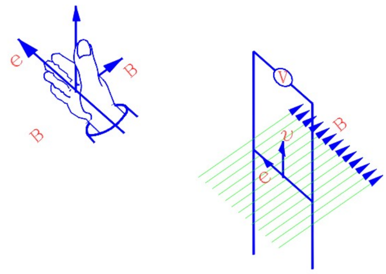
Cilc per tutti gli appunti (AUTOMAZIONE – TRATTAMENTI TERMICI ACCIAIO – SCIENZA delle COSTRUZIONI…)

e-mail per suggerimenti

13.8 F.e.m indotta inun conduttore in movimento entro un campo magnetico

Fig.13.16



Si consideri un conduttore immerso in un campo magnetico costante, di induzione *B*, posto in direzione normale alle linee di flusso. Si imprima al conduttore un moto traslatorio uniforme con velocità, nella direzione normale sia al conduttore sia alle linee di flusso.Gli elettroni liberi del conduttore, nel moto di questo, sono soggetti alla forza di *lorenz* che li spinge verso una estremità, lasciando l'altra caricata positivamente per mancanza di elettroni. Nasce così una differenza di potenziale "*e*" tra gli estremi del conduttore che si presenta come un generatore di una forza elettromotrice ***f.e.m.***

Nella figura il conduttore viene fatto scorrere lungo due barre conduttrici laterali collegate ciascuna con una estremità ad un misuratore di tensione (*voltmetro*). Si osserva che lo strumento misurerà la ***f.e.m.* "*e*"** che è indotta nel conduttore nel moto descritto entro il campo magnetico.

Se le due barre laterali vengono collegate ad un conduttore che chiude il circuito scorrerà in questo una corrente nel senso dell ***f.e.m.*** indotta.

13.8.1 Senso della f.e.m "e" indotta.

Vi sono vari metodi per rilevare il senso della *f.e.m* indotta nel conduttore in moto entro il campo magnetico. Nella figura *fig.13.16* ne viene proposto uno molto pratico.

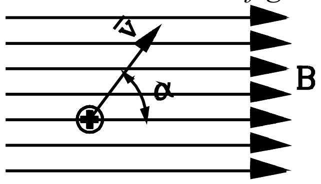
Si dispone la mano destra lungo il conduttore, con il pollice nella direzione della velocità e in modo che le linee di flusso buchino il palmo. Con questa disposizione, *la f.e.m "e" indotta ha il senso che va dal polso verso le dita della mano.*

È facile dimostrare che la *f.e.m "e"* indotta, nel caso considerato è data dal prodotto:

$$e = B \cdot l \cdot v \qquad (13.8.1)$$

dove "l" è la lunghezza del conduttore immerso nel campo, B è l'induzione, $\vec{v}$ è la velocità normale alle linee di campo.

fig.13.17

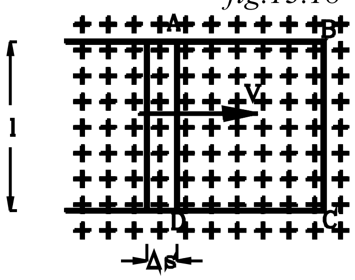


Se la velocità del conduttore è inclinata di α rispetto alle linee di flusso, occorre porre nella formula la componente della velocità $\vec{v}$ nella direzione normale all'induzione $\vec{B}$: $v \cdot sen\alpha$

$$e = Blvsen\alpha \qquad (13.8.2)$$

13.8.2 Espressione generale della f.e.m "e" indotta

fig.13.18



Si consideri di nuovo il caso del conduttore di lunghezza "l" che si muove entro il campo con velocità, perpendicolare alle linee di flusso. Si genera una *f.e.m "e"*:

$$e = Blv$$

La *f.e.m "e"* farà scorrere una corrente nella spira ABCD.

Si noti che, durante lo spostamento del conduttore verso destra, varia il flusso che buca la superficie che ha come contorno la spira ABCD: *si dice che varia il flusso concatenato con la spira.*

In un incremento di tempo Δt il conduttore effettua uno spostamento Δs. La velocità $\bar{v}$ sarà data da:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad \text{sostituendo si ha:} \quad e = Bl\frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Il prodotto "$l \cdot \Delta s$" dà la variazione di superficie della spira che si concatena con il flusso:

$$\Delta s \cdot l = \Delta S = A'ABB'; \quad \text{quindi:} \quad e = \frac{B \cdot \Delta S}{\Delta t}$$

Il prodotto $B \cdot \Delta S$ rappresenta la variazione del flusso che si concatena con la spira ABCD nello spostamento Δs:

$$B \cdot \Delta S = \Delta \Phi$$

L'espressione della *f.e.m "e" indott***a**, in valore assoluto, non considerando il segno è data da:

$$e = \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} \quad (13.8.3)$$

Il valore medio della f.e.m indotta è data dalla variazione di flusso nell'unità di tempo.

13.9 Legge di Faraday

L'ultima espressione che lega la f.e.m "e" alla variazione di flusso $\Delta \Phi$ è valida in generale quando un circuito è soggetto ad un campo magnetico variabile, qualunque sia il modo con il quale esso avviene.

Si può asserire che:

In un circuito immerso in un campo magnetico variabile si induce una *f.e.m "e"* il cui valore medio è dato dalla variazione del flusso concatenato nell'unità di tempo: è dato cioè dal rapporto (13.8.3) tra la variazione del flusso concatenato $\Delta \Phi_c$ e il tempo Δt nel quale è avvenuta detta variazione.

13.9.1 Segno della f.e.m "e"

La legge enunciata dà la possibilità di determinare il valore della *f.e.m "e"* che si genera in circuito concatenato con un flusso variabile; occorre poi, in ogni caso, determinare il verso della *f.e.m "e"*.

Si può enunciare la seguente regola:

La *f.e.m "e"* indotta in un circuito, dalla variazione del flusso con esso concatenato $\Delta \Phi_c$, ha senso tale da far circolare una corrente che genera un flusso che si oppone alla variazione di flusso che ha generato detta *f.e.m "e"*.

Da quest'ultima affermazione ne viene che nella espressione della *f.e.m "e"* va posto il segno negativo:

$$e = -\frac{\Delta \Phi}{\Delta t} \quad (13.9.1)$$

Per comprendere quanto è stato enunciato riferiamoci a degli esempi.

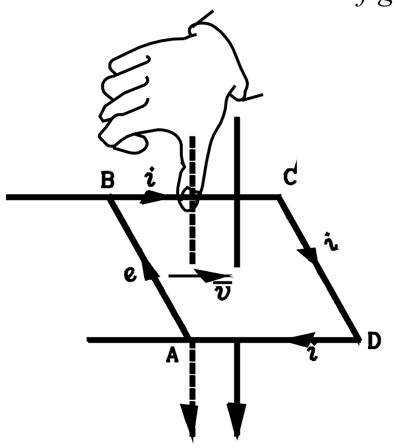


fig.13.19

Si consideri di nuovo il conduttore che si muove con velocità v entro un campo costante, strisciando su due barre laterali collegate ad una estremità da un conduttore.

La direzione del flusso concatenato con la spira ABCD è indicata con la freccia in linea continua.

Spostandosi il conduttore nella direzione di "v" *diminuisce* il flusso concatenato con la spira, *diminuendo* la superficie *ABCD* attraversata dal flusso.

La diminuzione del flusso concatenato con la spira genera in questa una *f.e.m "e"* indotta.

Per determinare il senso della *f.e.m "e"* occorre chiedersi:

Domanda Chi è che ha determinato la *f.e.m "e"* indotta ?

Risposta La *diminuzione* del flusso concatenato.

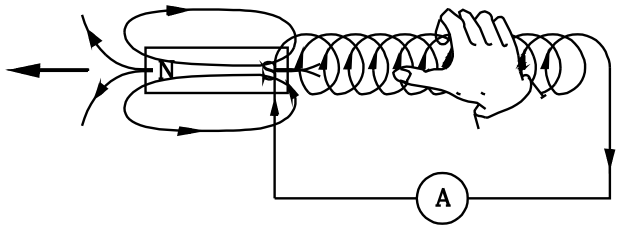
Domanda Allora, che senso avrà la *f.e.m "e"* ?

Risposta La *f.e.m "e"* avrà senso tale da far circolare nella spira *ABCD* una corrente, che generi un flusso, che *si opponga alla diminuzione* di quello che ha generato la *"e"*: per opporsi a tale diminuzione la corrente dovrà creare un *flusso concorde* con quello induttore.

Domanda E, quindi, in conclusione ?

Risposta In conclusione, si pone la mano destra come in fig13.19., con il pollice rivolto nel senso del flusso induttore che, in questo caso, è concorde con quello generato dalla corrente *(freccia tratteggiata). La corrente circolerà dal polso verso le dita: tale sarà anche il senso della "e".*

fig.13.20



Nella figura il nucleo magnetizzato sta fuoriuscendo dal solenoide - Il flusso concatenato con il circuito *diminuisce* - La diminuzione del flusso induce nel solenoide una *f.e.m* che farà circolare una corrente che crea un *flusso che si oppone alla diminuzione* di quello induttore: perché ciò avvenga occorre che il flusso generato dalla corrente indotta sia *concorde con quello induttore*. Con la regola della mano destra, ponendo il pollice nel senso del flusso di reazione *(concorde con quello induttore)* si ottiene il senso della *f.e.m* e della corrente indotta che vanno dal polso alle dita.

13.9.2 F.e.m istantanea - Concetto di derivata

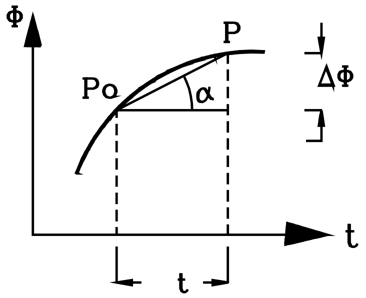
In un circuito, concatenato con un flusso variabile nel tempo, si induce una *f.e.m "e"* il cui valore medio nel tempo Δt, è dato dal rapporto tra l'incremento del flusso $\Delta\Phi$ e detto intervallo Δt.

Consideriamo tale rapporto senza segno:

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$$

Di esso si può dare una interpretazione geometrica nel grafico che rappresenta il variare del flusso Φ in funzione del tempo.

fig.13.21



Sia quello in figura un tratto del grafico dell'andamento del flusso Φ in funzione del tempo. Nell'intervallo di tempo Δt il flusso varia, subendo un incremento $\Delta\Phi$, nel passaggio del punto sul grafico da *Po* a *P* .

Si consideri la corda *Po-P*. Essa è inclinata di α rispetto all'asse dei tempi.

Dal triangolo *PoHP* si ha:

$$\frac{HP}{PoH} = tg\alpha \qquad ma\ \ HP = \Delta\Phi \qquad PoH = \Delta t \ \text{ quindi:}$$

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = tg\alpha$$

Il rapporto $\Delta\Phi\ /\ \Delta t$ è proporzionale alla pendenza media della curva nell'intervallo Δt, misurata dalla tangente trigonometrica dell'angolo α che la corda *PoP* forma rispetto al semiasse positivo dei tempi.

Tale pendenza dà, concettualmente, la velocità media con la quale il flusso Φ varia nell'intervallo Δt.

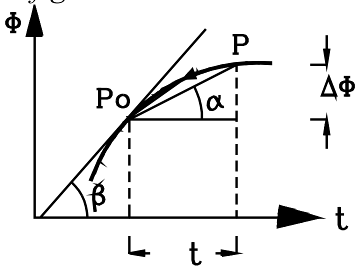
Il rapporto $\Delta\Phi\ /\ \Delta t$ è tra due incrementi finiti e dà il valore medio assoluto della *f.e.m* indotta.

Ora si voglia determinare il valore assoluto della *f.e.m* istantanea che si ha in un istante **t**

Se, nell'effettuare il rapporto $\Delta\Phi\ /\ \Delta t$, si restringe l'intervallo di tempo Δt, attorno all'istante *"t"* nel quale si calcola la variazione $\Delta\Phi$ del flusso, si avrà una informazione sempre più precisa del valore della *f.e.m nell'istante considerato*. E ciò risulta più vero man mano che si considera un Δt sempre più piccolo: come si dice per Δt tendente a zero: $\Delta t \to 0$.

Per $\Delta t \to 0$ si considerano incrementi di tempo infinitesimi, che si indicano con "dt". Corrispondentemente anche l'incremento del flusso diviene infinitesimo, e si indica con $d\Phi$.

fig.13.22



Il valore assoluto istantaneo della *f.e.m "e"* è dato dal rapporto dei due infinitesimi :

$$e = \frac{d\Phi}{dt}$$

a cui si dà nome di *derivata* del flusso rispetto al tempo. *(Ciò verrà studiato più precisamente nel programma di matematica del prossimo anno)*

Della derivata di una funzione si può dare una interpretazione geometrica nel suo grafico.

Consideriamo di nuovo il triangolo *PoPH* di fig.13.22 ; con $PoH = \Delta t$ e $HP = \Delta\Phi$

Il rapporto:

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = tg\alpha \quad \text{dà la pendenza della corda } PoP$$

Facciamo ora tendere Δt a zero: $\Delta t \to 0$

Fermo restando il punto *Po,* quando $\Delta t \to 0$, il punto *P* si muove sulla curva e si avvicina a *Po*. La corda *PoP* ruota attorno a *Po*, fino a che, *al limite*, quando *P* si avvicina a *Po*, tende a coincidere con la tangente in *Po.*

Per $\Delta t \to 0$ la corda *PoP* coincide con la tangente in *Po* e il rapporto tra gli infinitesimi $d\Phi \ / dt$ risulta uguale a $tag\beta$.

$$\frac{d\Phi}{dt} = tag\beta$$

Il valore assoluto della *f.e.m istantanea "e"* è dato dalla derivata del flusso rispetto al tempo e, nel grafico è proporzionale alla inclinazione della tangente alla curva, nell'istante considerato, rispetto al semiasse positivo dei tempi.

Ciò che interessa, per ottenere una elevata *f.e.m* , non è tanto avere un grande valore del flusso, quanto ottenere una r*apidissima variazione* di esso: è la *pendenza* della curva del flusso rispetto al tempo che determina *la f.e.m*.

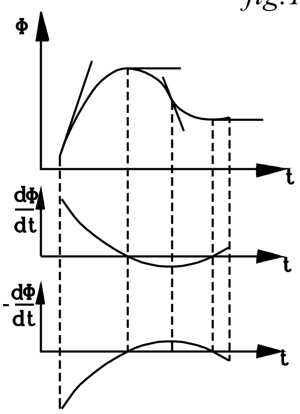
Anche con un piccolo flusso si può ottenere una elevata *f.e.m indotta*, effettuando una rapidissima variazione istantanea di esso: quando la pendenza della curva si avvicina a *90°* la tangente tende all'infinito.

Concludendo: La f.e.m istantanea è l'opposto della derivata del flusso rispetto al tempo.

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -tg\beta \qquad (13.9.2)$$

Sia quello di *fig.13.23* il grafico del flusso Φ in funzione del tempo.
L'andamento della *f.e.m indotta* nei vari punti si ottiene considerando in essi la pendenza della tangente. Si nota:

fig.13.23



- Nel punto *A* l'inclinazione della tangente alla curva è *positiva* e quindi risulta positivo il rapporto $d\Phi \ / dt$
- In *B* l'inclinazione è nulla: risulta nullo $d\Phi \ / dt$.
- In *C* la tangente alla curva raggiunge il massimo valore con segno negativo e così risulterà il rapporto $d\Phi \ / dt$
- e così via...

per ottenere la *f.e.m "e"*

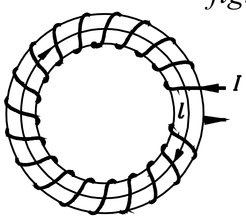
$$e = -\frac{d\Phi}{dt}$$

si effettua la curva simmetrica della $d\Phi \ / dt$ rispetto all'asse dei tempi.

13.10 Induttanza - coefficiente di autoinduzione

Un qualsiasi circuito percorso da corrente genera un campo magnetico che si concatena con il circuito stesso.

fig.13.24



Il flusso concatenato Φ_c dipende dalla corrente *I* che l'ha generato. Nelle sostanze paramagnetiche diamagnetiche e nel tratto rettilineo della curva di prima magnetizzazione dei materiali ferromagnetici vi è una proporzionalità diretta tra corrente e flusso concatenato con il circuito che l'ha generato.

Si definisce *induttanza L o coefficiente di autoinduzione* il rapporto tra il flusso Φ_c concatenato con il circuito e la corrente *I* che ha generato detto flusso.

$$L = \frac{\Phi_c}{I} \quad (13.10.1)$$

Da cui:

$$\Phi_C = L \cdot I \; (13.10.2)$$

13.10.2 Unità di misura dell'induttanza L

Dalla espressione della induttanza *(35)* si ottiene:

$$[L] = \frac{wb}{A} = \frac{Vs}{A} \qquad ma \qquad \frac{V}{A} = \Omega \qquad [L] = \Omega\, s \qquad \Omega\, s = H \;\; (Henry)$$

$$\left[L\right] = H \quad (13.10.3)$$

13.10.3 Fenomeno di autoinduzione

Un qualsiasi circuito percorso da corrente si concatena con il flusso da essa generato.

Se la corrente è costante lo sarà anche il flusso concatenato, e, in tal caso, non si ha alcuna azione elettrodinamica nel circuito percorso da detta corrente.

Se, invece, la corrente *"i"*, che percorre il circuito, varia nel tempo, anche il flusso concatenato, da esso generato, subirà una corrispondente variazione che è proporzionale alla corrente stessa.

$$\Phi_{C2} - \Phi_{C1} = Li_2 - Li_1 \qquad\qquad \Phi_{C2} - \Phi_{C1} = L\left(i_2 - i_1\right)$$

$$ponendo \quad \Phi_{C2} - \Phi_{C1} = \Delta\Phi \qquad\qquad i_2 - i_1 = \Delta i$$

$$\Delta\Phi_C = L \cdot \Delta i \quad (13.10.4)$$

Per la legge di *Faradey*, la variazione di flusso $\Delta\Phi_C$ nel tempo Δt genera una *f.e.m "e"* indotta che viene denominata di *autoinduzione*, perché provocata dalla variazione del flusso, creato dal circuito stesso con il quale si concatena.

$$e = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \qquad \text{sostituendo la (13.10.4) si ha:} \qquad e = -L\frac{\Delta i}{\Delta t}$$

La *f.e.m* istantanea si ottiene sostituendo gli infinitesimi al posto degli incrementi finiti :

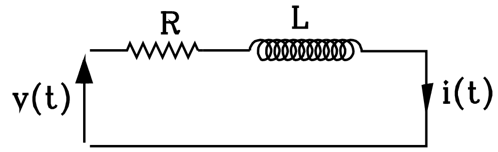
$$e = -L\frac{di}{dt} \quad (13.10.5)$$

Il segno negativo (-) nella espressione della f.e.m "e" indotta sta ad indicare che essa ha senso tale da opporsi alla variazione di corrente che l'ha generata.

Legge di Ohm nel circuito ohmico induttivo

Quando un circuito è soggetto ad una tensione di alimentazione *v(t)* variabile nel tempo, occorre, spesso, considerare oltre alla resistenza *R* anche l'induttanza *L*, dovuta la fenomeno di autoinduzione. Questo acquista rilevanza nello studio di regimi transitori. Il valore dell'induttanza spuria L dipende dal tipo di circuito, risulta particolarmente apprezzabile negli avvolgimenti delle macchine elettriche.

fig.13.25



Così, considerando il circuito schematizzato in figura, comprendente la resistenza R e l'induttanza L, percorso dalla corrente variabile *i(t)*, la legge di Ohm si scrive:

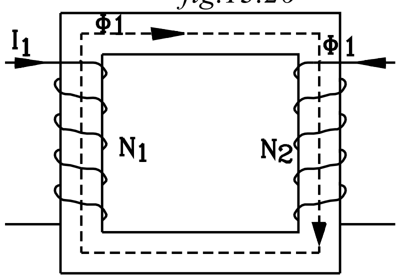
$$v = Ri + L\frac{di}{dt} \quad (13.10.6)$$

Nella espressione è sottinteso che la tensione v e la corrente i sono funzioni del tempo.

13.11 Coefficiente di mutua induzione "M"

Può avvenire che il flusso generato da un circuito, detto *primario*, venga a concatenarsi con un altro, detto *secondario*, diverso da quello che ha generato il flusso.

fig.13.26



Nella *fig.13.26* i circuito primario, indicato con *"I"*, percorso dalla corrente I_1 genera il flusso Φ_1 che va a concatenarsi N_2 volte con le spire del circuito secondario.

Il flusso Φ_{C21} concatenato con il secondario e generato dalla corrente del primario sarà dato dal flusso Φ_1 per il numero di spire N_2:

$$\Phi_{C21} = N_2 \Phi_1$$

Essendo il flusso Φ_1 proporzionale alla corrente I_1 risulterà proporzionale a questa anche il flusso Φ_{C21}. Ne viene che:

Il flusso Φ_{C21} concatenato con il secondario e generato dalla corrente del primario è proporzionale alla corrente stessa I_1 che scorre sul primario.

Si definisce coefficiente di mutua induzione *M*, il rapporto tra il flusso Φ_{C21} concatenato con il secondario e generato dalla corrente del primario e la corrente I_1 stessa del primario.

$$M = \frac{\Phi_{c21}}{I_1} \quad (13.11.1) \quad \text{da cui}$$

$$\Phi_{c21} = M \cdot I_1 \quad (13.11.2)$$

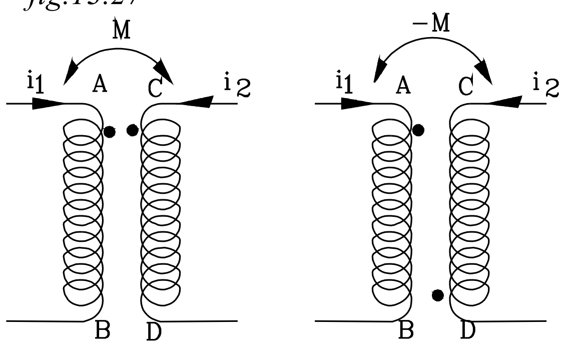
Simmetricamente, se si alimenta il secondario, si ha un flusso Φ_{C12} concatenato con il primario e generato dalla corrente I_2 del secondario.

Il coefficiente di mutua induzione è anche dato da:

$$M = \frac{\Phi_{c12}}{I_2} \quad (13.11.3) \qquad \Phi_{c12} = M \cdot I_2 \quad (13.11.4)$$

13.11.2 Rappresentazione convenzionale dell'accoppiamento di mutua induzione

fig.13.27



L'accoppiamento di mutua induzione si rappresenta con due solenoidi affacciati uno all'altro.

Considerando le correnti che entrano nei due solenoidi possono verificarsi due casi: i flussi generati dalle due correnti sono concordi oppure discordi tra loro. Ciò dipende da come sono effettuati gli avvolgimenti dei solenoidi

Vengono indicati con un puntino i morsetti nei quali debbono entrare le correnti per avere flussi concordi.

Se le due correnti nei due solenoidi, entrambi, entrano o escono dal morsetto segnato con un puntino, allora l'accoppiamento si considera con coefficiente di mutua induzione M positivo.

Se, invece, una corrente di un solenoide entra nel morsetto con un puntino *(in A)* e l'altra esce dal morsetto con un puntino *(in D)* dell'altro solenoide, l'accoppiamento si considera con coefficiente di mutua induzione negativo -M.

13.11.3 Fenomeno di mutua induzione

Inviando una corrente nel primario si genera un flusso che si concatena con il secondario:

$$\Phi_{C21} = M\, I_2$$

Se la corrente del primario è costante , lo sarà anche il flusso concatenato con il secondario. Se, invece, la corrente inviata al primario è variabile, varierà corrispondentemente anche il flusso concatenato con il secondario.

$$\Delta\Phi_{C21} = M\ \Delta i_1$$

Per la legge di Faradey si indurrà nel secondario una *f.e.m "e_{21}"* indotta, detta di *mutua induzione*.

$$e_{21} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \quad \text{quindi} \quad e_{21} = -M\frac{\Delta i_1}{\Delta t} \quad \text{il valore istantaneo sarà:}$$

$$e_{21} = -M\frac{di_1}{dt} \quad (13.1.7)$$

13.11.4 Rapporto m di trasformazione

Si consideri ancora i due circuiti accoppiati di *fig.11.26.*

Il flusso Φ_1 generato dalla corrente "i_1" del primario attraversa sia questo che il secondario. Esso si concatena N_1 volte con il circuito primario e N_2 volte con il secondario.

Il flusso concatenato con le N_1 spire del primario sarà:

$$\Phi_{c1} = N_1 \cdot \Phi_1 \quad (13.11.8)$$

La variazione della corrente primaria determina una variazione del flusso Φ_1 e quindi di quello concatenato con il primario stesso, determinando una *f.e.m di autoinduzione "e_1"* che, in valore assoluto è data da:

$$e_1 = \frac{\Delta\Phi_{c1}}{\Delta\ t} \quad \text{sostituendo la (13.11.8) e tenendo conto che varia } \Phi_1 \text{ e non } N_1\text{:}$$

$$e_1 = N_1 \cdot \frac{\Delta\Phi_1}{\Delta\ t} \quad (13.11.9)$$

Il flusso concatenato Φ_{c21} concatenato con il secondario è dato da:

$$\Phi_{c21} = N_2 \cdot \Phi_1 \quad (13.11.10)$$

La variazione del flusso Φ_1 determina una variazione del flusso concatenato con il secondario, inducendo su questo una *f.e.m* indotta di *mutua induzione*, che in valore assoluto sarà dato da*:*

$e_2 = \dfrac{\Delta\,\Phi_{c21}}{\Delta\,t}$ sostituendo la (13.11.10) e tenendo conto che varia Φ_1 e non N_2:

$$e_2 = N_2 \cdot \frac{\Delta\,\Phi_1}{\Delta\,t} \qquad (13.11.11)$$

Dividendo, membro a membro le (13.11.9) e (13.11..1) si ottiene il rapporto *m* tra le *f.e.m:*

$$\frac{e_1}{e_2} = N_1 \cdot \frac{\Delta\,\Phi_1}{\Delta\,t} \cdot \frac{1}{N_2} \cdot \frac{\Delta\,t}{\Delta\,\Phi_1}$$

$$\frac{e_1}{e_2} = \frac{N_1}{N_2} = m \qquad (13.11.12)$$

14 CORRENTI ALTERNATE

14.1Funzioni sinusoidali

Una funzione *y(t)* che varia sinusoidalmente in funzione del tempo *t* è del tipo:

$$y(t) = Y_M\,sen(\omega\,t + \varphi) \qquad (14.1.1)$$

Per studiare la funzione, si supponga che sia:

$$\varphi=0$$

La funzione, in tal caso, ha l'espressione:

$$y(t) = Y_M\,sen(\omega\,t) \qquad (14.1.2)$$

La funzione $sen(\omega\,t)$ della variabile $\alpha = \omega\,t$ è periodica di *360°* $(2\pi$ *in radianti)* : quando l'angolo $\alpha = \omega\,t$ varia di 2π radianti, la funzione $sen(\omega\,t)$ effettua una oscillazione completa dei suoi valori tra ± 1

$$-1 < sen(\omega\,t) < +1$$

Ne viene che la funzione y(t) quando $\alpha = \omega\,t$ varia di 2π radianti oscillerà tra i valori $\pm Y_M$

$$-Y_M < y(t) < +Y_M \qquad (14.1.3)$$

Y_M rappresenta il valore massimo che può assumere la funzione sinusoidale.

14.1.1 Periodo T

Si definisce periodo *"T"* il tempo che impiega la funzione per effettuare una oscillazione completa. Nel tempo *T* l'angolo $\alpha = \omega\,t$, partendo da zero, varia di 2π radianti. Si ha:

$$\omega\,T = 2\pi \qquad \text{da cui:}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \qquad (14.1.4)$$

Al parametro ω si da nome di *pulsazione*.

14.1.2 Frequenza f

Si definisce frequenza f il numero di oscillazioni intere che la funzione sinusoidale effettua nell'unità di tempo *(in 1 secondo)*. Se T è il tempo per effettuare *1* sola intera oscillazione, in *1* secondo si potranno avere un numero di oscillazioni pari a:

$$f = \frac{1}{T} \qquad (14.1.5)$$

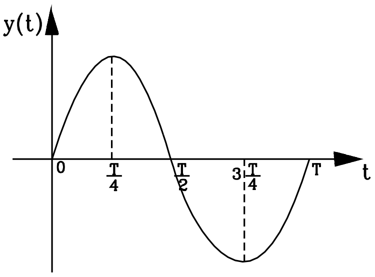
L'unità di misura della frequenza è:

$$[f] = \frac{1}{s} = s^{-1} = Hz$$

Sostituendo la (14.1.4) nella (14.1.3) si ha:

$$\omega = 2\pi \ f \qquad (14.1.6)$$

fig.14.1



Studiamo ora la funzione sinusoidale con $\varphi=0$:

$$y = Y_M sen(\omega t)$$

con $\omega = \frac{2\pi}{T}$ $\qquad y(t) = Y_M \, sen\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$

Diamo a *t* diversi valori:

t	$y(t) = Y_M \, sen\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$
0	$y(0) = Y_M \, sen\left(\frac{2\pi}{T} \cdot 0\right) = 0$
$\frac{T}{4}$	$y\left(\frac{T}{4}\right) = Y_M \, sen\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{4}\right) = Y_M \, sen\frac{\pi}{2} = Y_M$
$\frac{T}{2}$	$y\left(\frac{T}{2}\right) = Y_M \, sen\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2}\right) = Y_M \, sen\pi = 0$
$\frac{3}{4}T$	$y\left(\frac{3}{4}T\right) = Y_M \, sen\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{3}{4}T\right) = Y_M \, sen\, 3\frac{\pi}{2} =$
T	$y(T) = Y_M \, sen\left(\frac{2\pi}{T} \cdot T\right) = Y_M \, sen\, 2\pi = 0$

Ricordiamo che si è posto:

$$\varphi = 0$$

Con tale condizione la funzione sinusoidale $y(t) = Y_M\, sen(\omega t)$, nell'istante iniziale, per t=0 risulta nulla: y=0.

La funzione viene detta in fase zero.

Supponiamo che sia:

$\varphi > 0$ si ha:

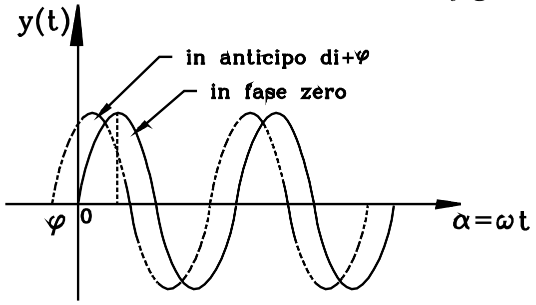
$$y(t) = Y_M\, sen(\omega t + \varphi)$$

In tal caso per *t=0* risulta :

$$y(0) = Y_M\, sen(\varphi) \neq 0$$

Per *t=0* la funzione $y(t) = Y_M\, sen(\omega t + \varphi)$ ha un valore iniziale diverso da zero.

fig.14.2



La funzione sinusoidale avrà inizio quando :

$\omega t_o + \varphi = 0$ da cui: $t_o = -\dfrac{\varphi}{\omega}$

Il segno negativo sul tempo sta ad indicare che la sinusoide inizia prima dell'istante *t=0*.

Quando φ>0 la finzione sinusoidale si dice in anticipo di +φ.

Riferendo le funzioni sinusoidali agli angoli $\alpha = \omega t$, la sinusoide in anticipo di $+\varphi$ è spostata di tale angolo a sinistra, rispetto a quella in fase zero *(tratteggiata in fig.14.2).*

Quando l'angolo di fase è $-\varphi$, la funzione è:

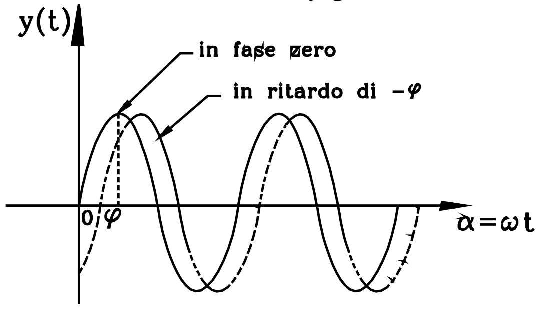
$$y(t) = Y_M\, sen(\omega t - \varphi) \quad (14.1.7)$$

Per t=0 la funzione $y(t) = Y_M\, sen(\omega t - \varphi)$ ha un valore iniziale diverso da zero.

La funzione sinusoidale avrà inizio quando :

$\omega t_o - \varphi = 0$ da cui $t_o = +\dfrac{\varphi}{\omega}$

fig.14.3



Il segno positivo del tempo sta ad indicare che la sinusoide inizia dopo l'istante *t=0*

Quando φ<0 la finzione sinusoidale si dice in ritardo di -φ.

Riferendo le funzioni sinusoidali agli angoli $\alpha = \omega t$, la sinusoide in ritardo di $-\varphi$ è spostata di tale angolo a destra rispetto a quella in fase zero *(tratteggiata in fig.14.3)*

14.1.3 Rappresentazione vettoriale di una grandezza sinusoidale

La grandezza sinusoidale:

$$y(t) = Y_M\, sen(\omega t + \varphi) \quad (14.1.1)$$

è contraddistinta dai tre parametri:

Y_M Valore massimo della funzione

ω Pulsazione

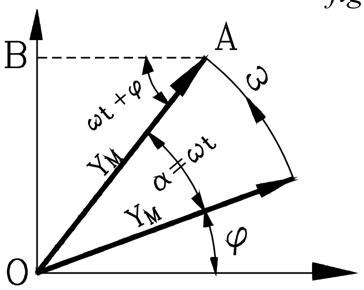
φ Angolo di fase iniziale

Data, così, la funzione sinusoidale:

$$y(t) = Y_M\, sen(\omega\, t + \varphi)$$

ad essa facciamo corrispondere un vettore, spiccato dall'origine di due assi cartesiani.

fig.14.4



Detto vettore, nell'istante iniziale *(t=0)* sia inclinato della fase φ rispetto all'asse delle ascisse di riferimento, abbia come modulo il valore massimo Y_M della funzione e, partendo dall'istante iniziale *t=0*, venga posto in rotazione in senso antiorario con velocità angolare pari alla pulsazione ω.

Il vettore, dopo un tempo *t*, rotando con velocità angolare ω, avrà percorso un angolo:

$$\alpha = \omega\, t\,.$$

Nella rotazione si proietti il vettore sull'asse y, ortogonale a quello di riferimento.

Si ottiene:

$$OB = OA\, sen(\omega\, t + \varphi) \quad \text{essendo } OA = Y_M$$

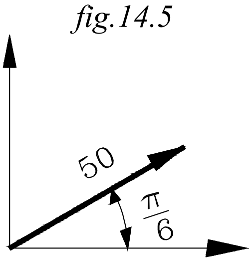
$$OA = Y_M\, sen(\omega\, t + \varphi) = y(t)$$

La grandezza sinusoidale è rappresentata da un *vettore***,** che ruota con velocità angolare pari alla pulsazione ω in senso antiorario**,** ha modulo pari al valore massimo Y_M e, nell'istante iniziale *t=0*, è inclinato di φ rispetto all'asse delle ascisse, di riferimento.

La proiezione *OA* sull'asse ortogonale a quello di riferimento dà il valore istantaneo della grandezza sinusoidale.

Per rappresentare la grandezza sinusoidale basta disegnare il vettore nella posizione iniziale per *t=0*. Si ha così una corrispondenza biunivoca tra vettore e grandezza sinusoidale, tale che alla grandezza sinusoidale vi corrisponde un vettore e viceversa.

fig.14.5



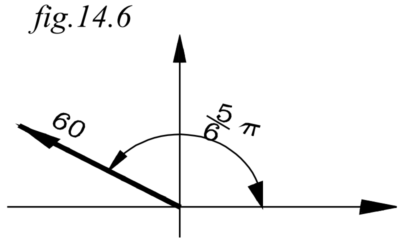
Così data la funzione sinusoidale:

$$y = 50\, sen\left(\omega\, t + \frac{\pi}{6}\right)$$

ad essa vi corrisponde il vettore di modulo *50* e inclinato di $\frac{\pi}{6} = 30°$ rispetto all'asse di riferimento orizzontale.

ω rappresenterà la velocità di rotazione in senso antiorario.

fig.14.6

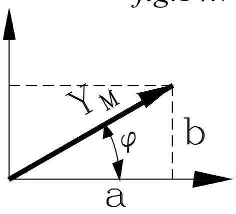


Viceversa dato il vettore rappresentato in fig.14.6 ad esso vi corrisponde una grandezza sinusoidale di valore massimo 60   di fase iniziale $\varphi = \frac{5}{6}\pi = 150°$. Deve essere inoltre conosciuta la velocità di rotazione del vettore, che rappresenta la pulsazione della grandezza sinusoidale. Al vettore corrisponde:

$$y = 60\, sen\left(\omega\, t + \frac{5}{6}\pi\right)$$

14.1.4 Rappresentazione simbolica di una grandezza sinusoidale

fig.14.7



Dato un vettore $\vec{Y}$, spiccato dall'origine di due assi cartesiani, ad esso vi corrispondono biunivocamente i due numeri ordinati, ottenuti, rispettivamente: il primo proiettando il vettore sull'asse di riferimento orizzontale e l'altro con la proiezione sull'altro asse ortogonale.

$$\text{Ad } \vec{Y} \text{ vi corrispondono } \begin{cases} a = Y_M \cos\varphi \\ b = Y_M \operatorname{sen}\varphi \end{cases}$$

Per rappresentare il vettore si possono porre in ordine le due componenti: prima quella sull'asse di riferimento e poi l'altra componente sull'asse ortogonale.

$$\vec{Y} = (a,b)$$

Simbolicamente si possono porre la due componenti in una somma detta *"forma binomia"* nella quale la componente ortogonale viene preceduta dal simbolo *"j"*. Si scrive:

$$\vec{Y} = a + jb$$

Dove la somma è solamente simbolica: sta ad indicare che il vettore $\vec{Y}$ ha la componente *a* sull'asse di riferimento orizzontale e la componente *b* sull'altro asse ortogonale.

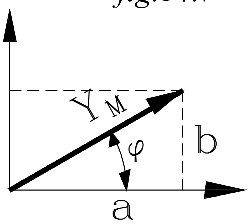
Il simbolo "j" sta a contraddistinguere la componente ortogonale.

Nasce così una corrispondenza biunivoca tra vettore e coppia ordinata di numeri, tale che al vettore vi corrisponde la coppia e viceversa. Ma, come si è esposto un vettore corrisponde biunivocamente ad una grandezza sinusoidale; ne viene che:

Una grandezza sinusoidale è posta in corrispondenza biunivoca con la coppia ordinata di numeri, ottenuti proiettando il vettore rappresentativo rispettivamente sull'asse di riferimento e sull'asse ortogonale ad esso.

Così data la grandezza sinusoidale $y = Y_M \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)$ ad essa vi corrisponde il vettore rappresentato in figura *fig.14.7.*

fig.14.7



Al vettore vi corrispondono i due numeri: $\begin{cases} a = Y_M \cos\varphi \\ b = Y_M \operatorname{sen}\varphi \end{cases}$

e ad essi vi corrisponde la forma binomia:

$$\vec{Y} = a + jb$$

Viceversa, data la forma binomia $\vec{Y} = a + jb$ ad essa vi corrisponde il vettore rappresentato in figura *fig.14.7* avente come componente sull'asse delle ascisse *a* e sull'asse delle ordinate *b*

(j indica solamente qual'è la componente ortogonale)

Dalle componenti *"a"* e *"b"* si ricava il modulo Y_M, che rappresenta il valore massimo della grandezza sinusoidale e l'angolo di inclinazione φ, che rappresenta la fase iniziale. Dalla figura si ha:

$$\begin{cases} Y_M = \sqrt{a^2 + b^2} \\ tg\varphi = \dfrac{b}{a} \Rightarrow \quad \text{da cui si ricava } \varphi \end{cases}$$

la funzione è:

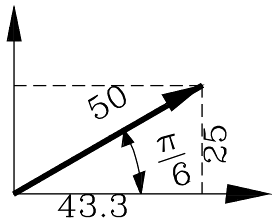
$$y = sen(\omega t + \varphi)$$

Esempi

Data la grandezza sinusoidale:

$$y = 50\,sen\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right) \quad \text{ad essa corrisponde la forma binomia:}$$

fig.14.8



$$a = 50\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = 50\cos 30^\circ = 43{,}3$$

$$b = 50sen\left(\frac{\pi}{6}\right) = 50sen30^\circ = 25$$

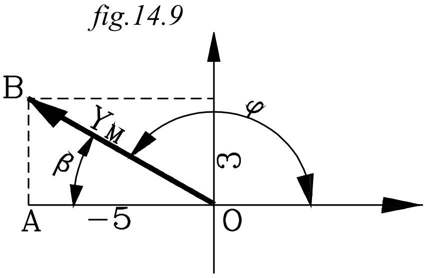
Si scriverà:

$$\vec{Y} = 43.3 + j25$$

Viceversa data la forma binomia:

$$\dot{Y} = -5 + j3 \quad \text{si determini la sinusoide corrispondente}$$

fig.14.9



Si tracci il vettore avente come componente orizzontale -5 e verticale +3

Si debbono ricavare i valori del modulo Y_M *del vettore e dell'angolo di inclinazione* φ *di esso rispetto all'asse di riferimento:*

$$\begin{cases} Y_M = \sqrt{5^2 + 3^2} = 5.83 \\ tg\beta = \dfrac{3}{5} = 0.6 \rightarrow \text{ da cui } \beta = 30{,}97^\circ \end{cases}$$

L'angolo φ *è quello del vettore rispetto all'asse di riferimento:*

$$\varphi = 180 - \beta = 180 - 30{,}97 = 149{,}03$$

Trasformando l'anglo in radianti si ha:

$$180 : \pi = 149{,}03 : \varphi_{rad} \quad \text{da cui}$$

$$\varphi_{rad} = \pi \cdot \frac{149,03}{180} = 0.828 \cdot \pi$$

la funzione sinusoidale sarà quindi

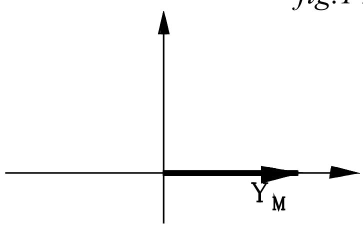
$$y = 5.83sen(\omega t + 0.828 \cdot \pi)$$

L'angolo φ va posto in radianti nella funzione sinusoidale , ma, per comodità nelle applicazioni lo porremo in gradi, ***omettendo la sua trasformazione in radianti****, che si ottiene moltiplicandolo per π / 180 ..*

14.1.5 Forma binomia come numero complesso

Si prendano in esame la forma binomia nei seguenti casi particolari:

fig.14.10



Sinusoide in fase zero: φ=0

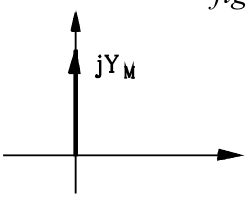
La funzione è:

$$y = Y_M sen(\omega t)$$

la forma binomia è costituita dalla sola componente sull'asse di riferimento coincidente con il valore massimo:

$$\dot{Y} = Y_M$$

fig.14.11



Sinusoide sfasata in anticipo di 90°: $\varphi=\pi/2$

La funzione è:

$$y = Y_M sen\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

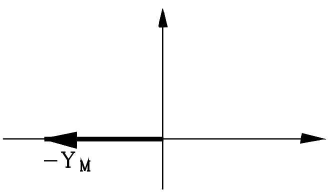
la forma binomia è costituita dalla sola componente sull'asse ortogonale a quello di riferimento, coincidente con il valore massimo moltiplicato per *"j"* :

$$\dot{Y} = jY_M$$

Si noti che tale forma binomia si ottiene dalla precedente moltiplicandola per *"j"*. Ne viene che:

La moltiplicazione per l'operatore *"j"* corrisponde a sfasare la sinusoide di *90°* in anticipo, e, quindi a rotare dello stesso angolo in anticipo il vettore rappresentativo.

fig.14.12



Sinusoide sfasata 180° in anticipo: $\varphi=\pi$

La funzione è:

$$y = Y_M sen(\omega t + \pi)$$

la forma binomia è costituita dalla sola componente negativa sull'asse di riferimento coincidente con il valore massimo:

$$\dot{Y} = -Y_M$$

Per quanto detto sulla proprietà dell'operatore *"j"*, quest'ultima forma binomia, riferentesi allo sfasamento di *+180°*, si può ottenere dalla precedente (con sfasamento di +90°) moltiplicandola per *"J"*. Infatti partendo da uno sfasamento di *90°* in anticipo, la moltiplicazione per *"j"* determina un ulteriore sfasamento di *+90°*.

Deve essere soddisfatta la seguente relazione:

$$j \cdot (jY_M) = -Y_M$$

Considerando l'operatore *"j"* come un operatore matematico si ha:

$$j^2 \cdot Y_M = -Y_M \quad \text{da cui :}$$

$$j^2 = -1 \qquad j = \sqrt{-1}$$

L'operatore *"j"* è l'immaginario puro e la forma binomia:

$$\dot{Y} = a + jb$$

è un numero complesso la cui parte reale rappresenta la componente sull'asse di riferimento del vettore rappresentativo della grandezza sinusoidale, il coefficiente dell'immaginario rappresenta l'altra componente dello stesso vettore sull'asse ortogonale.

Si dimostra che:

1- Alla somma di due grandezze sinusoidali della stessa frequenza vi corrisponde la somma dei loro vettori rappresentativi. La risultante dei vettori dà: con il modulo, il valore massimo della *grandezza sinusoidale somma* e, con l'inclinazione della risultante rispetto all'asse di riferimento, la fase della stessa grandezza. La frequenza della somma è la stessa delle singole componenti.

2- Alla somma di due grandezze sinusoidali vi corrisponde la somma dei loro numeri complessi rappresentativi.
Il modulo del numero complesso rappresenta il valore massimo della *grandezza sinusoidale somma,* l'anomalia del numero complesso rappresenta la fase. La frequenza della somma è la stessa delle singole componenti.

3- Al prodotto di una grandezza sinusoidale per un *numero* vi corrisponde il prodotto del vettore o del numero complesso rappresentativo per detto *numero.*

Esempio
Ricordiamo che gli angoli devono essere espressi in radianti. Per comodità sono riportati in gradi. Essi vanno moltiplicati per $\frac{\pi}{180}$

date le grandezze sinusoidali:

$y_1 = 40\,sen(\omega\,t + 120°)$ $\qquad$ $y_2 = 80\,sen(\omega\,t - 40°)$ $\qquad$ $y_2 = 20\,sen(\omega\,t + 240°)$

Si determini la somma:

$$y = 5 \cdot y_1 - 3 \cdot y_2 + y_3 \qquad (1)$$

per comodità le fasi sono poste in gradi: si è omessa la loro trasformazione in radianti
Si trasformi in numero complesso ciascuna grandezza sinusoidale:

$$y_1 = 40\,sen(\omega\,t + 120°) \Rightarrow \begin{cases} a = 40\cos 120 = -20 \\ b = 40\,sen\,120 = 34.64 \end{cases} \Rightarrow \quad \dot{Y}_1 = -20 + j34.64$$

$$y_2 = 80\,sen(\omega\,t - 40°) \Rightarrow \begin{cases} a = 80\cos(-40) = 61.3 \\ b = 80\,sen(-40) = -51.42 \end{cases} \Rightarrow \quad \dot{Y}_2 = 51.3 - j51.42$$

$$y_2 = 20\,sen(\omega\,t + 240°) \Rightarrow \begin{cases} a = 20\cos 240 = -10 \\ b = 20\,sen\,240 = -17.32 \end{cases} \Rightarrow \quad \dot{Y} = -10 - j17.32$$

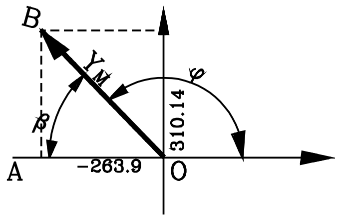
L'operazione (1) viene effettuato nel campo complesso:

$$\dot{Y} = 5 \cdot \left(-20 + j34.64\right) - 3(51.3 - j51.42) + (-10 - j17.32)$$

$$\dot{Y} = -263.9 + j310.14$$

Dal numero complesso si ricava la grandezza sinusoidale

fig.14.13



$$Y_M = \sqrt{263{,}9^2 + 310{,}14^2} = 407{,}22$$

$$tg\beta = \frac{310.14}{263.9} 1.1752 \qquad da\ cui \quad \beta = 49.6053°$$

$$\varphi = 180 - 49.6053 = 130.39°$$

La funzione sinusoidale y, risultante dalla somma è:

$$y = 407.22\,sen\left(\omega\,t + 130.39 \cdot \frac{\pi}{180}\right)$$

Dove l'angolo φ=130.39° è stato posto in radianti

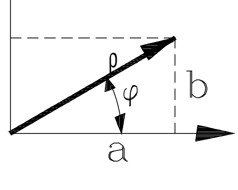
14.1.6 Alcune regole da ricordare

14.1.6.2 Forma trigonometrica di un numero complesso

Dato un numero complesso:

$$\dot{Z} = a + jb$$

fig.14.14



Ad esso viene associato il vettore di modulo ρ e anomalia φ.

$$con \quad \begin{cases} a = \rho\cos\varphi \\ b = \rho\, sen\varphi \end{cases}$$ per cui la forma binomia:

$$\dot{Z} = \rho\cos\varphi + j\rho\, sen\varphi$$

$$\dot{Z} = \rho\,(\cos\varphi + j sen\varphi)$$

Proprietà del prodotto e della divisione

Dati due numeri complessi:

$$\dot{Z}_1 = \rho_1\left(\cos\varphi_1 + j sen\varphi_1\right) \qquad \dot{Z}_2 = \rho_2\left(\cos\varphi_2 + j sen\varphi_2\right)$$

si dimostra che:

- *La moltiplicazione dei due numeri complessi è un numero complesso avente come modulo il prodotto dei moduli e come anomalia la somma delle anomalie:*

$$\dot{Z}_1 \cdot \dot{Z}_2 = \rho_1 \cdot \rho_2\left[\cos\left(\varphi_1 + \varphi_2\right) + j sen\left(\varphi_1 + \varphi_2\right)\right]$$

- *La divisione di due numeri complessi è un numero complesso avente come modulo il rapporto tra i moduli e come anomalia la differenza delle anomalie.*

$$\frac{\dot{Z}_1}{\dot{Z}_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\left[\cos\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) + j sen\left(\varphi_1 - \varphi_2\right)\right]$$

14.1.6.2 Casi particolari:

Si pone in evidenza che:

1- Un numero reale *K* è un numero complesso avente come modulo il numero *K*: $\rho=K$ e anomalia $\varphi=0$.

2- Il numero immaginario puro *"j"* è un numero complesso avente modulo $\rho=1$ e anomalia $\varphi=90°$.

Sia dato il numero complesso: $\dot{Z} = \rho\left(sen\varphi + j\cos\varphi\right)$ si ha:

a) $K \cdot \dot{Z} = K\rho\left(\cos\varphi + j sen\varphi\right)$ Moltiplicando un numero complesso $\dot{Z}$ per un numero reale *K* si ha numero complesso, con la stessa anomalia φ e con modulo, quello di $\dot{Z}$ moltiplicato per *K*.

b) $j \cdot \dot{Z} = 1 \cdot \rho\left[\cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) + j sen\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)\right]$ Moltiplicare un numero complesso $\dot{Z}$ per l'immaginario puro "j" corrisponde a sfasare di *90°* in anticipo l'anomalia di detto $\dot{Z}$. Nel prodotto il modulo rimane costante

c) $jK \cdot \dot{Z} = K \cdot \rho \left[cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2} \right) + jsen\left(\varphi + \frac{\pi}{2} \right) \right]$ Moltiplicando un numero complesso $\dot{Z}$ per jK, si ha un numero complesso con modulo $K\rho$ e anomalia $\varphi+90°$

14.2 Resistenza percorsa da corrente alternata

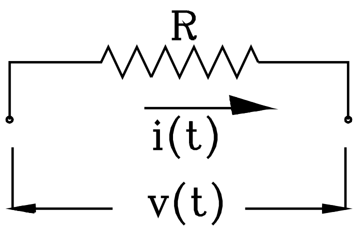
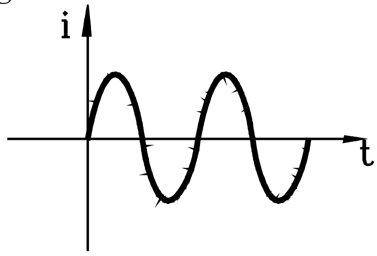
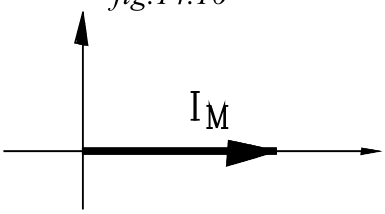


fig.14.15



Su di una resistenza R si invii una corrente sinusoidale in fase zero.

fig.14.16



$$i(t) = I_M \, sen(\omega t) \quad (14.2.1)$$

Il vettore rappresentativo della grandezza sinusoidale ha modulo I_M e $\varphi=0$

Il numero complesso che rappresenta la corrente coincide con I_M:

$$\dot{I} = I_M \quad (14.2.2)$$

In ogni istante ai capi della resistenza vi sarà una *d.d.p v(t)* data dalla legge di Ohm:

$$v(t) = R \cdot i(t)$$

$$v(t) = R \cdot I_M \, sen(\omega t)$$

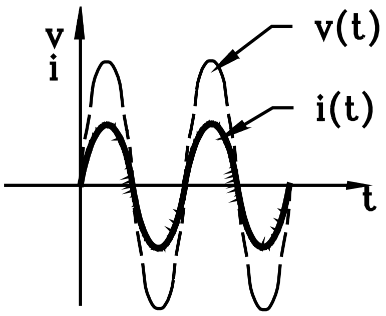
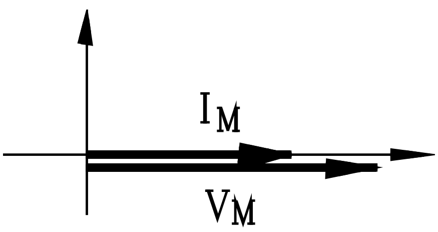


fig.14.17

La *d.d.p v(t)* è una funzione sinusoidale in fase con la corrente *i(t)* e avente come modulo quello della corrente stessa moltiplicato per la resistenza *R*.

fig.14.18



Il vettore che rappresenta la *v(t)* è parallelo a quello che della *i(t)* e ha come modulo $R \cdot I_M$.

Nel campo complesso ci si trova nelle condizioni particolari di cui al punto "a)" della pagina precedente.

Il numero complesso $\dot{V}$, che rappresenta la *d.d.p*, si ottiene moltiplicando per la resistenza R il numero complesso $\dot{I}$ che simboleggia la corrente.

$$\dot{V} = R \cdot \dot{I} \qquad (14.2.3)$$

14.3 Induttanza percorsa da corrente sinusoidale

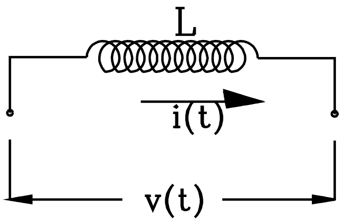
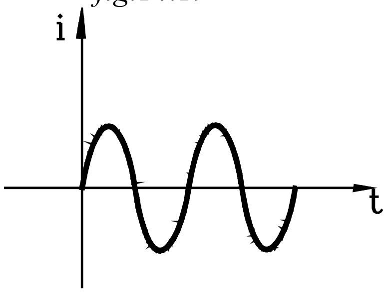


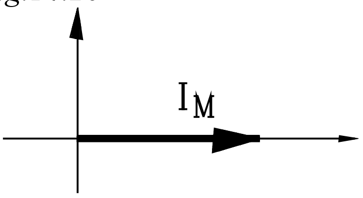
fig.14.19



Su di una induttanza "L" si invii una corrente sinusoidale in fase zero

$$i(t) = I_M \, sen(\omega t) \qquad (13.3.1)$$

fig.14.20



Il vettore rappresentativo della grandezza sinusoidale ha modulo I_M *e* $\varphi=0$

Il numero complesso che rappresenta la corrente coincide con I_M:

$$\dot{I} = I_M \qquad (13.3.2)$$

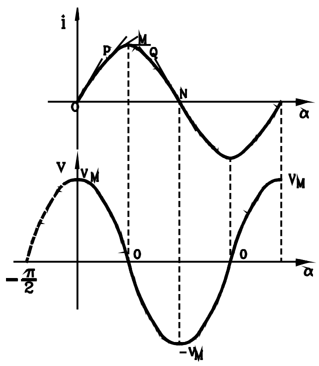
La corrente sinusoidale i(t) che scorre nell'induttanza "L" genera in questa un flusso concatenato che varia nel tempo. Per il fenomeno *dell'autoinduzione***,** si indurrà nell'induttanza una **f**orza **c**ontro **e**lettro **m**otrice "e", che si oppone alla variazione di corrente.

$$e = -L\frac{di}{dt}$$

Occorre porre agli estremi dell'induttanza *"L"* una tensione *"v*" che equilibri la *f.c.e.m "e"*. Per l'equilibrio si ha:

$$v = -e \qquad v = L\frac{di}{dt}$$

fig.14.21



Come si è spiegato precedentemente, data la funzione *i(t)*, si può determinare graficamente l'andamento della sua derivata $\frac{di}{dt}$, studiando come varia, al passare del tempo, l'inclinazione delle tangenti condotte alla curva che descrive la funzione.

Per comodità di trattazione, sull'asse delle ascisse della sinusoide in fase zero è stato riportato l'angolo $\alpha = \omega t$ proporzionale al tempo.

Partendo dall'origine O si considerino le tangenti alla curva al variare dell'angolo α *(e quindi al trascorrere del tempo t)*

Come si nota, nel punto O l'inclinazione è massima positiva e va decrescendo man mano che l'angolo si avvicina a *90°*. In questo (punto M sulla curva) l'inclinazione è nulla. Oltre il punto M l'inclinazione risulta negativa e raggiunge la massima inclinazione in senso negativo nel punto N.

Dall'andamento delle tangenti alla curva *i(t)* si può determinare quello della tensione v(t),proporzionale secondo la costante *"L"* alla derivata $\frac{di}{dt}$ della corrente

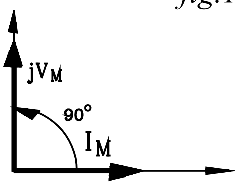
Dal grafico ottenuto si rileva che la tensione *v(t)* ai capi dell'induttanza è una sinusoide sfasata di *90°* in anticipo rispetto alla corrente *i(t)*

Si dimostra che il valore massimo *"V_M"* della tensione sinusoidale è proporzionale a "I_M" alla induttanza *"L"* secondo la costante di proporzionalità ω *(occorre effettuare la derivata della funzione* $i(t) = I_M\ sen(\omega t)$. *(Per la dimostrazione esauriente si rimanda al programma di matematica del prossimo anno scolastico)*

Si ha :

$$v(t) = \omega L \cdot I_M\, sen\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \qquad (14.3.3)$$

fig.14.22



Il vettore rappresentativo della funzione sinusoidale v(t) ha come modulo il prodotto del modulo "I_M" del vettore indicante la i(t) per ωL, e come fase quella della funzione i(t) aumentata di 90° in anticipo.

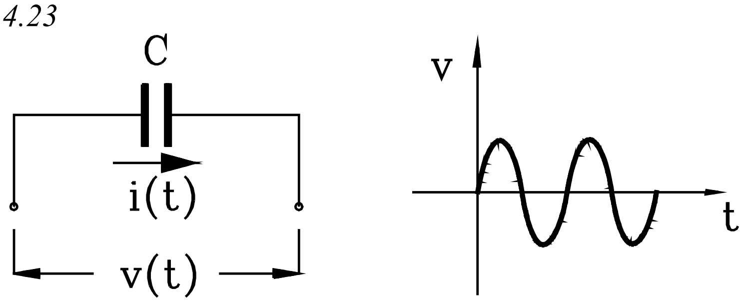
Valore massimo: (14.3.4)

Nel campo complesso, l'operazione di moltiplicare il modulo del vettore rappresentativo della *i(t)* per ωL e sfasarlo di *90°* in anticipo corrisponde a moltiplicare il numero complesso $\dot{I}$ per $j\omega L$. Si ha:

$$\dot{V} = j\omega L \dot{I} \qquad (14.3.5)$$

14.4 Capacità sottoposta ad una tensione sinusoidale

fig.14.23

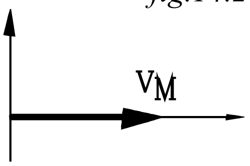


Si ponga una *d.d.p v(t)* sinusoidale ai capi della capacità *C*.

Le due armature della capacità, al passare del tempo, alternativamente, si caricheranno con cariche di segno opposto. Così considerando una armatura, questa si caricherà prima assumendo una carica positiva, quindi si scarica per caricarsi successivamente con una carica negativa delle stesso valore di quella positiva.

In questo alternarsi di carica e scarica del condensatore si ha, nel circuito collegato al condensatore, un passaggio di corrente alternata. Nell'interno del condensatore si alterna il senso del campo elettrico.

fig.14.24



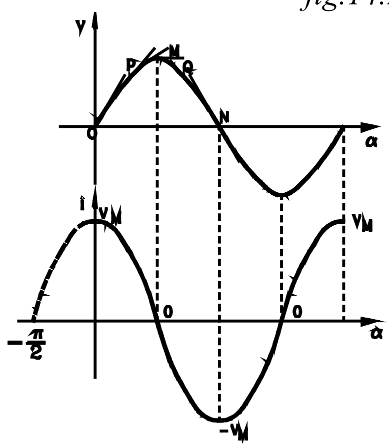
Per semplicità di trattazione si supponga che la v(t) sia una sinusoide in fase zero:

$$v(t) = V_M sen\omega t \qquad (14.4.1)$$

Il vettore rappresentativo della grandezza sinusoidale ha modulo V_M e $\varphi=0$. È un vettore sull'asse di riferimento.

La carica *q(t)* accumulata nel condensatore nell'istante *"t"* è:

fig.14.25



$$q(t) = C \cdot v(t) \qquad (14.4.2)$$

La corrente che istantaneamente scorre nel circuito:

$$i = \frac{dq}{dt} \quad \text{sostituendo la (14.4.2)}$$

occorre osservare he la variazione della carica *dq* è dovuta alla variazione della tensione *dv,* mentre la capacità è una costante.

Per cui rista:

$$dq = C \cdot dv$$

sostituendosi ha:

$$i = C\frac{dv}{dt} \qquad (14.4.3)$$

Per determinare la corrente *i(t)* occorre effettuare la derivata della tensione *v(t)* rispetto al tempo. Occorre risolvere lo stesso problema affrontato nel caso dell'induttanza ; solamente che, questa volta, si ha la sinusoide *v(t)* in fase zero e occorre determinare la *i(t)* proporzionale alla derivata di detta tensione *v(t).*

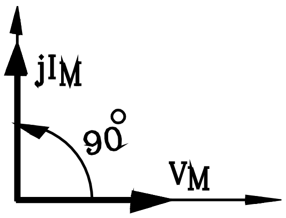
Si ripete lo stesso ragionamento fatto per il caso dell'induttanza: l'andamento della corrente *i(t)* si ottiene graficamente studiando come variano le inclinazioni delle tangenti alla curva *v(t).* Si otterrà, formalmente, lo stesso risultato:

> La corrente i(t) è una sinusoide sfasata di 90° in anticipo rispetto alla tensione v(t) posta ai capi del condensatore.

Si dimostra che il valore massimo *"I_M"* della corrente sinusoidale è proporzionale a *"V_M"*, alla capacità *"C"* secondo la costante di proporzionalità ω.

$$i(t) = \omega C \cdot V_M\, sen\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \qquad (14.4.4)$$

fig.14.26



Il vettore rappresentativo della funzione sinusoidale i(t) ha come modulo il prodotto del modulo "V_M" del vettore indicante la v(t) per ωC e come fase quella della funzione v(t) aumentata di 90° in anticipo.

$$I_M = \omega C \cdot V_M \quad (14.4.5)$$

Nel campo complesso, l'operazione di moltiplicare il modulo del vettore rappresentativo della *v(t)* per ωC e sfasarlo di *90°* in anticipo corrisponde a moltiplicare il numero complesso $\dot{V}$ per $j\omega C$.

Si ha:

$$\dot{I} = j\omega C\dot{V}$$

Ricavando la $\dot{V}$ si ha:

$$\dot{V} = \frac{1}{j\omega C} \cdot \dot{I}$$

ma

$$\frac{1}{j} = \frac{1}{j} \cdot \frac{j}{j} = \frac{j}{j^2} = \frac{j}{-1}$$

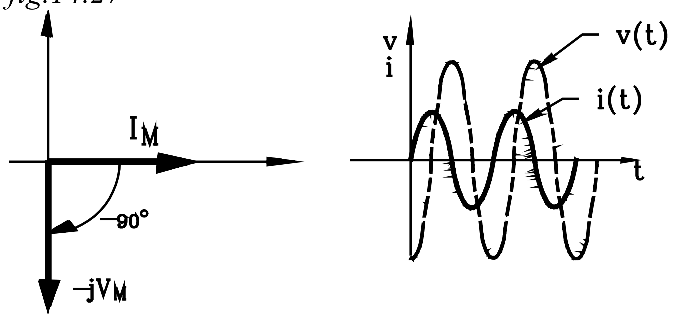
quindi

$$\frac{1}{j} = -j$$

e si può scrivere

$$\dot{V} = -j\frac{1}{\omega C} \cdot \dot{I} \quad (14.4.6)$$

fig.14.27



L'espressione *(8)* sta ad indicare che, preso come riferimento la corrente i(t), la tensione v(t) è una sinusoide sfasata 90° in ritardo rispetto a detta corrente

14.5Legge di Ohm nel campo complesso

14.5.1 Resistenza - Reattanza – Impedenza

Osservando le espressioni (14.2.3) (14.3.5) (14.4.6) si nota che, in ogni caso, nel campo complesso, la relazione tra la corrente $\dot{I}$ e la tensione $\dot{V}$ è del tipo:

$$\dot{V} = \dot{Z} \cdot \dot{I} \quad (14.5.1)$$

Dove $\dot{Z}$, in generale, è un numero complesso che viene denominato *impedenza*.

L'impedenza assume particolare espressione nei casi di resistenza, induttanza e capacità.
Riscrivendo le tre espressioni (14.2.3) (14.3.5) (14.4.6) si ha:

Resistenza "R"

La legge di Ohm nel campo complesso: $\dot{V} = R \cdot \dot{I}$

L'impedenza $\dot{Z}$: $\dot{Z} = R$

Induttanza "L"

La legge di Ohm nel campo complesso: $\dot{V} = j\omega L \dot{I}$

L'impedenza $\dot{Z}$, in questo caso è: $\dot{Z} = j\omega L$

Alla espressione ωL si da nome di *reattanza induttiva* e viene indicata con X_L : $\omega L = X_L$;

La legge di Ohm si può scrivere: $\dot{V} = jX_L \cdot \dot{I}$

Capacità "C"

La legge di Ohm nel campo complesso: $\dot{V} = -j\frac{1}{\omega C} \cdot \dot{I}$

L'impedenza $\dot{Z}$, in questo caso è: $\dot{Z} = -j\frac{1}{\omega C}$

Alla espressione $\frac{1}{\omega C}$ si da nome di *reattanza capacitiva* e viene indicata con X_C :

$\frac{1}{\omega C} = X_C$

La legge di Ohm si può scrivere: $\dot{V} = -jX_C \cdot \dot{I}$

14.5.2 Unità di misura dell'impedenza

L'impedenza, in modulo, è data dal rapporto tra il modulo della tensione e quello della corrente:

$$Z = \frac{V}{I} \qquad [Z] = \Omega$$

Così , le reattanze si misurano in Ω

$$[\omega L] = \frac{1}{s}\Omega\, s \qquad [\omega L] = \Omega$$

$$\left[\frac{1}{\omega C}\right] = \frac{1}{\frac{1}{s}\frac{C}{V}} = \frac{V}{\frac{C}{s}} = \frac{V}{A} = \Omega$$

14.6 Soluzione di circuiti in corrente alternata

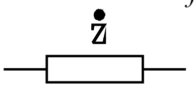
Nel campo complesso la relazione che lega la tensione alla corrente è del tipo:

$$\dot{V} = \dot{Z} \cdot \dot{I} \qquad (14.6.1)$$

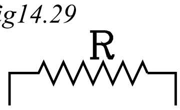
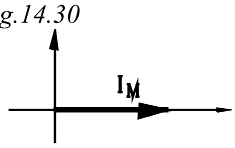
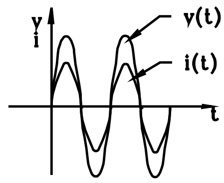
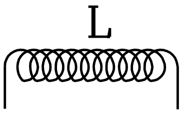
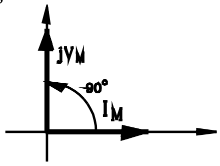
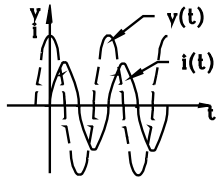
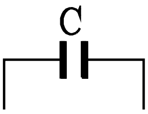
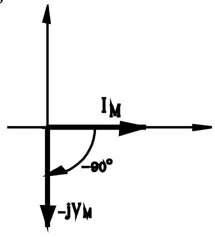
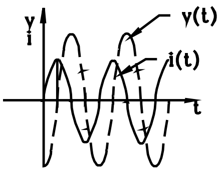
formalmente analoga a quella che si ha in corrente continua. Si possono così estendere ai circuiti in corrente alternata, nel campo complesso, tutte le leggi che regolano i circuiti in corrente continua.

L'impedenza, in generale si indica con un rettangolino:

fig.14.28

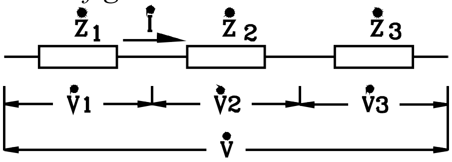


Valgono per le impedenze le stesse proprietà che regolano le resistenze, temendo conto delle proprietà riassunte nella tabella

Componente	Legge di Ohm	Impedenza	Diagramma vettoriale	Confronto fra le due sinusoidi i(t), v(t)
Resistenza *fig14.29* 	$\dot{V} = R \cdot \dot{I}$	$\dot{Z} = R$	*fig.14.30* 	*fig14.31*  $i(t) = I_M sen\omega t$ $v(t) = RI_M sen\,\omega t$
Induttanza *fig14.32* 	$\dot{V} = jX_L \cdot \dot{I}$	$\dot{Z} = jX_L$ $X_L = \omega L$ Reattanza induttiva	*fig.14.33* 	*fig.14.34*  $i(t) = I_M sen\omega t$ $v(t) = \omega LI_M\, sen\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$
Capacità *fig.14.35* 	$\dot{V} = -jX_C \cdot \dot{I}$	$\dot{Z} = -jX_C$ $X_C = \frac{1}{\omega C}$ Reattanza capacitiva	*fig.14.36* 	*fig.14.37*  $i(t) = I_M sen\omega t$ $v(t) = \frac{1}{\omega C} I_M\, sen\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$

14.6.1 Impedenze in serie

fig.14.38



Si ha:

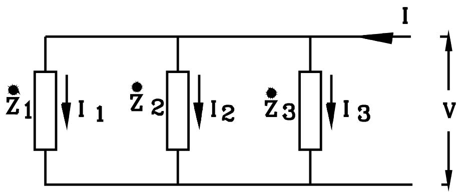
$$\dot{I}_1 = \dot{I}_2 = \dot{I}_3 = \cdots$$

$$\dot{V} = \dot{V}_1 + \dot{V}_2 + \dot{V}_3 + \cdots$$

$$\dot{Z} = \dot{Z}_1 + \dot{Z}_2 + \dot{Z}_3 + \cdots$$

14.6.2 Impedenze in parallelo

fig.14.39



Si ha:

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3 = \cdots$$

$$\dot{V} = \dot{V}_1 = \dot{V}_2 = \dot{V}_3 = \cdots$$

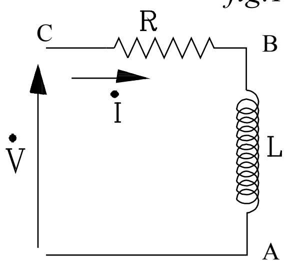
$$\dot{Z} = \frac{1}{\frac{1}{\dot{Z}_1} + \frac{1}{\dot{Z}_2} + \frac{1}{\dot{Z}_3} + \cdots}$$

Valgono formalmente le leggi di Kirchhoff il metodo di Thevénin ecc. nel campo complesso

Alcuni casi particolari

14.6.3 Circuito Ohmico induttivo

fig.14.40



Nel circuito di figura viene inviata una corrente:

$$i(t) = I_M sen\omega t$$

Il vettore rappresentativo della grandezza sinusoidale è sull'asse di riferimento con modulo uguale a I_M e $\varphi=0$.

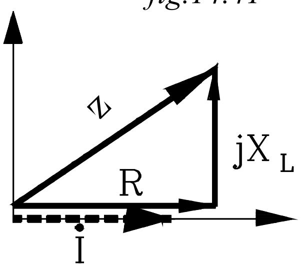
Il numero complesso coincide con il modulo del vettore:

$$\dot{I} = I_M$$

Impedenza $\dot{Z}$ è data da:

$$\dot{Z} = R + J\omega L = R + JX_L \quad (14.6.3.1)$$

fig.14.41



L'impedenza $\dot{Z}$ risulta un numero complesso la cui parte reale è la resistenza R , il coefficiente dell'immaginario è la reattanza induttiva, che risulta in anticipo di *90°* rispetto a *R*.

Applicando la legge di Ohm si va :

$$\dot{V} = \dot{Z} \cdot \dot{I} \quad (14.6.3.2)$$

$$\dot{V} = \left(R + JX_L \right) I_M = RI_M + JX_L I_M \quad (14.6.3.3)$$

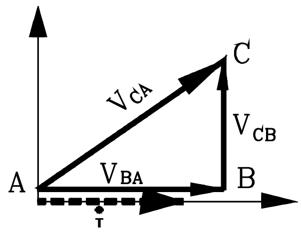
Il prodotto RI_M rappresenta la tensione ai capi della resistenza:

$$V_{CB} = RI_M$$

Il prodotto $X_L I_M$ rappresenta la tensione ai capi della reattanza induttiva:

$$V_{BA} = X_L I_M$$

fig.14.42



La *d.d.p* $V=V_{CA}$ si presenta come un vettore avente come componente in fase con la corrente la tensione RI_M ai capi della resistenza e come componente a 90° in anticipo rispetto alla stessa corrente la tensione $X_L I_M$ ai capi dell'induttanza

$$\dot{V} = \dot{V}_{CA} = V_{CB} + jV_{BA}$$

Si può ora determinare il modulo e la fase della tensione v(t) sinusoidale.
Dalla (14.6.3.3) si ha:

$$V_M = \sqrt{\left(RI_M\right)^2 + \left(\omega LI_M\right)^2} = \sqrt{\left(RI_M\right)^2 + \left(X_L I_M\right)^2}$$

$$V_M = I_M \sqrt{R^2 + X_L{}^2} \qquad (14.6.3.4)$$

La fase della tensione v(t) sarà:

$$tg\varphi = \frac{X_L I_M}{RI_M} = \frac{X_L}{R} \qquad (14.6.3.5)$$

Il modulo e la fase della tensione v(t) si può ricavare direttamente dalla espressione:

In una impedenza Ohmica induttiva la tensione risulta sfasata in anticipo dell'angolo $\varphi = arctg\dfrac{X_L}{R}$ rispetto alla corrente.

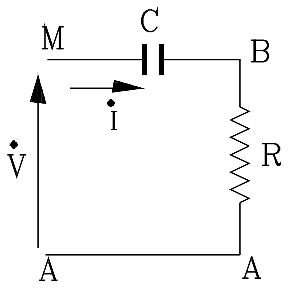
La tensione v(t) è data dalla sinusoide.

$$v(t) = V_M\, sen\left(\omega t + \varphi\right)$$

Con V_M e φ date dalle espressioni sopra determinate

14.6.4 Circuito ohmico capacitivo

fig14.43



Si procede alla stesa maniera del caso precedente.
Si ponga in fase zero la corrente i(t):

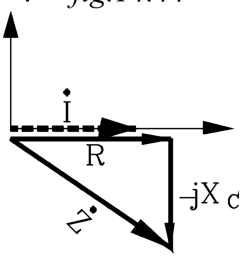
$$i(t)= I_M sen\omega t$$

Il vettore rappresentativo della grandezza sinusoidale è sull'asse di riferimento con modulo uguale a I_M e φ=0.

Il numero complesso coincide con il modulo del vettore

$$\dot{I} = I_M$$

. *fig.14.44*



L'impedenza $\dot{Z}$ è:

$$\dot{Z} = R - J\frac{1}{\omega C} = R - JX_C \quad (14.6.4.1)$$

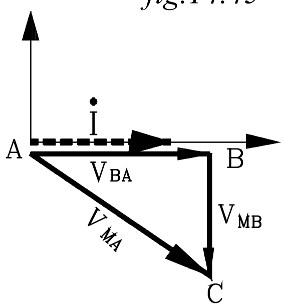
L'impedenza $\dot{Z}$ è l'ipotenusa del triangolo rettangolo avente il cateto *R* sull'asse di riferimento e l'altro cateto $X_C = \frac{1}{\omega C}$ posto a *-90°* rispetto al primo.

La legge di Ohm si scrive nella forma:

$$\dot{V} = \dot{Z} \cdot \dot{I}$$

$$\dot{V} = \left(R + jX_c \right) I_M = RI_M + jX_c I_M \quad (14.6.4.2)$$

fig.14.45



La *d.d.p* $V = V_{MA}$ si presenta come un vettore avente come componente in fase con la corrente la tensione RI_M ai capi della resistenza e come componente a 90° in ritardo rispetto alla stessa corrente la tensione $X_C I_M$ ai capi della capacità

$$\dot{V} = \dot{V}_{MA} = V_{BA} - jV_{MB}$$

Si può ora determinare il modulo e la fase della tensione v(t) sinusoidale.
Dalla (14.6.4.2) si ha:

$$V_M = \sqrt{\left(RI_M \right)^2 + \left(X_c I_M \right)^2}$$

$$V_M = I_M \sqrt{R^2 + X_c^2} \quad (14.6.4.3)$$

La fase della tensione v(t) sarà:

$$tg\varphi = -\frac{X_c I_M}{RI_M} = -\frac{X_c}{R} \quad (14.6.4.4)$$

> In una impedenza Ohmica capacitiva la tensione risulta sfasata in ritardo dell'angolo $\varphi = arctg\left(-\frac{X_C}{R} \right)$ rispetto alla corrente.

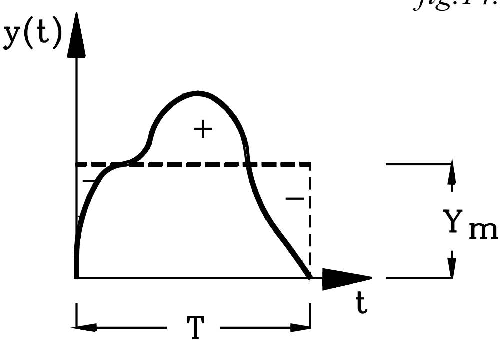
La tensione v(t) è data dalla sinusoide .

$$v(t) = V_M \, sen\left(\omega t - \varphi \right)$$

Con V_M e φ date dalle espressioni sopra determinate.

14.7Valore medio di una funzione.

fig.14.46

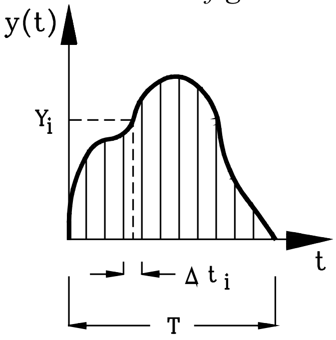


Si data una funzione del tempo y(t) il cui grafico sia quello rappresentato in fig.

Il *valore medio* della funzione nel tempo *T* è quel valore costante Y_m che racchiude, tra esso e l'asse dei tempi, nel tempo anzi detto, un'area uguale a quella che si ha tra il grafico della funzione e l'asse delle ascisse nello stesso tempo *T*.

In pratica, per determinare il valore medio della funzione si calcola prima l'area racchiusa tra il grafico della funzione e l'asse delle ascisse nel tempo T.

fig.14.47



Si divide come al solito la figura in tante piccole strisce di base Δt_i e altezza Y_i e si effettua la somma:

$$Area = Y_1 \cdot \Delta t_1 + Y_1 \cdot \Delta t_1 + Y_1 \cdot \Delta t_1 + \cdots = \sum Y_i \cdot \Delta t_i$$

Se la suddivisione è in intervalli di tempo dt infinitesimi, l'area si può scrivere nella forma:

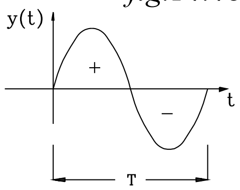
$$Area = \int_0^T y \cdot dt \quad (14.7.1)$$

Il valore medio si ottiene uguagliando l'area così determinata con quella del rettangolo di base "T" e altezza "Y_M":

$$Area = T \cdot Y_m = \int_0^T y \cdot dt \quad \text{da cui:}$$

$$Y_m = \frac{1}{T}\int_0^T y \cdot dt \quad (14.7.2)$$

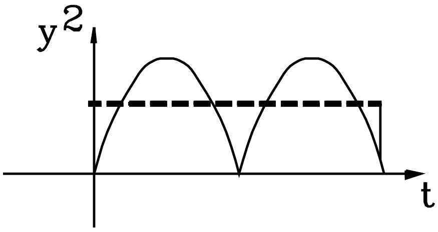
fig.14.48



Il valore medio di una sinusoide, calcolato nel periodo "T" è nullo, in quanto nel tempo considerato si, hanno due aeree uguali e di segno opposto la cui somma è nulla.

14.8 Valore efficace di una grandezza sinusoidale

fig.14.49



Se si eleva al quadrato la grandezza sinusoidale, tutte le ordinate y^2 ottenute sono positive (anche quelle che originariamente erano negative). In tal modo si può determinare il valore medio del quadrato della grandezza nel periodo "T":

$$\frac{1}{T}\int_0^T y^2 \cdot dt$$

Il valore efficace è la radice quadra della media dei quadrati effettuata nel periodo "T".

Indicando con "Y" il valore efficace, per definizione è:

$$Y = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T y^2 \cdot dt} \quad (14.8.1)$$

Si dimostra che il valore efficace Y di una grandezza sinusoidale è dato da :

$$Y = \frac{Y_M}{\sqrt{2}} \quad (14.8.2)$$

I valori efficaci delle grandezze sinusoidali hanno notevole importanza nelle misure che vengono effettuate nelle correnti alternate.

Gli strumenti elettrodinamici, come si vedrà in seguito, misurano i valori efficaci delle grandezze sinusoidali: di correnti o tensioni; inoltre i valori di queste entrano in gioco nella determinazione della potenza.

Nello studio delle correnti alternate si fa riferimento non ai valori massimi ma ai valori efficaci delle grandezze.

Le relazioni che intercorrono tra i valori efficaci sono le stesse che si hanno tra i valori massimi:

La legge di Ohm:

$$\dot{V} = \dot{Z} \cdot \dot{I}$$

Conduce alla relazione tra i valori massimi:

$$V_M = Z \cdot I_M$$

Dividendo ambo i membri per $\sqrt{2}$ si ottiene

$$\frac{V_M}{\sqrt{2}} = Z \cdot \frac{I_M}{\sqrt{2}} \quad \textit{poniamo} \begin{cases} \dfrac{V_M}{\sqrt{2}} = V & \textit{valore efficace della tensione} \\ \dfrac{I_M}{\sqrt{2}} = I & \textit{valore efficace della corrente} \end{cases}$$

$$V = Z \cdot I \quad (14.8.3)$$

Nei problemi di circuiti in corrente alternata si introdurranno i valori efficaci e le fasi delle grandezze note e si otterranno, come soluzioni, i valori efficaci e le fasi di grandezze incognite.

14.9Rappresentazione esponenziale di un numero complesso

Da quanto detto risulta conveniente poter esprimere un numero complesso con una rappresentazione ove compaia il modulo e la fase di esso.

Si dimostra che dato un numero complesso:

$$\dot{Z} = a + jb \quad con \begin{cases} modulo & \rho = \sqrt{a^2 + b^2} \\ anomalia & \alpha = arctg\dfrac{b}{a} \end{cases}$$

esso si può esprimere nella forma esponenziale:

$$\dot{Z} = \rho \cdot e^{j\alpha} \quad (14.9.1)$$

Dove "e" è la base dei logaritmi neperiani

Questa rappresentazione simbolica pone in evidenza il modulo e l'anomalia del numero complesso; se questo si riferisce ad una grandezza elettrica sinusoidale, il modulo ne dà il valore efficace e l'anomalia la fase.

Si supponga che la tensione sinusoidale v(t) sia:

$$v = 50\, sen\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right)$$

Dove 50 è il valore massimo della tensione V_M=50 e la fase φ è: φ=30°

Il valore efficace è:

$$V = \frac{V_M}{\sqrt{2}} = \frac{50}{\sqrt{2}} = 35.35$$

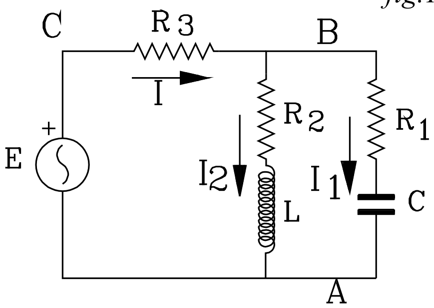
La forma simbolica associata alla grandezza sinusoidale è:

In forma esponenziale $\dot{V} = 35.35 \cdot e^{j30°}$

In forma binomia $\dot{V} = 35.35 cos30 + j35.35 sen30 = 30.6 + j17.67$

Esempio

fig.14.50



$R_1 = 4\ \Omega$

$R_2 = 2\ \Omega$

$R_3 = 5\ \Omega$

$L = 20\ mH$

$C = 400\ \mu F$

$E = 100\ V$ valore efficace

*Nel circuito di figura il valore efficace della **f.e.m** E=110 V. Determinare le correnti in ogni singolo ramo e le tensioni ai capi di esso*

Si indichi con :

$\dot{Z}_1$ *l'impedenza del ramo ove scorre la corrente* $\dot{I}_1$

$\dot{Z}_2$ *l'impedenza del ramo ove scorre la corrente* $\dot{I}_2$

$\dot{Z}_3$ *l'impedenza del ramo ove scorre la corrente* $\dot{I}_3$

$$\dot{Z}_1 \begin{cases} Resistenza\ \ R = 4\ \Omega \\ Reattanza\ \ X_C = \dfrac{1}{\omega C} = \dfrac{1}{314 \cdot 400 \cdot 10^{-6}} = 7.96\Omega \end{cases}$$

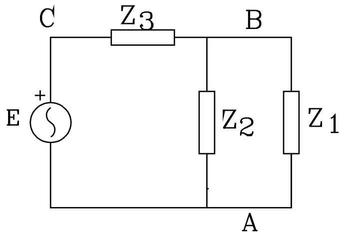
$$\dot{Z}_1 = 4 - j7.96 \qquad \begin{cases} mod\,ulo\ \sqrt{4^2 + 7.96^2} = 8.9\,\Omega \\ an\,om\,alia\ \ \varphi = arctg\dfrac{-7.9}{4} = -63.3^\circ \end{cases} \qquad \dot{Z}_1 = 8{,}9 \cdot e^{-j63.3}$$

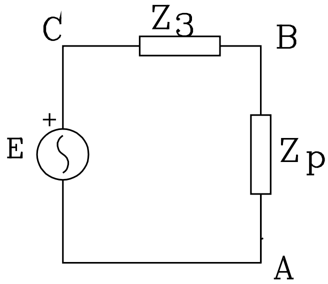
$$\dot{Z}_2 \begin{cases} Resistenza\ \ R = 2\ \Omega \\ Reattanza\ \ X_L = \omega L = 314 \cdot 20 \cdot 10^{-3} = 6.28\Omega \end{cases}$$

$$\dot{Z}_2 = 2 + j6.28 \qquad \begin{cases} modulo\ \sqrt{2^2 + 6.28^2} = 6.59\,W \\ anomalia\ \ j = arctg\dfrac{-7.9}{4} = 72.93^\circ \end{cases} \qquad \dot{Z}_2 = 6.59 \cdot e^{j72.93}$$

$$\dot{Z}_3 = 5 \qquad \dot{Z}_3 = 5 \cdot e^{j0}$$

fig.14.51





Si effettui il parallelo tra $\dot{Z}_1$ *e* $\dot{Z}_2$:

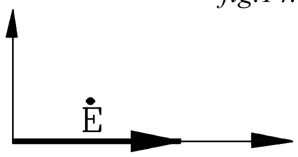
$$\dot{Z}_p = \frac{\dot{Z}_1 \cdot \dot{Z}_2}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2} = \frac{(4 - j7.94) \cdot (2 + j6.28)}{(4 - j7.94) + (2 + j6.28)} = 8.57 + j3.93 \qquad \dot{Z}_p = 9.42 \cdot e^{j24.65^\circ}$$

L'impedenza totale è:

$$\dot{Z}_t = \dot{Z}_p + \dot{Z}_3 = (8.57 + 3.93) + 5 = 13.57 + j3.93 \qquad \dot{Z}_t = 14.13 \cdot e^{j16.15^\circ}$$

Si può ora applicare la legge di Ohm:
*La **f.e.m** del generatore, che ha valore efficace E=100 V, si ponga in fase zero*

fig.14.52



La forma binomia che rappresenta la ***f.e.m** coincide con il valore efficace*

$$\dot{E} = 100$$

$$\dot{E} = \dot{Z}_t \cdot \dot{I} \qquad \text{da cui:}$$

$$\dot{I} = \frac{\dot{E}}{\dot{Z}_t} \qquad \text{sostituendo:}$$

$$\dot{I} = \frac{100}{13.57 + j3.93} = 6.79 - j1.96 \begin{cases} \text{valore efficace } \sqrt{6.79^2 + 1.96^2} = 7.077 \ A \\ \text{fase} \quad \varphi = arctg\dfrac{1.96}{6.79} = -16.15^\circ \end{cases}$$

$$\dot{I} = 7.077 \cdot e^{-j16.15^\circ}$$

*Più semplicemente si può ottenere il modulo e la fase della corrente applicando le regole della divisione e prodotto di numeri complessi. Ricordiamo che la divisione di due numeri complessi ha come modulo **il rapporto** tra i due moduli e come fase la **differenza** delle fasi.*
Si può così direttamente ottenere:

Valore efficace della corrente (modulo di $\dot{I}$) $\quad I = \dfrac{\text{modulo } \dot{E}}{\text{mod ulo } \dot{I}} = \dfrac{100}{14.13} = 7.077 \ A$

Fase della corrente = $(\text{fase tensione}) - \left(\text{anomalia } \dot{Z}_t\right) = \varphi_E - \varphi_{Z_t} = 0 - 16.15 = -16.15^\circ$

Nella forma esponenziale ciò risulta evidente:
la f.e.m E in fase $\varphi = 0$ è rappresentata in forma esponenziale:

$$\dot{E} = E \cdot \rho^{J \cdot 0}$$

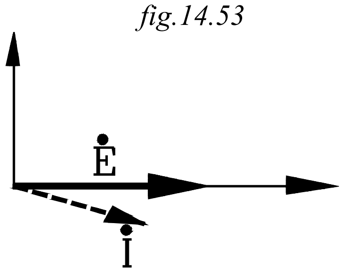
l'operazione $\quad \dot{I} = \dfrac{\dot{E}}{\dot{Z}_t} \quad$ *si traduce in:*

$$\dot{I} = \frac{100}{4,13 \cdot e^{j16.15}}$$

$$\dot{I} = 7.077 \cdot e^{-j16.15} \qquad \begin{cases} I = 7.077 A \\ \varphi = -16.15^\circ \end{cases}$$

----

fig.14.53



Si consideri ora la maglia ABC formata dalla due impedenze $\dot{Z}_p$, $\dot{Z}_3$ *e dalla f.e.m E si ha :*

$$\dot{V}_{CB} = \dot{Z}_3 \cdot \dot{I}$$

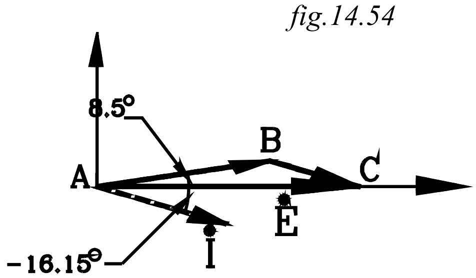
$$\dot{V}_{BA} = \dot{Z}_p \cdot \dot{I}$$

Si determini il modulo e la fase delle grandezze:

$$V_{CB} = 5 \cdot 7.077 = 35.39\,V \qquad \varphi_{CB} = \varphi_{Z_3} + \varphi_I = 0 - 16.15 = -16.15°$$

$$V_{BA} = 9.42 \cdot 7.077 = 66.67\,V \qquad \varphi_{BA} = \varphi_{Z_p} + \varphi_I = 0 - 16.15 = 24.65 - 16.15° = 8.5°$$

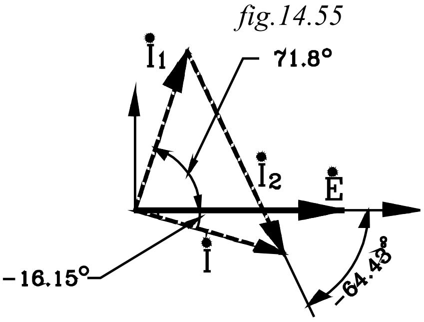
fig.14.54



Per l'equilibrio della maglia il vettore $\vec{E}$ *deve risultare la somma dei due vettori* $\vec{V}_{CB}$, $\vec{V}_{BA}$

$$\vec{E} = \vec{V}_{CB} + \vec{V}_{BA}$$

fig.14.55



Conoscendo la ***d.d.p*** $\vec{V}_{BA}$ ***si*** *possono determinare le correnti* $\dot{I}_1$, $\dot{I}_2$ *che scorrono rispettivamente sulle impedenze* $\dot{Z}_1$, $\dot{Z}_2$. *Determiniamo direttamente i moduli e le fasi.*

$$I_1 = \frac{V_{BA}}{Z_1} = \frac{66.67}{8.9} = 7.49A \quad \varphi_{I_1} = \varphi_{BA} - \varphi_{Z_1} = 8.5 - (-63.3) = 71.8°$$

$$I_2 = \frac{V_{BA}}{Z_2} = \frac{66.67}{6.59} = 66.67\,A \qquad \varphi_{I_2} = \varphi_{BA} - \varphi_{Z_2} = 8.5 - (72.93) = -64.43°$$

Avanti... Clic per continuare

Indietro... clic per precedente

Indietro... Clic per la pagina iniziale