti di $]a, b[$ si chiamano *punti interni* dell'intervallo. Un intervallo di estremi a e b è *chiuso* se contiene i suoi estremi, è *aperto* se non li contiene. Gli intervalli che non sono né chiusi né aperti sono quelli che contengono uno solo dei due estremi. Successivamente, questa terminologia (aperto, chiuso, estremi) sarà estesa fino al punto da essere usata per insiemi qualsiasi e non solo per intervalli. Diamo, ora, la definizione di punto interno di un insieme.

Definizione 2.2.2 *Dato* $\overline{x} \in \mathbb{R}$ *ed* $A \subset \mathbb{R}$*, si dice che* $\overline{x}$ *è un punto interno di* A *se esiste* I *intervallo,* $I \subset A$ *tale che* $\overline{x}$ *è interno ad* I*.*

Definizione 2.2.3 *Si dice che* A *è intorno di* $\overline{x}$ *se* $\overline{x}$ *è interno ad* A*.*

Definizione 2.2.4 *Un insieme $A \subset I\!R$ si dice aperto se tutti i punti di A sono interni.*

Definizione 2.2.5 *Un insieme $A \subset I\!R$ si dice chiuso se il suo complementare rispetto a $I\!R$ è aperto.*

Osservazione 2.2.1 *L'intersezione di un insieme di intervalli è ancora un intervallo.*

Dato $A \subset I\!R$, si può parlare del più piccolo intervallo contenente A che risulta uguale all'intersezione di tutti gli intervalli contenenti A. Se $A \neq \emptyset$, tale intervallo risulta non vuoto. In tal caso ritroviamo, nell'estremo sinistro e nell'estremo destro di tale intervallo, rispettivamente la definizione di *estremo inferiore* di A e *estremo superiore* di A.

Esempio 2.2.1 *Esistono alcuni intervalli particolari che è bene subito individuare:*

- Se $a = -\infty$ e $b = +\infty$, i quattro intervalli sopra definiti sono tutti uguali a $I\!R$ che, quindi, risulta l'intervallo di estremi $-\infty$ e $+\infty$. Per indicare $I\!R$ si può usare la seguente notazione:$]-\infty, +\infty[$. Di solito, la notazione $[-\infty, +\infty]$ si utilizza per $\overline{I\!R}$.

- Se $a = -\infty$ e $b \neq +\infty$, i quattro intervalli si riducono a due cioè:$]-\infty, b]$ e $]-\infty, b[$ che prendono rispettivamente il nome di *semiretta sinistra aperta* e *semiretta sinistra chiusa.*

- Se $a \neq -\infty$ e $b = +\infty$, i quattro intervalli si riducono a due cioè:$]a, +\infty[$ e $[a, +\infty[$ che prendono rispettivamente il nome di *semiretta destra aperta* e *semiretta destra chiusa.*

Gli intervalli considerati nei tre esempi precedenti costituiscono gli intervalli *illimitati.*

Osservazione 2.2.2 *Se $a = b$, l'unico intervallo non vuoto è quello chiuso: esso risulta ridotto ad un unico elemento. In tal caso i suoi estremi coincidono con l'unico elemento dell'insieme.*

Osservazione 2.2.3 *Il complementare (rispetto ad $I\!R$) di un intervallo chiuso risulta essere un insieme aperto, quindi, un intervallo risulta chiuso se e solo se è chiuso come sottoinsieme.*

Dagli esempi precedenti, risulta chiaro che $I\!R$ risulta sia chiuso che aperto perché non ha estremi reali. Allora, passando al complementare, segue che anche l'insieme vuoto è sia chiuso che aperto. È possibile provare che non esistono altri sottoinsiemi di $I\!R$ che sono contemporaneamente aperti e chiusi.

2.3 Distanza fra numeri reali.

Se rappresentiamo i numeri reali su una retta cartesiana, vediamo facilmente che la quantità $|x-y|$ rappresenta graficamente la distanza del punto x dal punto y. Consideriamo $a, b \in I\!R$ ed un punto x interno all'intervallo $[a, b]$ (quindi $a < b$). Allora, le quantità $b-x$ e $x-a$ sono entrambe maggiori di zero. Chiamiamo ε il più piccolo fra $b-x$ e $x-a$. Allora, risulta che l'intervallo $V_\varepsilon(x) =]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$ è contenuto in $[a, b]$. Riflettiamo sul significato geometrico di $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$: si tratta del luogo geometrico costituito dai punti che hanno una distanza da x minore di ε. Quindi, se x è un punto interno ad un intervallo o, più in generale, ad un insieme A, è possibile fissare una quantità $\varepsilon > 0$ tale che tutti i punti che hanno distanza da x inferiore ad ε appartengono ad A. Questo permette di interpretare il concetto di *intorno* di un punto interno in termini di distanza. Un punto x è *interno* ad un insieme A se tutti i punti "abbastanza vicini" ad x appartengono ad A. Il discorso precedente chiarisce cosa si intende per "abbastanza vicini": occorre fare riferimento ad una soglia $\varepsilon > 0$. Fissata questa, i punti abbastanza vicini ad x sono quelli la cui distanza da x è minore di ε e che costituiscono l'intervallo $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$ che prende il nome di $\varepsilon - intorno$ di x. Diciamo, infine, che un sottoinsieme $V \subset I\!R$ è un *intorno sinistro* di $\overline{x} \in I\!R$ se $\overline{x} \in V$ e se V contiene un intervallo aperto e non vuoto che ha $\overline{x}$ come estremo destro. Analogamente, diciamo che un sottoinsieme $V \subset I\!R$ è un *intorno destro* di $\overline{x} \in I\!R$ se $\overline{x} \in V$ e se V contiene un intervallo aperto e non vuoto che ha $\overline{x}$ come estremo sinistro.

Osservazione 2.3.1 *Si vede facilmente che un sottoinsieme $V \subset I\!R$ è un intorno di $\overline{x}$ se è intorno sinistro e intorno destro di $\overline{x}$.*

La definizione di intorno sinistro e destro di un punto $\overline{x}$, permette una facile estensione al caso in cui $\overline{x} = \pm\infty$. Un *intorno* di $+\infty$ è la stessa cosa di intorno sinistro di $+\infty$ e cioè un insieme che contiene un intervallo non vuoto che ha come estremo $+\infty$, cioè una semiretta destra. Analogamente, si definisce *intorno* di $-\infty$ un intorno destro di $-\infty$ e cioè un insieme che contiene una semiretta sinistra non vuota.

Definizione 2.3.1 *Dati $A \subset I\!R$ e $\overline{x} \in I\!R$, si dice che $\overline{x}$ è punto di accumulazione per A se ogni intorno V di $\overline{x}$ contiene almeno un punto di A diverso da $\overline{x}$.*

Definizione 2.3.2 *Dati $A \subset I\!R$ e $\overline{x} \in I\!R$, si dice che $\overline{x}$ è punto di accumulazione a destra per A se ogni intorno destro V di $\overline{x}$ contiene almeno un punto di A diverso da $\overline{x}$.*

Definizione 2.3.3 *Dati $A \subset I\!R$ e $\overline{x} \in I\!R$, si dice che $\overline{x}$ è punto di accumulazione a sinistra per A se ogni intorno sinistro V di $\overline{x}$ contiene almeno un punto di A diverso da $\overline{x}$.*

Esempio 2.3.1 *Siano $a, b \in I\!R$ e sia $A = [a, b]$. Tutti i punti di A sono di accumulazione per A.*

Definizione 2.3.4 *Un punto $\overline{x} \in A \subset I\!R$ si dice isolato se non è di accumulazione per A.*

Osservazione 2.3.2 *Si noti che un punto $\overline{x} \in I\!R$ è di accumulazione per A se e solo se è di accumulazione almeno a sinistra o a destra. Mentre, un punto $\overline{x} \in A$ è isolato se e solo se è isolato sia a sinistra che a destra.*

Osservazione 2.3.3 *Un punto $\overline{x} \notin A$ non è di accumulazione per A se e solo se è interno ad $I\!R \setminus A$.*

Se ne deduce facilmente che un insieme è chiuso se e solo se contiene tutti i suoi punti di accumulazione.