Capitolo 1

Nozioni fondamentali. Insiemi, Relazioni, Funzioni.

1.1 Concetti di base.

In questo paragrafo ci occuperemo di introdurre i concetti fondamentali di teoria degli insiemi e la terminologia relativa. Ci limiteremo ad esporre in modo informale i principali assiomi, raggruppati secondo il modo in cui intervengono a chiarire il concetto di insieme, ed a discuterne le conseguenze. Considereremo come concetti primitivi la nozione di elemento, di insieme e di appartenenza ma cercheremo di fissare in maniera molto precisa il modo in cui questi concetti devono essere intesi. Il lettore è invitato a considerare con molta attenzione quanto segue:

1. è molto facile, affidandosi al senso "intuitivo" dei termini equivocare dei concetti in modo molto serio;

2. una comprensione totalmente chiara del linguaggio della teoria degli insiemi è praticamente indispensabile per lo studio di quasi tutte le branche della matematica: non possederla comporta la necessità di una fatica molto maggiore per ulteriori studi se non addirittura la loro impossibilità;

3. i primi tentativi di formulare una teoria degli insiemi, sebbene compiuti da grandi matematici, sono andati incontro a gravi difficoltà logiche producendo dei paradossi, come vedremo in seguito. Oggi queste difficoltà sono state superate limitando in modo accurato gli assiomi che permettono di definire un insieme, di conseguenza è importante evitare di ragionare in modo troppo disinvolto e affidarsi invece ad un uso scrupoloso di quanto sarà esposto.

Una conoscenza discreta anche solo degli argomenti basilari che saranno esposti in questo capitolo garantirà al lettore la possibilità di una comprensione sicura dei concetti insiemistici che saranno usati nella trattazione dei successivi argomenti. Per quanto riguarda le notazioni e la terminologia, ci limitiamo per il momento a segnalare il fatto che gli elementi di un insieme saranno di solito denotati con lettere minuscole del tipo a, b, c, o x, y, z ecc., mentre gli insiemi saranno di solito denotati con lettere maiuscole come A, B, C ecc.. Naturalmente una regola del genere può solo essere generica e non sempre rispettata dal momento che nulla vieta che un insieme possa essere a sua volta considerato come un elemento di un altro insieme. In generale, se non diversamente specificato, lettere diverse denoteranno oggetti diversi. Per indicare che un certo elemento x appartiene ad un insieme A si usa la notazione $x \in A$. Per dire, ad esempio, che l'insieme A è formato dagli oggetti a e b scriveremo: $A = \{a, b\}$. Un insieme puó essere quindi pensato come una lista o collezione di oggetti ed il simbolo grafico usato per denotare tale lista sará una coppia di parentesi graffe.

Osservazione 1.1.1 *Consideriamo l'insieme $A = \{a\}$ formato dal solo elemento a. Si osservi che tale insieme è diverso da a.*

1.2 Inclusione fra insiemi. Insieme vuoto.

Definizione 1.2.1 *Dati due insiemi A e B, si dice che A è incluso (o contenuto) in B se ogni elemento di A è anche elemento di B (in simboli se $\forall x : x \in A \Longrightarrow x \in B$).*

Per indicare che A è incluso in B si usa la notazione $A \subset B$. Una notazione del tutto equivalente a $A \subset B$ è $B \supset A$; il fatto che un insieme A è incluso in un insieme B si può anche esprimere dicendo che "A è un *sottoinsieme* di B" o, equivalentemente, che "A è una *parte* di B". È semplice verificare che, in base alla precedente definizione, ogni insieme risulta incluso in se stesso. In altri termini, ogni insieme, per la definizione precedente, deve essere considerato un sottoinsieme di se stesso o, in altri termini, una parte di se stesso.

Esempio 1.2.1 . *Consideriamo i due insiemi $A = \{a\}$ e $B = \{a, b\}$. A è sottoinsieme di B poiché l'unico elemento di A è anche elemento di B. Se $a \neq b$, non è valida l'inclusione $\{a, b\} \subset \{a\}$.*

Enunciamo, ora, l'assioma che chiarisce cosa precisa l'identitá di un insieme o, in altri termini, cosa bisogna dire per poter definire un insieme.

Assioma 1.2.1 *Dati due insiemi A e B, si ha che $A = B$ se e solo se $A \subset B$ e $B \subset A$.*

Il precedente assioma, che prende il nome di *Assioma di Estensione* ha una grande importanza al fine di chiarire in che senso è concepita la nozione di insieme. Infatti, esso afferma che due insiemi che contengono gli stessi elementi sono uguali e, pertanto, stabilisce che l'identità di un insieme dipende solo dagli elementi che contiene e non dal modo in cui è stato definito.

Esempio 1.2.2 *Consideriamo i due insiemi $A = \{a, b\}$ e $B = \{b, a\}$. Essi sono uguali per l'assioma di estensione.*

Esempio 1.2.3 *Gli insiemi* $\{a\}$ *e* $\{a,a\}$ *sono uguali, dato che per l'assioma di estensione ogni elemento di uno è elemento dell'altro.*

Definizione 1.2.2 *Si dice che un insieme* è vuoto *quando non ha elementi.*

L'assioma di estensione ci dice che se due insiemi sono vuoti allora sono uguali; infatti hanno gli stessi elementi: nessuno. Pertanto può esistere al massimo un solo insieme vuoto. Quindi l'insieme vuoto è un insieme ben determinato che sarà indicato come *l'insieme vuoto* (con l'articolo determinativo, ovviamente). Espressioni come "un insieme vuoto" sono da considerarsi imprecise e, quindi, da evitare ("insieme vuoto" va considerato alla stregua di un nome proprio e, di conseguenza, il suo uso è giustamente incompatibile con quello dell'articolo "un"). L'insieme vuoto si indica con il simbolo $\emptyset$. Per quanto precisato prima, dire che un insieme A è vuoto significherà dire che esso è uguale all' insieme vuoto. Di conseguenza, il fatto che un insieme A è vuoto si potrà esprimere in simboli con la notazione $A = \emptyset$, che esprime tale uguaglianza. Dato un qualsiasi insieme A, è sempre vero che $\emptyset \subset A$. Quindi, allo scopo di provare che un insieme A è vuoto, o, in altri termini, che $A = \emptyset$, basta provare che $A \subset \emptyset$.

Esempio 1.2.4 *L'insieme* $A = \{\emptyset\}$ *è non vuoto, poiché in esso figura un unico elemento che è l'insieme vuoto. Quindi, è importante osservare che* $\emptyset \neq \{\emptyset\}$.

Esempio 1.2.5 *L'insieme* $B = \{\{a,b\}\}$ *contiene un solo elemento costituito dall'insieme* $\{a,b\}$.

Esempio 1.2.6 *L'insieme* $C = \{a, \{a\}\}$ *è un insieme formato dagli elementi* a *e* $\{a\}$.

1.3 Riunione ed intersezione di insiemi.

La riunione si definisce per un numero qualsiasi di insiemi. Consideriamo gli insiemi $\{a,b,c\}$, $\{x,y,a\}$ e $\{0,1,b\}$; la riunione fra essi é costituita da un'unica lista in cui compaiano gli elementi di ciascun insieme. Naturalmente, nella nuova lista ci sono elementi che compaiono piú volte e che, quindi, possono essere scritti una sola volta. La riunione dei tre insiemi sopra definiti è data da: $\{a,b,c,x,y,0,1\}$.

Definizione 1.3.1 *Dati due insiemi* A *e* B*, si definisce riunione di* A *e* B *l'insieme, denotato con* $A \cup B$*, formato dagli elementi che appartengono ad almeno uno di tali insiemi.*

Osservazione 1.3.1 *Operativamente, quando sono assegnati degli insiemi esplicitamente (cioè con gli elementi in parentesi graffe), per scriverne la riunione, è sufficiente scrivere gli insiemi uno accanto all'altro, sopprimere le parentesi intermedie e inserire delle virgole.*

Esempio 1.3.1 *Consideriamo gli insiemi* $A = \{0, 1\}$*,* $B = \{a, b\}$ *e* $C = \{1, 2\}$*. Per scrivere* $A \cup B \cup C$*, basta scrivere gli insiemi uno accanto all'altro*

$$\{0, 1\}\{a, b\}\{1, 2\},$$

cancellare le parentesi intermedie,

$$\{0, 1 \quad a, b \quad 1, 2\}$$

e sostituirle con delle virgole:

$$\{0, 1, a, b, 1, 2\}.$$

Naturalmente non è necessario ripetere gli elementi che compaiono più di una volta. Quindi:

$$A \cup B \cup C = \{0, 1, a, b, 2\}.$$

Definiamo, ora, l'intersezione fra due o piú insiemi:

Definizione 1.3.2 *Dati due insiemi* A *e* B*, si definisce intersezione di* A *e* B *l'insieme, denotato con* $A \cap B$*, formato dagli elementi che appartengono ad entrambi gli insiemi.*

Osservazione 1.3.2 *Operativamente, per scrivere l'intersezione, basta prendere uno degli insiemi e cancellare gli elementi che non compaiono in tutti gli altri.*

Esempio 1.3.2 *Dati gli insiemi* $A = \{a, b, c\}$*,* $B = \{x, y, a\}$ *e* $C = \{0, 1, b\}$*, è facile verificare che:*

$$A \cap B \cap C = \emptyset,$$

infatti, considerato l'insieme A *si vede che:*

- *l'elemento* a *va depennato perché non compare nell'insieme* C*;*
- *l'elemento* b *va depennato perché non compare nell'insieme* B;
- *l'elemento* c *va depennato perché non compare in* B *e* C*.*

Esempio 1.3.3 *Consideriamo gli insiemi* $A = \{a, b, c\}$*,* $B = \{x, y, a\}$ *e C=*$\{$*0,1,a*$\}$*, è facile verificare che* $A \cap B \cap C = \{a\}$*.*

Definizione 1.3.3 *Dati due insiemi* A *e* B*, si definisce differenza di* B *e* A *l'insieme, denotato con* $B \setminus A$*, formato dagli elementi di* B *che non appartengono ad* A*. Se* A *è contenuto in* B *la differenza* $B \setminus A$ *si chiama anche complementare di* A *rispetto a* B*.*

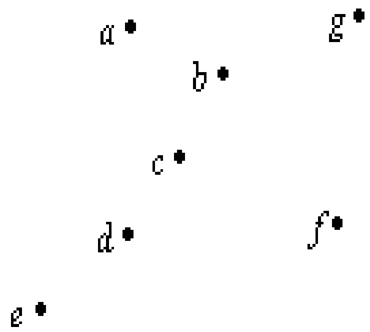
1.4 Funzioni.

Una coppia ordinata (a,b) è costituita da due elementi presi in un ordine assegnato. Il primo elemento di tale coppia prende il nome di *prima coordinata* della coppia, mentre il secondo prende il nome di *seconda coordinata*.

Osservazione 1.4.1 *Notiamo la differenza che sussiste tra l'insieme* $\{a,b\}$ *e la coppia ordinata* (a,b)*: per l'assioma di estensione* $\{a,b\}=\{b,a\}$*, mentre* $(a,b)\neq(b,a)$ *quando* $b\neq a$*.*

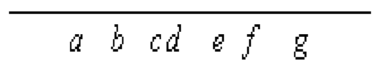
Per la comprensione della matematica non è indispensabile lavorare con figure o rappresentazioni grafiche. È anzi importante sottolineare che è indispensabile sapere vedere i concetti e, soprattutto le dimostrazioni, su un piano logico. Avremo anche modo di vedere concetti che non si prestano ad essere rappresentati graficamente come di volta in volta faremo notare. D'altro canto, faremo invece largo uso di rappresentazioni grafiche con l'intento di favorire una prima comprensione intuitiva delle nozioni e come utile strumento per prevenire fraintendimenti. A questo scopo, chiariamo i termini delle rappresentazioni grafiche che useremo per i concetti fin qui esposti. Rappresenteremo gli elementi tramite punti del piano.

Esempio 1.4.1 *Gli elementi* a*,* b*,* c*,* d*,* e*,* f *,* g *verranno rappresentati con dei punti. Ad esempio:*



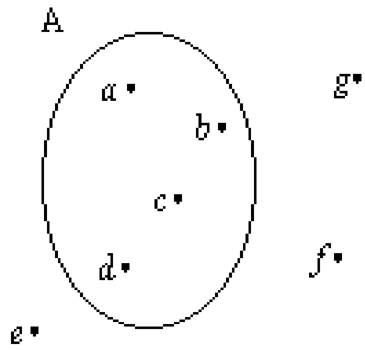
Rappresenteremo un insieme tramite una linea chiusa che racchiuda tutti i suoi elementi. Gli elementi di un insieme si possono anche rappresentare su una retta.

Esempio 1.4.2 *Consideriamo gli elementi* a*,* b*,* c*,* d*,* e*,* f *,* g *dell'esempio precedente. La loro rappresentazione su una retta è la seguente:*



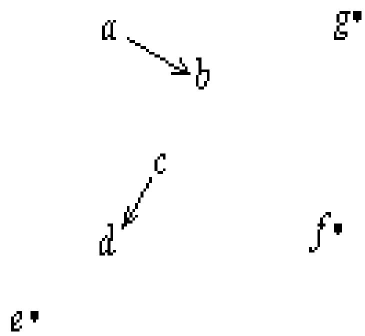
Esempio 1.4.3 *Nella figura che segue è rappresentato l'insieme*

$$A=\{a,b,c,d\}.$$



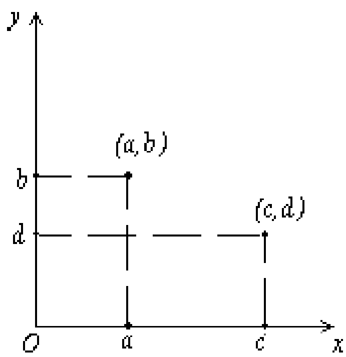
Per rappresentare graficamente una coppia ordinata, basta assegnare una freccia che partendo dalla prima coordinata abbia termine nella seconda coordinata.

Esempio 1.4.4 *La rappresentazione grafica delle coppie ordinate* (a, b) *e* (c, d) *è la seguente:*

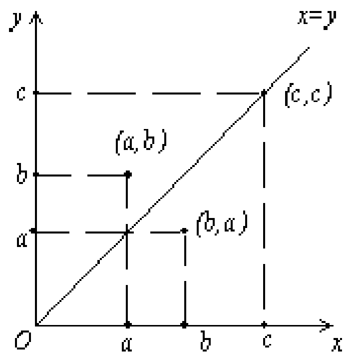


In particolare, quando $a = b$*, si può pensare ad una freccia di lunghezza nulla. Un altro modo per rappresentare una coppia ordinata è quello di considerare un sistema di assi ortogonali (assi cartesiani) e rappresentare la coppia su tale sistema come un punto la cui proiezione sull'asse orizzontale dà la prima coordinata e la cui proiezione sull'asse verticale dà la seconda coordinata.*

Esempio 1.4.5 *Consideriamo di nuovo le coppie ordinate* (a, b) *e* (c, d)*; la loro rappresentazione grafica mediante gli assi cartesiani è la seguente:*



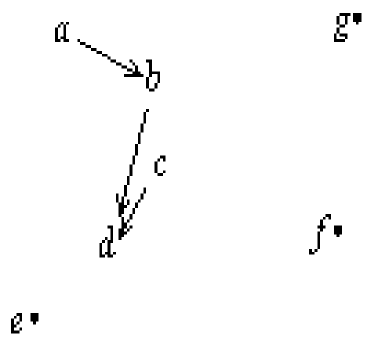
Esempio 1.4.6 *Consideriamo le coppie ordinate (a, b) e (b, a). Si può osservare dal grafico che le rappresentazioni di tali coppie danno due punti diversi se $a \neq b$. Tuttavia, sussiste una relazione fra i due punti: essi sono simmetrici rispetto alla diagonale. La coppia (c, c) , nel piano cartesiano, rappresenta un punto che si trova sulla bisettrice.*



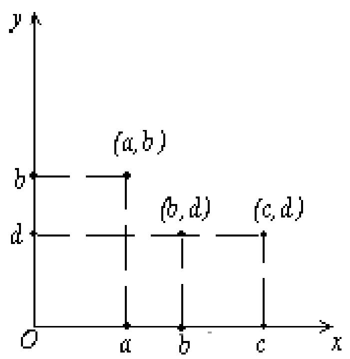
Definizione 1.4.1 *Si dice relazione un insieme di coppie ordinate.*

Tornando alle rappresentazioni grafiche vediamo che, nelle due alternative indicate per rappresentare le coppie ordinate, le relazioni vengono visualizzate rispettivamente come insiemi di frecce o come sottoinsiemi del piano cartesiano.

Esempio 1.4.7 *Consideriamo la relazione definita dalle seguenti coppie ordinate: $\mathcal{R} = \{(a, b), (c, d), (b, d)\}$. La rappresentazione grafica mediante frecce è la seguente:*



Utilizzando gli assi cartesiani, la relazione $\mathcal{R}$ ha la seguente rappresentazione:



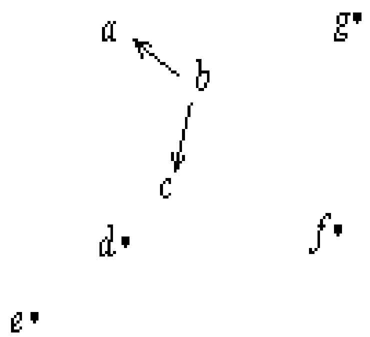
Definizione 1.4.2 *Una relazione $\mathcal{R}$ si dice funzionale se* $\forall\ (x,y),\ (z,t) \in \mathcal{R},\ x = z \Rightarrow y = t$.

Dal punto di vista grafico, dire che una relazione è funzionale significa esprimere che non è possibile avere due frecce diverse che partono dallo stesso punto.

Esempio 1.4.8 *La relazione* $\mathcal{R} = \{(a,b),(c,d),(b,d)\}$ *dell'esempio 1.4.7 è un esempio di relazione funzionale infatti, dalla rappresentazione grafica mediante frecce, si può vedere che dai punti a, b e c parte una sola freccia.*

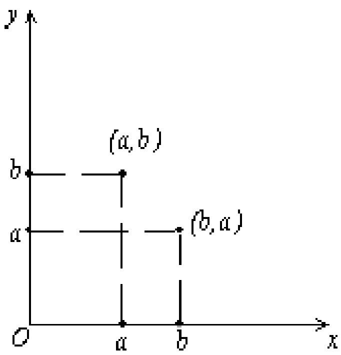
Esempio 1.4.9 *La relazione* $\mathcal{R} = \{(a,b),(c,d)\}$ *è funzionale.*

Esempio 1.4.10 *Consideriamo la relazione* $\mathcal{R} = \{(b,a),(b,c)\}$*, la cui rappresentazione tramite frecce è la seguente:*



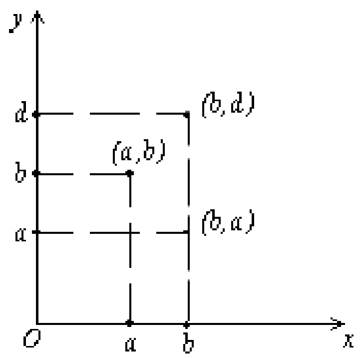
È facile osservare che tale relazione non è funzionale dato che dal punto b partono due frecce. Usando gli assi cartesiani, invece, dire che una relazione è funzionale equivale a dire che non ci sono due punti diversi sulla stessa verticale.

Esempio 1.4.11 *La relazione* $\mathcal{R} = \{(a,b),(b,d)\}$*, che rappresentata graficamente è data da:*

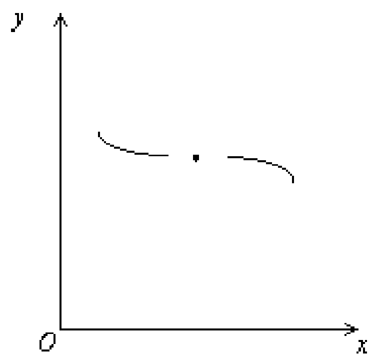


è funzionale. Si vede, infatti, dal grafico che non ci sono mai punti diversi su una stessa verticale.

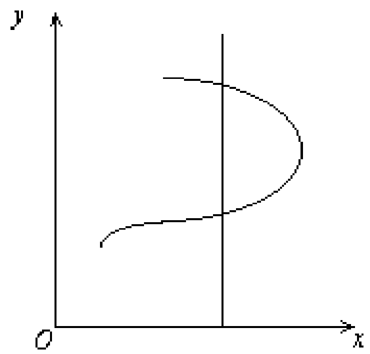
Esempio 1.4.12 *La relazione* $\mathcal{R} = \{(a,b)\,,(b,a)\,,(b,d)\}$ *non è funzionale, poichè su una stessa verticale si trovano i punti* (b,a) *e* (b,d) :



Esempio 1.4.13 *La relazione sotto rappresentata è funzionale:*



Esempio 1.4.14 *Un ulteriore esempio di relazione non funzionale è data dalla seguente rappresentazione grafica:*

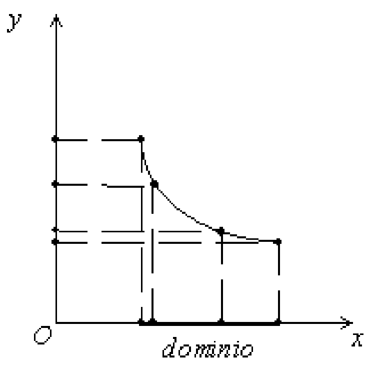


È importante osservare che un qualsiasi sottoinsieme del piano rappresenta una relazione fra numeri reali. Al fine di definire il concetto di funzione, premettiamo la seguente definizione:

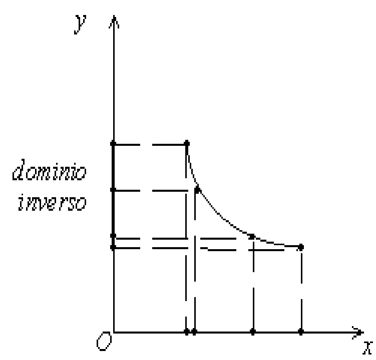
Definizione 1.4.3 *Data una relazione* $\mathcal{R}$, *si dice* dominio di $\mathcal{R}$ *l'insieme delle prime coordinate e* dominio inverso o codominio di $\mathcal{R}$ *l'insieme delle seconde coordinate.*

Graficamente, rappresentando le coppie con delle frecce, il dominio è dato da tutti i punti da cui partono le frecce, mentre il dominio inverso è dato da tutti i punti in cui arrivano le frecce. Considerato, invece, il sistema di riferimento cartesiano, il dominio si ottiene proiettando l'insieme sull'asse orizzontale mentre, il dominio inverso si ottiene proiettando l'insieme sull'asse verticale.

Esempio 1.4.15 *Data la relazione $\mathcal{R}$ la cui rappresentazione è espressa nel grafico seguente, il dominio è il seguente:*

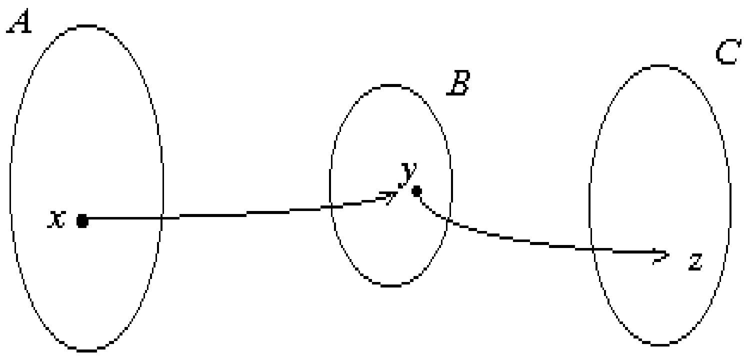


Esempio 1.4.16 *La stessa relazione ha come dominio inverso il seguente insieme:*

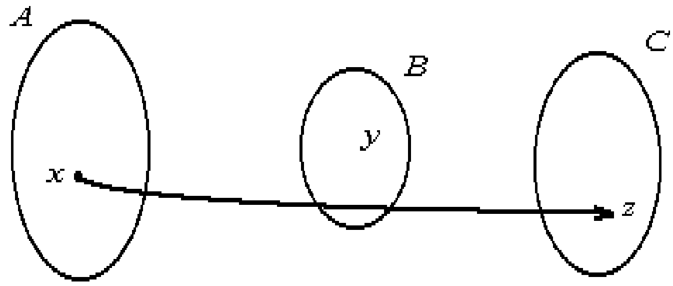


Esempio 1.4.17 *Consideriamo la relazione $\mathcal{R}$=$\{(a, x), (b, y), (c, y)\}$. Il dominio è l'insieme $\{a, b, c\}$, il dominio inverso è l'insieme $\{x, y\}$.*

Consideriamo tre insiemi A, B, C e supponiamo siano date due relazioni $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$, la prima che va da A a B e la seconda che va da B a C. Fissiamo $x \in A$, $y \in B$, $z \in C$ e consideriamo una freccia che vada dall'elemento x ad y ed una che vada da y a z:



Se saldiamo le frecce, in modo che il punto di partenza della prima vada nel punto di arrivo della seconda, otteniamo una freccia che è nella "relazione composta":



Definizione 1.4.4 *Si definisce relazione composta* $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ *e si legge* $\mathcal{S}$ *composto* $\mathcal{R}$*, la relazione costituita dalle coppie* (x, z) *tali che*

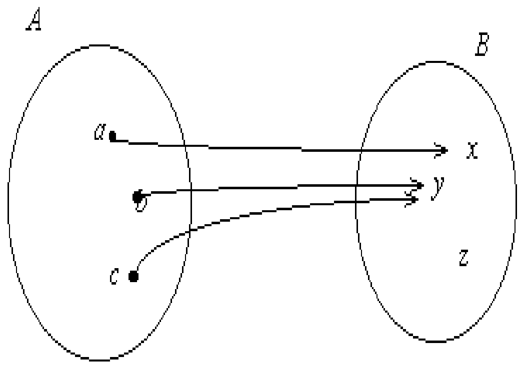
$$\exists\, y \in B \text{ t.c. } (x, y) \in \mathcal{R} \text{ e } (y, z) \in \mathcal{S}.$$

Per definire una funzione occorre assegnare due insiemi A e B, ed una relazione funzionale $\mathcal{R}$.

Definizione 1.4.5 *Si definisce funzione la terna* $(A, B, \mathcal{R})$ *dove* A *e* B *sono detti rispettivamente insieme di partenza o di definizione e insieme di arrivo o di variabilitá, ed* $\mathcal{R}$ *è una relazione funzionale avente come dominio l'insieme* A *e come dominio inverso un sottoinsieme di* B*.*

Useremo la notazione $f : A \to B$ per indicare che f è una funzione che ha A come insieme di partenza e B come insieme di arrivo. Una funzione avente come dominio e insieme di arrivo rispettivamente gli insiemi A e B e come relazione funzionale $\mathcal{R}$ si denoterà, anche, nel seguente modo: $f = (A, B, \mathcal{R})$. La relazione $\mathcal{R}$ prende il nome di *grafico di* f. Commentiamo graficamente il concetto di funzione con l' esempio seguente.

Esempio 1.4.18 *Siano dati due insiemi* A *e* B *(non è escluso che* $A \cap B \neq \emptyset$ *o* $A = B$*), supponiamo ad esempio che* $A = \{a, b, c\}$ *e* $B = \{x, y, z\}$*. Se consideriamo, inoltre, una relazione funzionale avente come dominio* A *e codominio un sottoinsieme di* B *(con questo intendiamo dire che non è necessario che in ogni punto di* B *arrivi una freccia, mentre è necessario che da ogni punto di* A *parta una ed una sola freccia), abbiamo definito una funzione.*



Diamo, ora, la definizione di funzione composta: Supponiamo che $\mathcal{R}$ ed $\mathcal{S}$ siano due relazioni funzionali e siano $f : A \to B$ e $g : B \to C$ due funzioni aventi come grafico rispettivamente $\mathcal{R}$ ed $\mathcal{S}$ rispettivamente.

Definizione 1.4.6 *Si definisce funzione composta di f e g la funzione, denotata con $g \circ f$, che va da A in C avente come grafico la relazione composta $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$.*

Osservazione 1.4.2 *Si vede facilmente che $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ è ancora una relazione funzionale avente come dominio A e codominio contenuto in C. La funzione composta si definisce nel seguente modo: sia $x \in A$, allora $y = f(x) \in B$; la freccia corrispondente alla funzione g che parte dall'elemento y arriva in $z = g(f(x))$. Ma z è anche il punto di arrivo della funzione composta e cioè : $z = g \circ f(x)$; quindi, $g \circ f$ è la funzione da A in C tale che $\forall x \in A : g \circ f(x) = g(f(x))$.*

Definizione 1.4.7 *Diremo che una funzione f è reale di variabile reale quando il suo insieme di partenza e quello di arrivo sono sottoinsiemi di $\mathbb{R}$.*

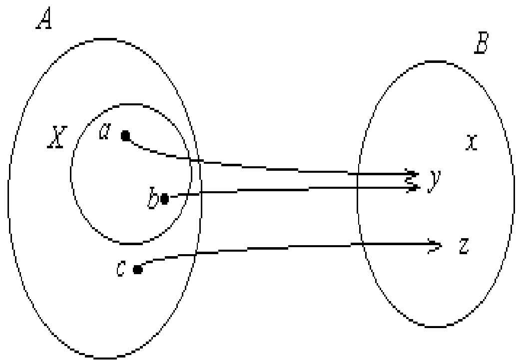
Definizione 1.4.8 *La funzione $f = (A, B, \mathcal{R})$ si dice surgettiva quando il dominio inverso di $\mathcal{R}$ è l'intero B.*

Una funzione, normalmente, si denota con le lettere minuscole $f, g \ldots$ Assegnare una funzione vuol dire indicare l'insieme di partenza, l'insieme di arrivo e la relazione definita fra gli elementi dei due insiemi.

Definizione 1.4.9 *Dato $x \in A$, si denota con $f(x)$ l'unico elemento di B tale che $(x, f(x)) \in \mathcal{R}$. $f(x)$ prende il nome di immagine di f relativa al punto x.*

Definizione 1.4.10 *Dato un insieme $X \subset A$, si denota con $f(X)$ il sottoinsieme di B dato dai punti $f(x)$, al variare di $x \in X$. L'insieme $f(X)$ prende il nome di immagine di X.*

Esempio 1.4.19 *Consideriamo gli insiemi $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{x, y, z\}$, il sottoinsieme di A, $X = \{a, b\}$ e la funzione f il cui grafico riportato nella figura seguente. È facile vedere che $f(X) = \{y\}$.*

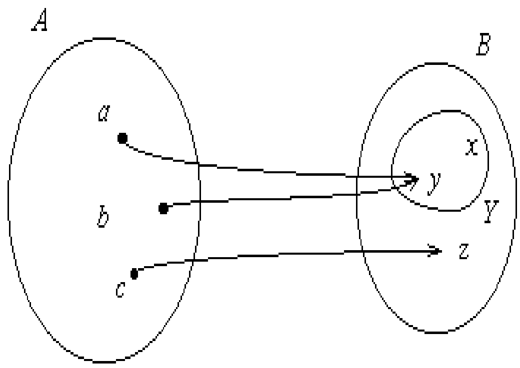


Osservazione 1.4.3 *Se la funzione f non assume il valore x allora $f^{-1}(x) = \emptyset$.*

Definizione 1.4.11 *Dato un sottoinsieme Y di B, si definisce* immagine inversa di Y mediante f *e si denota con $f^{-1}(Y)$, l' insieme degli elementi $x \in A$ tali che $f(x) \in Y$.*

Osservazione 1.4.4 *È importante osservare che l'immagine inversa di un sottoinsieme qualsiasi dell'insieme di arrivo dà sempre luogo ad un sottoinsieme dell'insieme di partenza.*

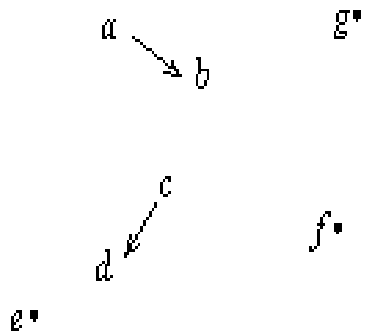
Esempio 1.4.20 *Consideriamo gli insiemi $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{x, y, z\}$ ed il sottoinsieme di B, $Y = \{x, y\}$. Dalla rappresentazione grafica, si può vedere che l'immagine inversa di tale insieme è l'insieme $f^{-1}(Y) = \{a, b\}$.*



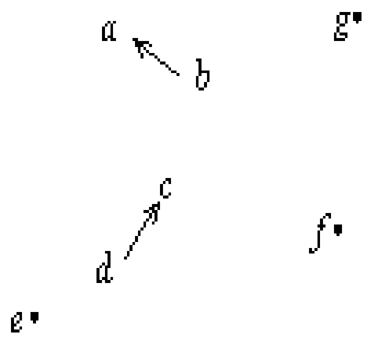
Definizione 1.4.12 *Data una relazione $\mathcal{R}$, si definisce relazione inversa o relazione opposta la relazione, denotata con il simbolo $\mathcal{R}^{-1}$, costituita dalle coppie (b, a) al variare di $(a, b) \in \mathcal{R}$.*

Osservazione 1.4.5 *Ricordiamo che graficamente una relazione si può schematizzare con un insieme di frecce; allora, se la coppia $(a, b) \in \mathcal{R}$ è rappresentabile attraverso una freccia che parte da a e termina in b, la coppia $(b, a) \in \mathcal{R}^{-1}$ è rappresentabile attraverso una freccia che parte da b e termina in a.*

Esempio 1.4.21 *La relazione $\mathcal{R} = \{(a, b)\ (c, d)\}$ ha la seguente rappresentazione:*

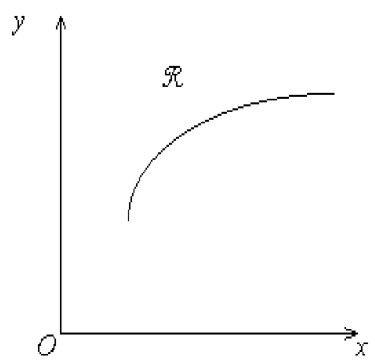


La relazione inversa è $\mathcal{R}^{-1} = \{(b,\ a),\ (d,\ c)\}$.

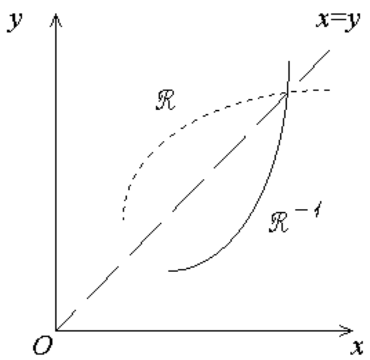


Utilizzando la rappresentazione mediante gli assi cartesiani, data la relazione $\mathcal{R}$, per ottenere la relazione inversa basta prendere la simmetrica rispetto alla bisettrice, come è illustrato dall'esempio seguente.

Esempio 1.4.22 *Supponiamo che* $\mathcal{R}$ *sia una relazione che abbia la seguente rappresentazione mediante gli assi cartesiani:*

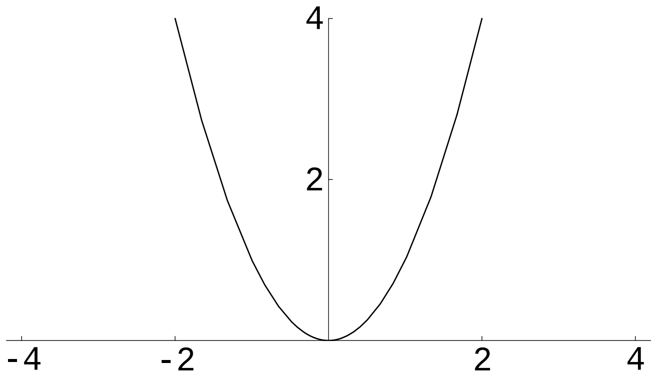


La relazione inversa si ottiene prendendo la curva simmetrica rispetto alla bisettrice.



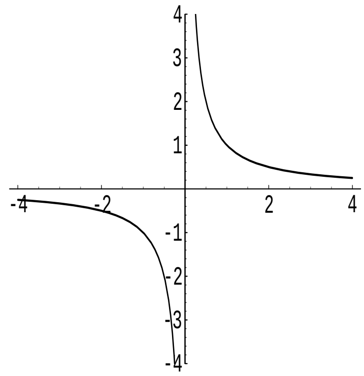
Assegnata una relazione funzionale $\mathcal{R}$, ci chiediamo se esiste sempre qualche funzione che abbia tale relazione come grafico. Si può rispondere a tale domanda dicendo che esistono delle funzioni che hanno $\mathcal{R}$ come grafico ed una sola di queste è surgettiva. Per trovare quest'ultima, basta prendere come insieme di partenza A l'insieme dei punti da cui partono le frecce, come insieme di arrivo B l'insieme dei punti in cui arrivano le frecce. Tutte le altre hanno un insieme di arrivo diverso e più grande. Spesso, quando si assegna una funzione reale, si fornisce un' espressione che individua un luogo geometrico di punti del piano, cioè un sottoinsieme del piano cartesiano, il che significa una relazione fra numeri reali. Quindi, come prima cosa, occorre integrare l'informazione in modo da individuare con precisione la funzione che si intende studiare.

Esempio 1.4.23 *Supponiamo di dover studiare la funzione $y = x^2$. Detta equazione individua il luogo geometrico dato dalle coppie (x, y) tali che $y = x^2$ e tale luogo è il sottoinsieme del piano costituito dai punti della parabola.*



Questa è una relazione funzionale. Per individuare una funzione che abbia questa relazione come grafico, dobbiamo prendere come insieme di partenza $\mathbb{R}$ e come insieme di arrivo un qualunque insieme che contenga l'intervallo $[0, +\infty[$. Normalmente, in mancanza di altre informazioni, si assume come insieme di arrivo tutto $\mathbb{R}$.

Esempio 1.4.24 *Consideriamo la "funzione" $y = \frac{1}{x}$. In questo caso, $y = \frac{1}{x}$ è il luogo geometrico costituito dai punti di una iperbole e risulta ancora una relazione funzionale fra numeri reali, come si può vedere dal grafico, intersecando questo con una qualsiasi retta verticale.*

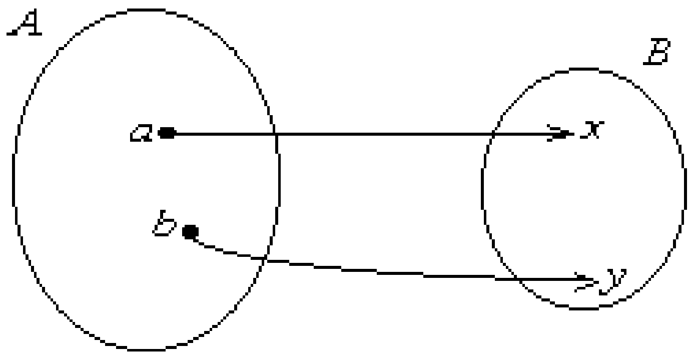


Per integrare l'informazione in modo da avere effettivamente una funzione, dobbiamo prendere come insieme di partenza il dominio della relazione che, questa volta, è $I\!R \setminus \{0\}$ *e come insieme di arrivo un qualunque insieme che contenga il dominio inverso, che è ancora tutto* $I\!R \setminus \{0\}$. *Come prima, in mancanza di ulteriori informazioni, assumeremo come insieme di arrivo tutto* $I\!R$.

Definizione 1.4.13 *Una funzione di grafico* $\mathcal{R}$ *si dice ingettiva se* $\mathcal{R}^{-1}$ *è funzionale (cioè se non ci sono mai due frecce che arrivano nello stesso punto).*

Esempio 1.4.25 *Consideriamo la funzione avente come grafico la relazione*

$$\mathcal{R} = \{(a,x), (b,y)\}.$$

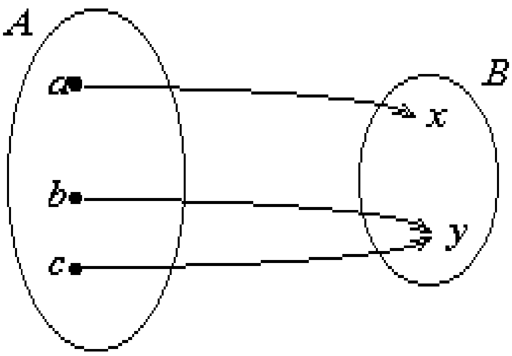


Si vede che tale funzione è ingettiva, poichè non ci sono frecce che arrivano in uno stesso punto.

Esempio 1.4.26 *Consideriamo la funzione che ha come grafico la relazione*

$$\mathcal{R} = \{(a,x), (b,y), (c,y)\};$$

essa non è ingettiva, dato che nel punto y *arrivano due frecce diverse:*



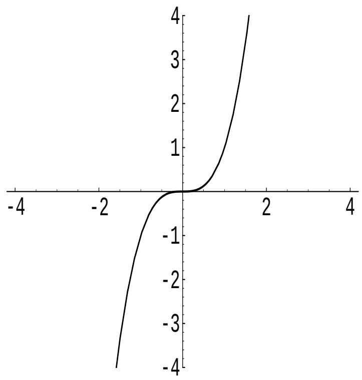
Osservazione 1.4.6 *È evidente che una funzione f è ingettiva se e solo se, detto A il suo insieme di partenza, si ha la seguente condizione:*

$$\forall x, y \in A, x \neq y : f(x) \neq f(y).$$

Osservazione 1.4.7 *Come si capisce dalla definizione, l'ingettività è una proprietà che dipende solo dal grafico.*

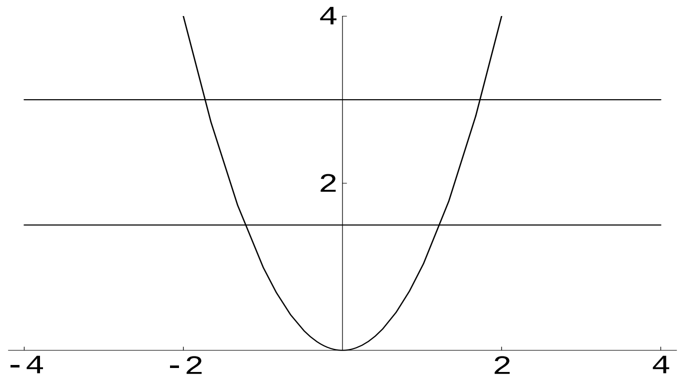
Osservazione 1.4.8 *Rappresentando con gli assi cartesiani il grafico di una funzione reale, l'ingettività sarà espressa dalla proprietà geometrica che ogni retta orizzontale non interseca il grafico più di una volta.*

Esempio 1.4.27 *Consideriamo la funzione reale il cui grafico è dato dalle coppie (x, y) tali che $y = x^3$:*



Si vede subito che tale funzione è ingettiva perché nessuna retta orizzontale ha più di una intersezione con il grafico.

Esempio 1.4.28 *Consideriamo la funzione reale il cui grafico è dato dalle coppie (x, y) tali che $y = x^2$:*



Tale funzione non è ingettiva perché, come si vede subito dal grafico, esistono rette orizzontali che hanno più di una intersezione con il grafico.

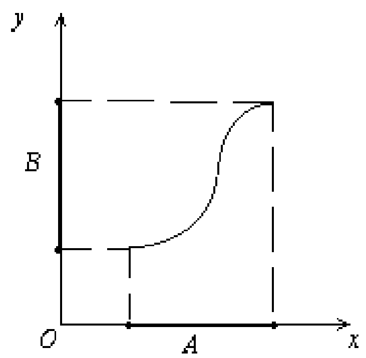
Definizione 1.4.14 *Una funzione si dice bigettiva se è ingettiva e surgettiva.*

Osservazione 1.4.9 *Una funzione $f = (A, B, \mathcal{R})$ è bigettiva se e solo se $(B, A, \mathcal{R}^{-1})$ è ancora una funzione. In tal caso, la funzione $(B, A, \mathcal{R}^{-1})$ si dice funzione inversa di f e si denota con il simbolo f^{-1}.*

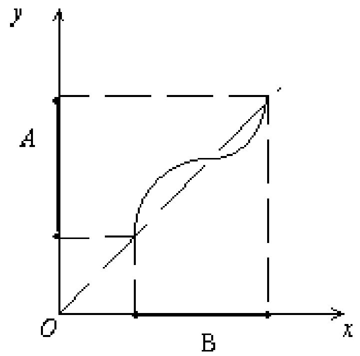
Esempio 1.4.29 *Consideriamo, di nuovo, la funzione avente come grafico la relazione $\mathcal{R} = \{(a, x), (b, y)\}$. È una funzione bigettiva, dato che la relazione inversa $\mathcal{R}^{-1} = \{(x, a), (y, b)\}$ rappresenta, ancora, il grafico di una funzione.*

In altri termini, una funzione è bigettiva se e solo se, girando le frecce, si ottiene ancora una funzione. Rappresentata sugli assi cartesiani, una funzione è surgettiva se la proiezione dell'insieme di partenza sull'asse delle ordinate dà proprio l'insieme di arrivo, cioè quando l'insieme di arrivo è dato dalle proiezioni del grafico sull'asse delle ordinate. Se una funzione f è bigettiva, la sua funzione inversa si ottiene prendendo il grafico simmetrico rispetto alla bisettrice.

Esempio 1.4.30 *Consideriamo la funzione f il cui grafico è rappresentato in figura.*



Si vede subito che questa funzione è bigettiva, per cui ha senso considerare la funzione inversa. Il grafico della funzione inversa si ottiene ribaltando il grafico di f rispetto alla bisettrice del primo quadrante.



Esempio 1.4.31 *Consideriamo la funzione da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ il cui grafico è la parabola di equazione $y = x^2$, questa non può avere inversa dato che non è ingettiva né surgettiva.*

Dato un insieme A, la funzione $i_A : A \to A$ tale che $i_A(x) = x$, che ad ogni $x \in A$ fa corrispondere x stesso, prende il nome di *funzione identica su A*.

Definizione 1.4.15 *Data una funzione $f : A \to B$, si dice che f è invertibile se esiste una funzione $g : B \to A$ tale che $g \circ f = i_A$ e $f \circ g = i_B$.*

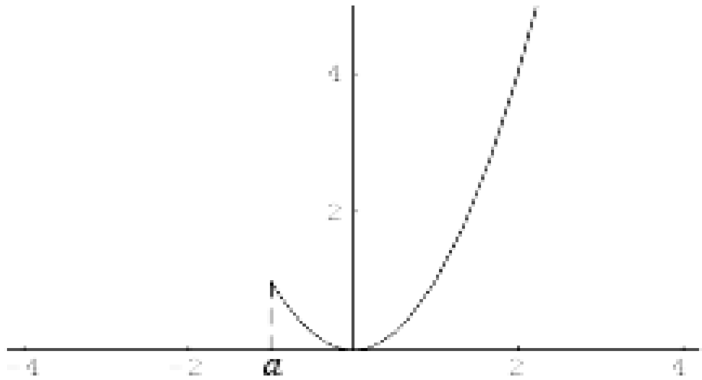
Osservazione 1.4.10 *Si dimostra facilmente che una funzione f è invertibile se e solo se è bigettiva e che l'unica funzione g che verifica la condizione richiesta è l'inversa di f.*

Spesso, quando si hanno delle funzioni non ingettive, può essere opportuno considerarne delle "restrizioni" ingettive. La restrizione di una funzione è definita come segue.

Definizione 1.4.16 *Data una funzione $f : A \to B$ e dato $A^{'} \subset A$,si definisce restrizione di f ad $A^{'}$ la funzione $f_{|A'} : A^{'} \to B$ tale che $\forall x \in A^{'} : f_{|A'}(x) = f(x)$.*

Osservazione 1.4.11 *Da un punto di vista grafico,restringere una funzione rappresentata con gli assi cartesiani, significa semplicemente cancellare una parte del grafico, riducendo conseguentemente l'insieme di partenza.*

Esempio 1.4.32 *Se restringiamo la funzione $y = x^2$ da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, il cui grafico è dato dalla parabola, all'intervallo $[a, +\infty[$, con $a \in \mathbb{R}$, dobbiamo cancellare i punti del grafico che hanno ascissa minore di a. In questo modo otteniamo la funzione g il cui grafico è il seguente:*



Osserviamo che la restrizione è ingettiva se e solo se $a \geq 0$.

Osservazione 1.4.12 *La restrizione di una funzione ingettiva è ancora ingettiva.*

Analogamente, può essere conveniente "ridurre" una funzione allo scopo di renderla surgettiva.

Definizione 1.4.17 *Data una funzione $f : A \to B$ e dato $B^{'} \subset B$ tale che $f(A) \subset B^{'}$, si definisce ridotta di f a $B^{'}$ la funzione $f_{\natural} : A \to B^{'}$ tale che $\forall x \in A : f_{\natural}(x) = f(x)$.*

Se si parla di ridotta di f senza assegnare $B^{'}$, si intende prendere $B^{'} = f(A)$.

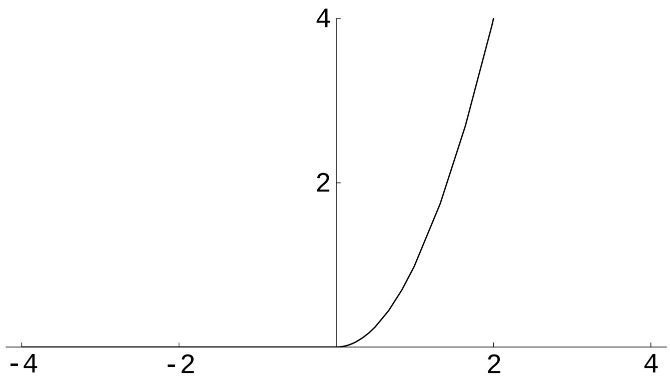
Osservazione 1.4.13 *Notiamo che le definizioni di restrizione e riduzione sono piuttosto simmetriche, poichè l'una consiste nel rimpicciolire l'insieme di partenza e l'altra consiste nel rimpicciolire quello di arrivo. L'operazione di restrizione porta però, come conseguenza, l'eliminazione di una parte del grafico, mentre quella di riduzione lascia il grafico invariato.*

Esempio 1.4.33 *La funzione $y = x^2$, rappresentata dalla parabola precedente, è stata considerata come il grafico di una funzione da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$. Se la consideriamo come grafico di una funzione da $\mathbb{R}$ in $[0, +\infty[$, otteniamo una riduzione poichè abbiamo rimpicciolito l'insieme di arrivo.*

Vediamo, ora, come le due operazioni di restrizione e di riduzione condotte simultaneamente consentono di ottenere "pezzi" bigettivi di funzioni che non sono bigettive e, quindi, permettono di parlare di inverse di funzioni che non sono precisamente invertibili.

Esempio 1.4.34 *Quando si dice, parlando in modo approssimativo, che la radice quadrata è l'inversa della funzione $y = x^2$, occorre non dimenticare che la funzione $y = x^2$, di solito intesa come funzione da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, non è nè ingettiva e nè surgettiva e, quindi, non è invertibile. Allora, per parlare dell'inversa $y = \sqrt{x}$, occorre effettuare le seguenti operazioni:*

1. *Restringere la funzione all'intervallo* $[0, +\infty[$*, ottenendo una funzione ingettiva;*



2. *Ridurre l'insieme di arrivo, ottenendo una funzione surgettiva (il grafico non cambia con questa operazione).*

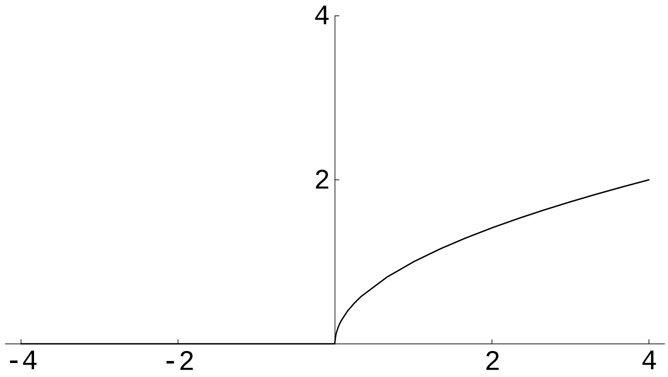
3. *A questo punto, abbiamo una funzione invertibile da* $[0, +\infty[$ *in* $[0, +\infty[$*, per cui possiamo considerare l'inversa, il cui grafico è ottenuto, come al solito, ribaltando il grafico precedente rispetto alla bisettrice del primo quadrante.*

Osservazione 1.4.14 *Esiste una sola riduzione che rende una funzione surgettiva, basta prendere l'insieme di arrivo e restringerlo al massimo.*

Osservazione 1.4.15 *È anche possibile aggiungere nuovi punti al grafico di una funzione* $f : A \to B$ *, in modo che rimanga una relazione funzionale e che continui ad avere codominio contenuto in* B*. Ovviamente, il dominio diventa più grande e sarà un insieme* A' *tale che* $A \subset A'$*. Il nuovo grafico permetterà di costruire una nuova funzione* $g : A' \to B$ *tale che* $g_{|A} = f$*. In questo caso, si dice che* g *è un prolungamento di* f *ad* A'*. L'operazione di restrizione può essere considerata, quindi, come l'inversa di quella di prolungamento.*

Esempio 1.4.35 *La funzione* g*, considerata nell'esempio 1.4.32 , è la restrizione della funzione* f *all'intervallo* $[a, +\infty[$*. Questo fatto si può esprimere, in maniera del tutto equivalente, dicendo che* f *è un prolungamento di* g *su* $\mathbf{R}$*.*

Notiamo che si parla "della" restrizione ad un insieme $A' \subset A$ usando l'articolo determinativo poiché tale restrizione è unica, mentre si usa l'espressione "un" prolungamento usando l'articolo indeterminativo poiché di tali prolungamenti ne esistono, solitamente, molti. Infatti, la funzione il cui grafico è di seguito rappresentato



è ancora un prolungamento su $I\!R$ della stessa funzione g. Si capisce, quindi, che di tali prolungamenti ne esistono molti, perché il grafico può essere prolungato in maniera arbitraria a sinistra di a.

Esempio 1.4.36 *Schematizzando con punti e frecce, consideriamo gli insiemi* $A = \{a, b\}$ *e* $B = \{x, y\}$ *e la funzione che ad* a *fa corrispondere* x *e a* b *l'elemento* y*. Se si prende un ulteriore elemento* c *non appartenente ad* A *in modo che da esso parta una freccia che , ad esempio, giunga nell'elemento* y*, otteniamo un prolungamento della funzione all'insieme* $A' = A \cup \{c\}$*.*