

[Clic per tutti gli appunti](#) (AUTOMAZIONE – TRATTAMENTI TERMICI ACCIAIO – SCIENZA delle COSTRUZIONI...)



[e-mail per suggerimenti](#)

OLEODINAMICA PROPORZIONALE

5. Generalità

L'oleodinamica proporzionale si prefigge di ottenere una forza o una posizione proporzionale ad un segnale di ingresso di tipo elettrico.

Il segnale di ingresso, diversamente dal tipo *ON/OFF*, varia con continuità entro un campo limitato superiormente e inferiormente, assumendo tutti i valori intermedi.

Un segnale elettrico di corrente continuo (nei limiti della risoluzione) deve tramutarsi in un segnale oleodinamico proporzionale ed avere in uscita o una pressione o una corsa proporzionale al segnale di ingresso.

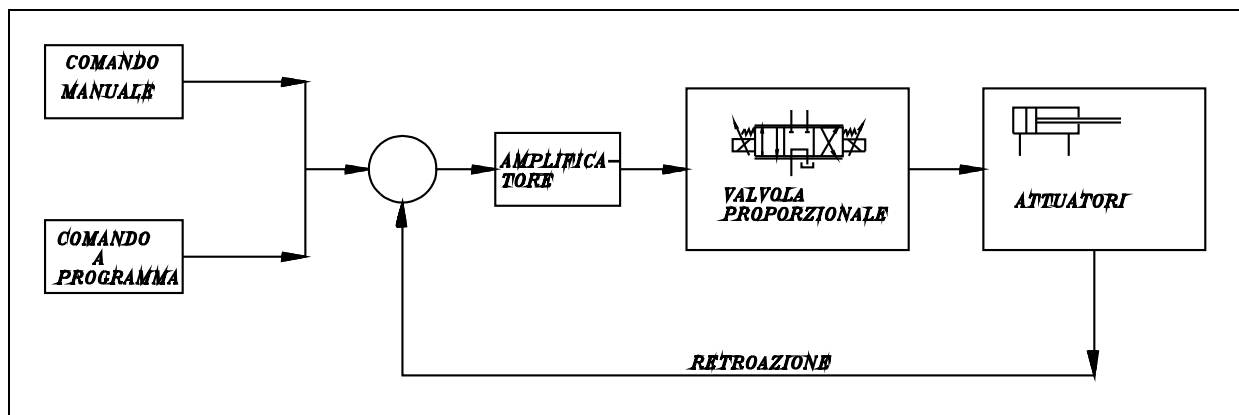
In tal modo è possibile avere un cilindro il cui stelo assuma non solamente due posizioni estreme ma una qualsiasi posizione entro la corsa.

La trasformazione del segnale continuo di corrente di pilotaggio in segnale oleodinamico proporzionale si ottiene con un particolare magnete detto magnete proporzionale.

Con il magnete proporzionale si possono ottenere regolazioni che agiscono sulla pressione delle valvole limitatrici di pressione, sul flusso delle valvole regolatrici di flusso o sulla corsa delle elettrovalvole distributrici monostabili o bistabili.

Un impianto tipo semplificato può essere descritto dal seguente schema a blocchi.

fig.5.1



Il sistema può essere controllato con una catena chiusa di retroazione.

Nel blocco differenziale può entrare o il comando manuale o i comandi a programma, provenienti o da un *PLC* o da un *circuito cablato*.

All'uscita degli attuatori può essere elaborato un segnale di retroazione che viene inviato al blocco differenziale, nel quale, attraverso il confronto con il segnale di comando in ingresso, determina il segnale di errore che va al pilotaggio della valvola proporzionale. Questa produce il segnale di potenza oleodinamico proporzionale all'errore che comanda gli attuatori.

In tal modo l'attuatore produce in uscita un segnale (*pressione, spostamento*) proporzionale a quello di ingresso e la cui precisione è affidata alla catena di retroazione

5.2 LA TECNICA PROPORZIONALE

5.2.1 Magnete proporzionale

I magneti tradizionali *ON/OFF* agiscono su un nucleo magnetico per effetto di un segnale di corrente.

A riposo, in assenza di corrente nella bobina, il nucleo, spinto da una molla, si posiziona ad una estremità della corsa: posizione *S1*.

fig.5.2

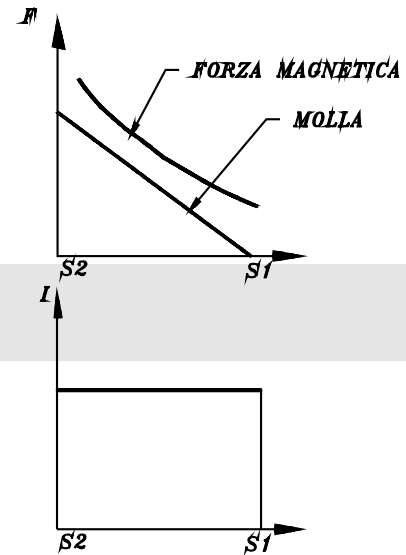
Quando si invia corrente nella bobina, il nucleo viene risucchiato verso il centro della bobina stessa che effettua tutta la corsa di lavoro, posizionandosi all'estremità *S2* opposta a quella che aveva a riposo.

Ciò avviene perché la spinta sul nucleo, per tutta la corsa, è superiore a quella della molla.

Durante la corsa non si ha mai l'equilibrio tra forza magnetica F_{ma} e spinta della molla F_{mo} : $F_{ma} > F_{mo}$

La corrente inviata alla bobina è costante in tutta la corsa del nucleo. Nel diagramma corsa corrente si è posta a destra la posizione iniziale *S1* e a sinistra quella finale *S2*.

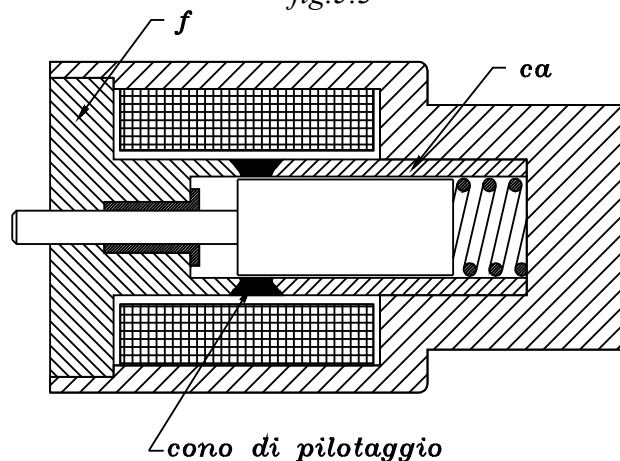
Il magnete proporzionale agisce in maniera diversa da quello *ON/OFF*.



Occorre che vi sia una proporzionalità tra corrente inviata e corsa effettuata dal nucleo.

Attraverso la deformazione di una molla la corsa proporzionale alla corrente di ingresso potrà trasformarsi in una forza proporzionale alla corrente di ingresso.

fig.5.3



Tutto ciò è possibile con l'impiego del *magnete proporzionale*, per la sua curva caratteristica della forza magnetica in funzione dello spostamento.

Il funzionamento del magnete proporzionale si basa sul particolare andamento che le linee di flusso assumono in una zona della corsa del nucleo, dovuto ad un cono costituito da *materiale non magnetizzabile, detto cono di pilotaggio*.

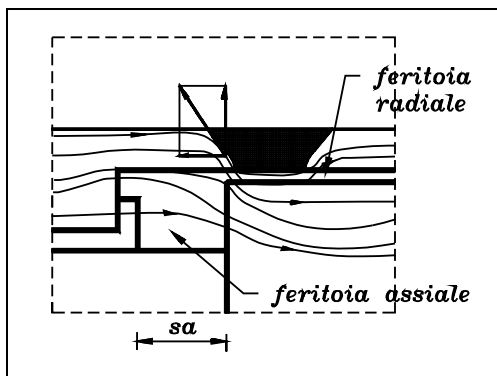
Come si può notare dalla *fig.5.3*, il nucleo, trattenuto dalla molla *m*, viene spinto dal flusso verso il centro della bobina alla quale viene inviato il segnale di corrente.

Tra la flangia "*f*" e il canotto "*ca*" viene posto il cono di pilotaggio costituito da materiale antimagnetico.

Occorre considerare due feritoie (*traferri*) fondamentali nelle quali si svolge il flusso magnetico che, dalla bobina, attraverso una parte della flangia e del canotto, si porta verso il nucleo.

Vi è una feritoia, detta "*feritoia assiale*", che si svolge tra la battuta interna della flangia e la testata del nucleo. Un'altra feritoia da considerare è quella che si svolge tra la superficie cilindrica esterna del nucleo e la superficie interna del canotto, detta "*feritoia radiale*".

fig.5.4



Si consideri in dettaglio l'andamento del flusso che si svolge tra la testata della flangia, il cono di pilotaggio, il canotto e il nucleo.

Si distinguono due tipi di flusso: *un flusso assiale*, che si svolge nella feritoia assiale e *un flusso radiale*, che si svolge nella feritoia radiale.

Il flusso assiale, determina una forza di richiamo del nucleo che sarà tanto più elevata quanto minore è il percorso in aria *Sa*. Ne viene, che la forza è minima nella posizione di riposo *S1* e aumenta man

mano che il nucleo si sposta e si avvicina alla battuta, in quanto diminuisce il percorso in aria del flusso.

Il flusso radiale si svolge tra la superficie cilindrica interna, entro la quale scorre il nucleo e la superficie cilindrica esterna di questo.

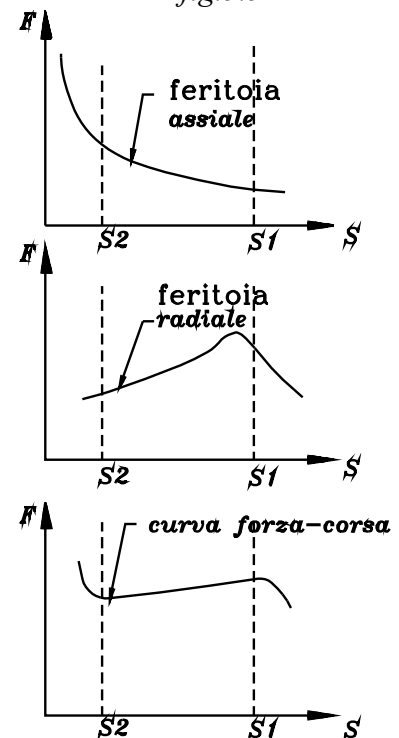
Questo flusso ha un *andamento radiale*, quando il nucleo è tutto rientrato a sinistra a battuta sulla testata del cilindro. Quando, invece, il nucleo è nella posizione di figura *fig.5.4*, spostato oltre il cono di pilotaggio, questo deflette il flusso, determinando una componente assiale che risucchia il nucleo stesso verso la testata del cilindro.

In prossimità della testata del nucleo il flusso radiale, deflesso dal cono di pilotaggio, è obliquo.

La forza sul nucleo si può decomporre in una componente assiale e in una radiale.

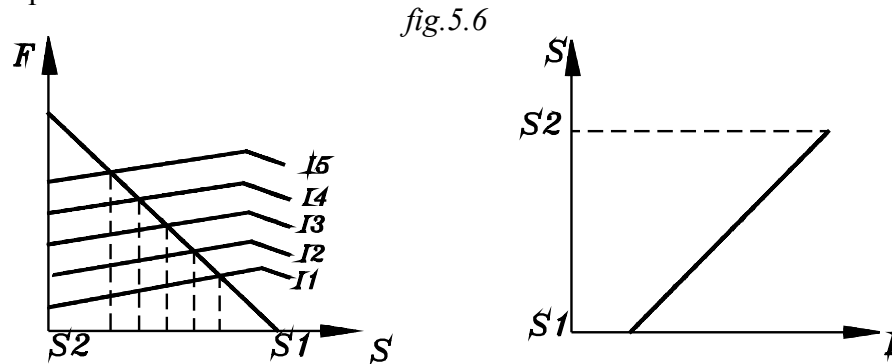
La forza utile è quella assiale, che diminuisce man mano che il nucleo si avvicina alla battuta: aumenta la componente radiale e diminuisce quella assiale, che agisce sulla testata sinistra del nucleo.

fig.5.5



Effettuando la sovrapposizione degli effetti si ha un andamento della forza sul nucleo del magnete che risulta pressoché costante durante la sua corsa, a parità della corrente di alimentazione della bobina.

Per ogni corrente inviata alla bobina del magnete vi sarà una curva caratteristica della forza in funzione dello spostamento.



Si può tracciare una famiglia di curve $F(s)$, parametrata rispetto alla corrente di alimentazione della bobina.

Riportiamo sullo stesso diagramma l'andamento della forza della molla rispetto alla posizione del nucleo ($S1$ è la posizione iniziale $S2$ quella finale).

Come si nota dal diagramma per ogni corrente inviata alla bobina la curva della forza magnetica incontra quella della tensione della molla.

Per ogni corrente inviata alla bobina si ottiene una corrispondente posizione del nucleo, nella quale si ha l'equilibrio tra forza magnetica F_{ma} e forza della molla F_{mo} :

$$F_{ma} = F_{mo}$$

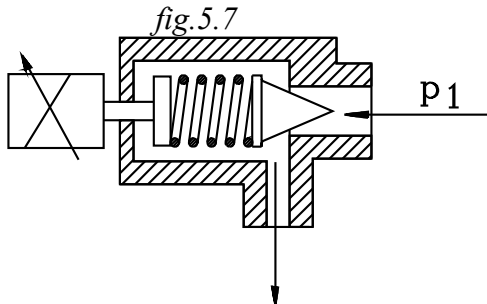
Vi è quindi una corrispondenza biunivoca tra corrente inviata alla bobina e posizione del nucleo del magnete proporzionale.

Si può tracciare un diagramma che mette in corrispondenza la posizione del nucleo in funzione della corrente di alimentazione della bobina: l'andamento è pressoché rettilineo.

5.3 Tipi fondamentali di valvole pilotate dal magnete proporzionale.

La corsa del magnete proporzionale, rappresenta il segnale di uscita che può pilotare o una valvola ad otturatore o una valvola a spola che scorre entro una sede recante delle aperture.

5.3.1 Valvola ad otturatore.



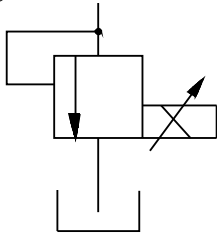
Il magnete proporzionale, rappresentato dal simbolo della bobina attraversato da una freccia obliqua, eccitato dal segnale di corrente di ingresso, sposta una molla che preme sull'otturatore.

Come si è detto lo spostamento del nucleo del magnete proporzionale è direttamente proporzionale al segnale di corrente; lo spostamento comprime la molla che preme sull'otturatore, in tal modo, sull'otturatore si ha una forza proporzionale alla deformazione della molla e, quindi, proporzionale alla corrente di ingresso.

La pressione p_1 dell'olio che può aprire l'otturatore è proporzionale al segnale di corrente inviato al magnete proporzionale.

5.3.2 Limitatore di pressione proporzionale

fig.5.8

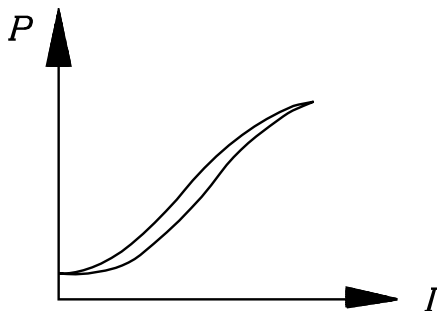


È un limitatore di pressione nel quale la forza di contrasto dell'otturatore è dato da un magnete proporzionale invece che da una molla tarata.

All'aumentare della corrente di eccitazione del magnete aumenta proporzionalmente la forza sull'otturatore che pone il circuito in scarico.

Ne viene quindi che la pressione nel circuito è proporzionale alla corrente di eccitazione del magnete.

fig.5.9



Riportando sull'asse delle ascisse le correnti di alimentazione del magnete e sull'asse delle ordinate le pressioni, si può rilevare, sperimentalmente, il diagramma che da l'andamento delle pressioni in funzione della corrente.

La curva rilevata prima all'aumentare della pressione e poi al suo diminuire presenta una isteresi dovuta principalmente agli attriti.

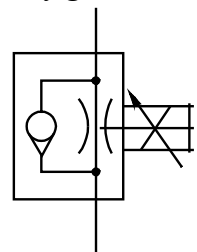
5.3.3 Valvole regolatrici di flusso proporzionali

Sono valvole nelle quali al posto della vite di regolazione che agisce su una molla viene messo un magnete proporzionale.

In tal modo la chiusura della strozzatura è funzione della corrente inviata al magnete.

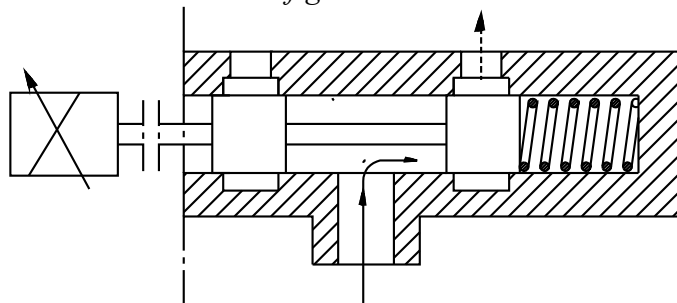
La portata dipende dalla corrente di pilotaggio.

fig.5.10



5.3.4 Valvole a spola

fig.5.11



Sono valvole nelle quali la corrente inviata al magnete proporzionale determina lo spostamento del suo nucleo, il quale va a pilotare la spola che scorre su una apposito alesaggio.

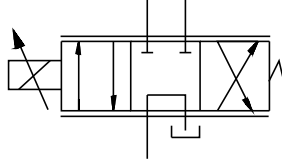
La sede presenta delle scanalature anulari che formano delle camere percorse dall'olio che pongono la valvola, attraverso degli orifici circolari, in comunicazione con i condotti esterni.

La spola, o cursore della valvola, è costituita da settori aventi lo stesso diametro della sede (*settori pieni*), intercalati da settori di diametro più piccolo (*settori vuoti*).

Nello spostamento della spola i settori pieni vanno ad ostruire totalmente o parzialmente le scanalature anulari, le quali sono poste in comunicazione tra loro attraverso i settori vuoti della spola.

5.3.5 Elettrodistributore monosolenoidale 4/3

fig.5.12

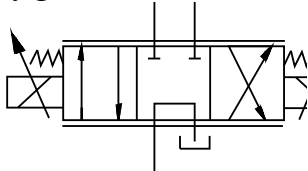


È presente un solo solenoide ed una sola molla di richiamo. Per ottenere la posizione centrale, a riposo, occorre inviare al magnete proporzionale della valvola una corrente detta di polarizzazione.

Per spostare il cursore da detta posizione occorre sommare alla corrente di polarizzazione il segnale di pilotaggio, costituito da una corrente positiva o negativa: la spola si sposterà dalla posizione di riposo, o in un senso o nell'altro, proporzionalmente alla corrente di pilotaggio.

5.3.6 Valvola bisolenoidale 4/3

fig.5.13



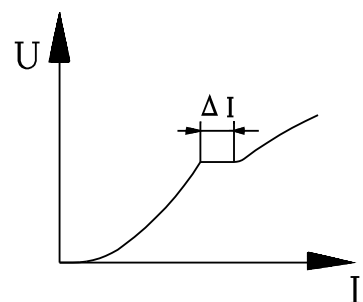
La spola è comandata da due magneti proporzionali. La posizione di riposo centrale è ottenuta dalla tensione di due molle antagoniste, poste all'estremità della spola. Per spostare il cursore in uno dei due sensi si invia la corrente di pilotaggio in una o l'altra bobina dei due magneti proporzionali.

5.4 Parametri caratteristici di una valvola

5.4.1 Sensibilità

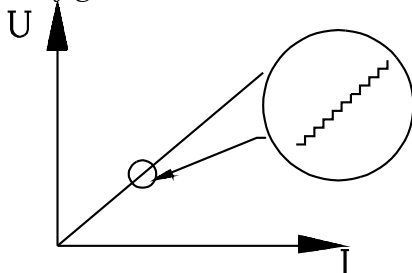
La sensibilità di intervento è la minima variazione del segnale di pilotaggio ΔI capace di produrre l'inizio della variazione del segnale di uscita: portata o pressione.

fig.5.14



5.4.2 Risoluzione

fig.5.15

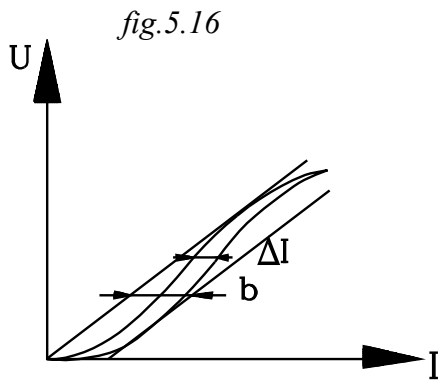


La risoluzione della valvola rappresenta il minimo valore apprezzabile del segnale di uscita distinto da precedente.

Il segnale reale si presenta costituito da gradini in quanto, quando l'uscita ha assunto un valore, ci vuole una variazione al disopra di un minimo di corrente affinché si possa far variare l'uscita stessa di una quantità discreta.

In pratica anche in presenza di un segnale analogico l'uscita varia in modo discreto.

5.4.3 Linearità e isteresi



Per effetto dell'attrito del cursore delle perdite magnetiche si presenta un fenomeno di isteresi.

Se si varia alternativamente la corrente di pilotaggio, aumentando e successivamente diminuendo il suo valore, si nota che, tornando sugli stessi valori di corrente, si ottiene una uscita di portata o di pressione diversa.

La curva caratteristica di salita si discosta da quella di discesa.

Si può definire l'indice di isteresi % come il rapporto tra la differenza max della corrente di pilotaggio ΔI , a parità di uscita e la corrente max I_{max}

$$\Delta I\% = \frac{\Delta I}{I_{max}} \cdot 100$$

Si definisce "deviazione dalla linearità" la semidifferenza dei valori della corrente letti, a parità di portata, sulle rette tangenti alle due curve caratteristiche di isteresi.

$$dl = \frac{b}{2}$$

5.4.4 Ricoprimento

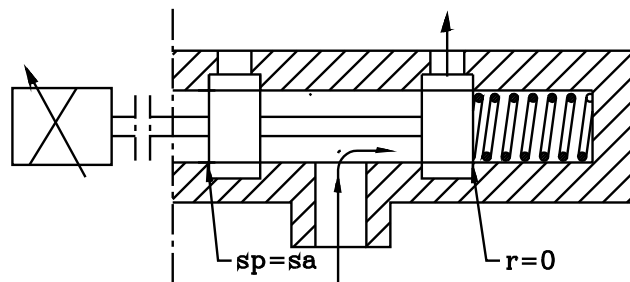
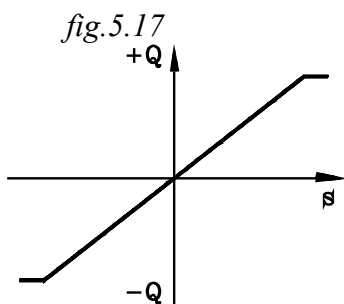
Come si è detto, nelle valvole a spola i settori pieni del cursore vanno ad aprire o chiudere totalmente o parzialmente le scanalature anulari praticate sull'alesaggio della valvola, che sono in comunicazione con l'esterno.

Occorre distinguere diversi casi a seconda della estensione del settore pieno del cursore rispetto a quella della scanalatura anulare.

Si definisce *ricoprimento* la semidifferenza tra la larghezza del settore pieno s_p del cursore e la larghezza della scanalatura anulare s_a .

$$r = \frac{s_p - s_a}{2}$$

5.4.4.1 Ricoprimento nullo



In tal caso la larghezza del settore pieno è uguale a quello della scanalatura $sp=sa$;
 $r=0$

Si Consideri come posizione di riferimento quella nella quale la mezzeria del settore pieno è nella corrispondente mezzeria della scanalatura anulare.

Si indichi con s la traslazione del cursore dalla posizione di riferimento. Sia Q la portata che trafila tra il settore e la scanalatura.

Per $s=0$ la portata è nulla ; mentre, spostando il cursore da una parte o dall'altra, si ha un aumento delle portata che trafila in un lato o nell'altro del settore pieno.

5.4.4.2 Ricoprimento positivo

Il settore pieno del cursore ha una larghezza sp maggiore di quella della scanalatura anulare sa .

Risulta:

$$r = \frac{sp - sa}{2}$$

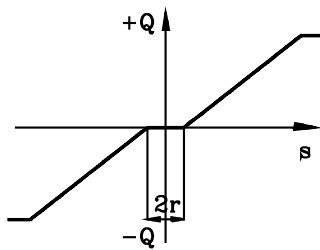
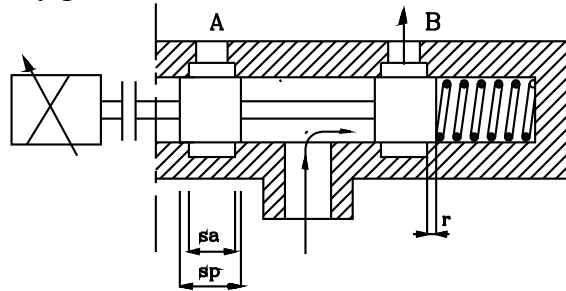


fig.5.18



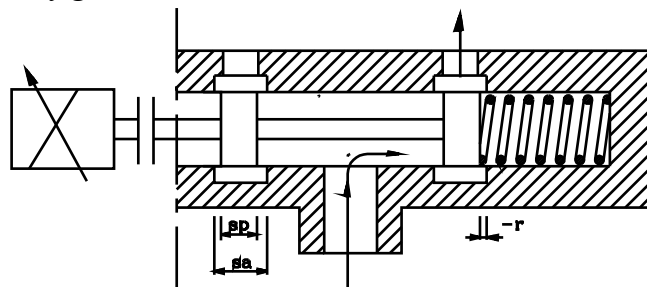
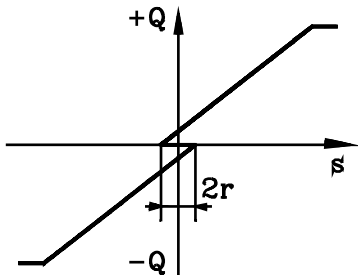
In tal caso, rispetto alla posizione di riferimento anzi detta, in un primo tratto dello spostamento del cursore, la portata di trafilamento tra settore e scanalatura risulta nulla; fino a che, effettuato lo spostamento r , in un senso o nell'altro si apre un passaggio per l'olio verso o l'uscita A o l'uscita B.

Il diagramma spostamento s portata Q presenta un tratto $2r$, centrato rispetto alla origine con portata nulla.

5.4.4.3 Ricoprimento negativo

La larghezza del settore è inferiore a quella della scanalatura.

fig.5.19



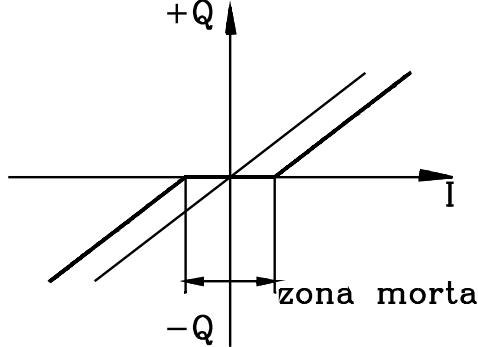
In posizione di riferimento, con $s=0$ si ha un uguale flusso di trafilamento sui due lati opposti del settore.

Spostando il cursore in un senso, aumenta la portata di trafilamento in un lato del settore e diminuisce quella sul lato opposto.

Quando lo spostamento risulta $s=r$ allora si ha trafileamento solo in un lato, mentre diviene nulla la portata che trafile sul lato opposto.

5.4.5 Punto zero

fig.5.20



Per effetto dei ricoprimenti nella posizione centrale vi è una zona morta, in quanto occorre un minimo valore di corrente affinché si abbia una portata diversa da zero.

Si determinano dei tempi di attesa necessari perché il valore della corrente superi la zona morta.

5.5 Circuito elettronico di pilotaggio

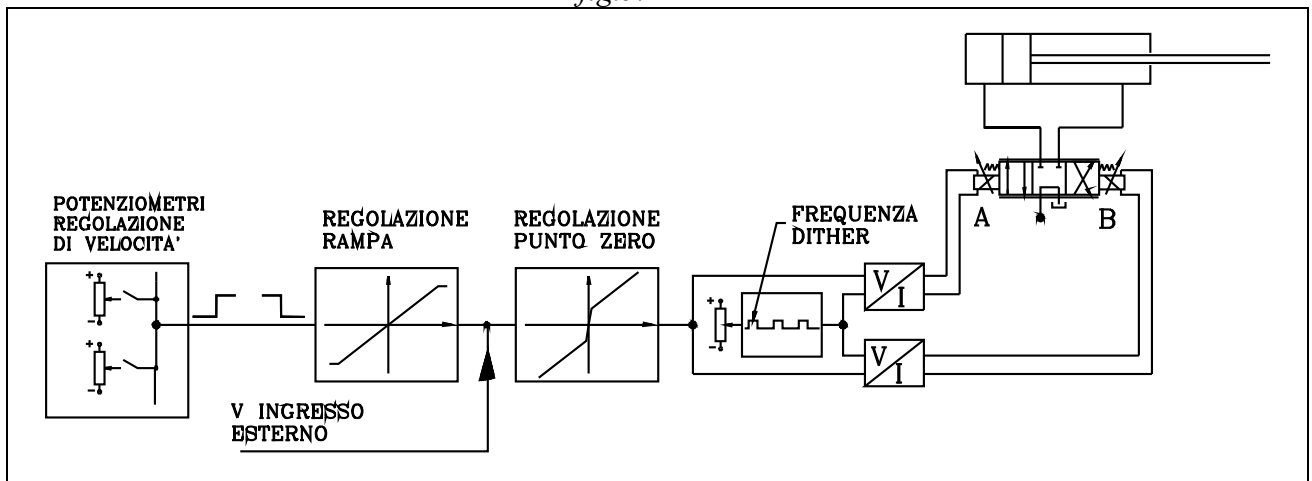
Le valvole proporzionali di pressione o di direzione e regolazione della portata hanno bisogno di una corrente continua variabile da zero ad un valore massimo.

Un circuito elettronico genera la corrente di pilotaggio a bassa potenza, ne stabilizza il valore dipendente dalla tensione.

Nello schema di fig.5.21 è riportata la struttura di massima del circuito elettronico di pilotaggio per elettrovalvole proporzionali.

Si possono distinguere 5 stadi, aventi ciascuno una particolare funzione.

fig.5.21



5.5.1- Stadio di impostazione gradini di velocità.

5.5.2- Stadio di regolazione della rampa.

5.5.3- Introduzione del segnale di tensione di ingresso esterno.

5.5.4- Stadio per la determinazione del punto zero.

5.5.5- Generatore della *frequenza di dither*.

5.5.6- Stadio di conversione *Tensione/Corrente V/I*.

5.5.1 Stadio di impostazione gradini di velocità

Nell'unità elettronica di pilotaggio è prevista una preselezione della regolazione a gradini, ottenuta con un certo numero di potenziometri. Con questi è possibile impostare diverse velocità, regolando ciascun di essi ad un determinato valore di tensione.

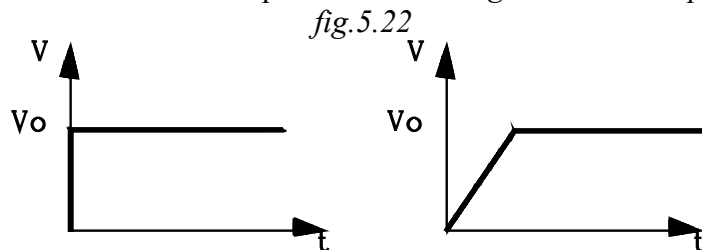
Detti potenziometri hanno una posizione di zero centrale e possono essere impostati in modo da inviare verso lo stadio finale una tensione o *positiva o negativa*.

Impostando tensioni positive il segnale di uscita della corrente viene inviato nel canale *A* che controlla un magnete proporzionale dell'elettrovalvola; impostando una tensione negativa viene pilotato l'altro magnete proporzionale dell'elettrovalvola del canale *B*.

5.5.2 Stadio di regolazione rampa

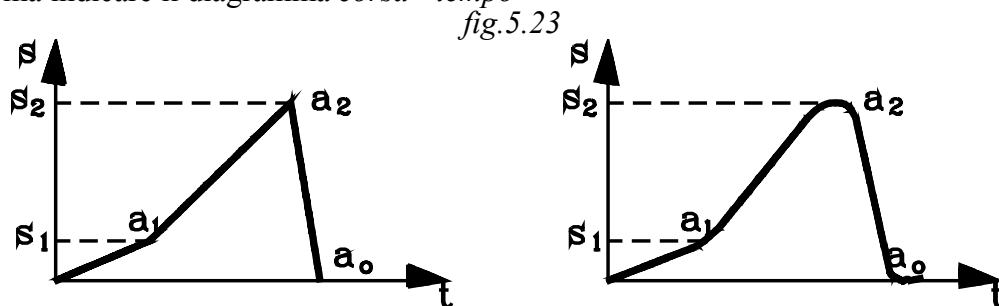
Impostando un valore di tensione con un potenziometro e inviandolo nello stadio finale si avrebbe in uscita una brusca risposta.

Per addolcire al risposta al gradino e, quindi, controllare l'accelerazione o decelerazione, l'unità elettronica è provvista di un *regolatore di rampa*.



Nella fig. al gradino di tensione di ingresso V_0 , regolando il potenziometro di regolazione della rampa si ha una risposta graduale.

Dovendo considerare oltre che la corsa anche la velocità con la quale si sposta un pistone, occorre non solamente tracciare il diagramma corsa passo, come si è proceduto nei comandi *ON/OFF*, ma indicare il diagramma *corsa - tempo*



Così, nella fig. viene indicato nel diagramma il percorso effettuato dal cilindro *A*, costituito da un primo tratto di lavoro fino al finecorsa a_1 con velocità moderata, segue un tratto di lavoro con velocità più elevata fino al finecorsa a_2 . Toccato questo, il cilindro effettua la corsa di ritorno.

Nella *fig. a* viene indicato il diagramma teorico corsa tempo senza l'intervento del regolatore di rampa, nella *fig. b* viene indicato lo stesso ciclo con l'effetto del regolatore di rampa.

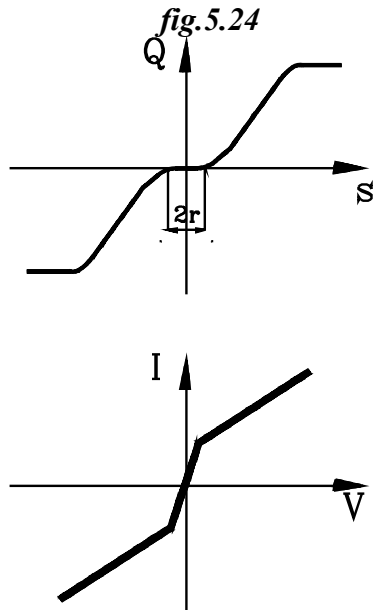
5.5.3 Introduzione del segnale di tensione di ingresso esterno

Nell'unità elettronica può essere inviato un segnale esterno di tensione che rappresenta il segnale analogico di regolazione continua di un processo.

Il segnale di tensione viene tradotto in segnale di corrente e inviato ad uno o l'altro canale a seconda del segno.

5.5.4 Stadio per la determinazione del punto zero

Le valvole direzionali hanno generalmente un ricoprimento positivo; ne viene che, partendo dalla posizione centrale, al variare della corrente, non si ha variazione di portata fino a che la spola non si sposta del ricoprimento r .



La curva caratteristica della valvola è del tipo riportato in *fig.5.24*.

Nei controlli di posizione di un cilindro, nei quali occorre regolare continuamente l'apertura e chiusura della valvola, dalla posizione di chiusura a quella corrispondente ad una determinata portata, si vengono a determinare dei tempi di attesa inaccettabili per comandi o regolazioni che debbono essere sensibili.

Per ridurre tali tempi di attesa occorre fare in modo che l'amplificatore di pilotaggio abbia una amplificazione elevata in prossimità della posizione centrale (*posizione zero*).

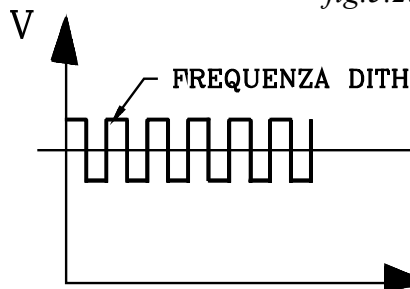
In tal modo, con una piccola variazione del segnale di tensione V di pilotaggio, si ottiene una elevata variazione di corrente, la quale si porta rapidamente a valori capaci di spostare la spola della valvola del ricoprimento r e dare così con rapidità la risposta ad un segnale di ingresso.

Tale elevata amplificazione si ha attorno al valore zero della tensione.

Per ottenere quanto detto occorre tarare opportunamente l'amplificatore di pilotaggio a due canali. Vi sono dei potenziometri di taratura per la corrente di base, per cui, anche bassi valori di ingresso sono sufficienti ad ottenere una portata di uscita dalla valvola.

5.5.5 Generatore della frequenza di dither

fig.5.25



Come si è detto, variando il segnale di pilotaggio, prima aumentandolo e poi diminuendolo, tornando sullo stesso valore del segnale di ingresso si ottiene in uscita un segnale diverso. Si ha una isteresi, dovuta all'attrito e alla perdite magnetiche.

L'attrito più gravoso è quello statico di primo distacco.

Per migliorare il comportamento della valvola si sovrappone alla corrente continua di pilotaggio una componente alternata *Dither*, che pone la valvola stessa in

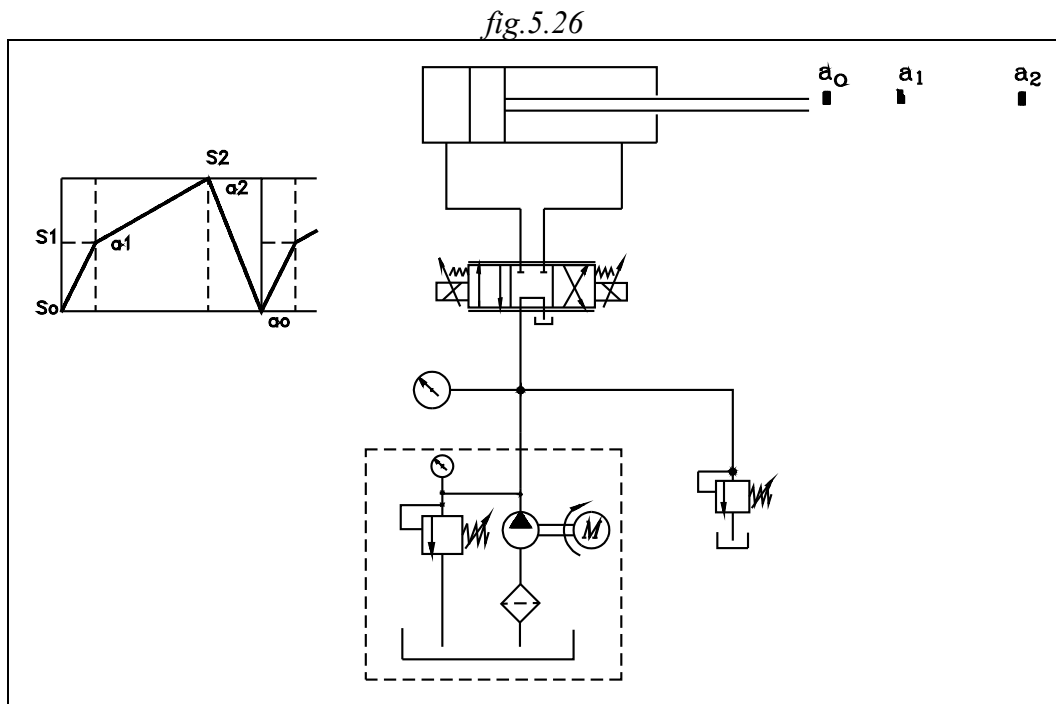
continua vibrazione, eliminando l'attrito di spunto.

5.6 Esempio di comando con elettrovalvola proporzionale

Con una elettrovalvola proporzionale direzionale e cilindro si debba comandare una slitta, la quale effettui, inizialmente una prima corsa di accostamento ad elevata velocità (*da s_0 ad s_1*), quindi, proceda con velocità moderata (*da s_1 ad s_2*); alla fine effettui una corsa di ritorno rapido.

Nella *fig.5.26* è rappresentato il circuito oleodinamico.

Quando viene toccato il finecorsa *ao* e pigiato lo *Start* lo stelo deve fuoriuscire, accelerando, fino ad ottenere la velocità sostenuta prefissata. Raggiunto il finecorsa *a1*, la velocità dello stelo deve diminuire per effettuare la corsa di lavoro; alla fine, toccato il finecorsa *a2* lo stelo torna indietro rapidamente.



Le due bobine dell'elettrovalvola proporzionale sono collegate all'amplificatore a due canali.

Le diverse velocità vengono impostate sui potenziometri 1,2,3 dell'amplificatore *fig.5.27*, i quali vengono inseriti dai contatti *K1,K2,K3* delle rispettive bobine, comandate dai finecorsa *a0,a1,a2*.

Sui potenziometri 1,2 viene impostata una tensione positiva che andrà sul canale *A*, collegato alla bobina dell'elettrovalvola che comanda la corsa di andata; mentre sul potenziometro 3 verrà impostata una tensione negativa, che andrà sull'altro canale *B*, collegato alla bobina che comanda la corsa di ritorno.

Nella pagina seguente viene riportato il graficet.

Si associano ai comandi *S1, S2, S3*, corrispondenti alle corse:

S1- corsa di andata veloce \implies bobina *K1*

S2- corsa di andata lenta \implies bobina *K2*

S3- corsa di ritorno veloce \implies bobina *K3*

Dal graficet si ottengono le equazioni:

$$H_3 = a_0$$

$$K_1 = (H_3 \cdot Start + K_1) \cdot \overline{K_2} \quad = S_1 \quad \text{Corsa andata veloce}$$

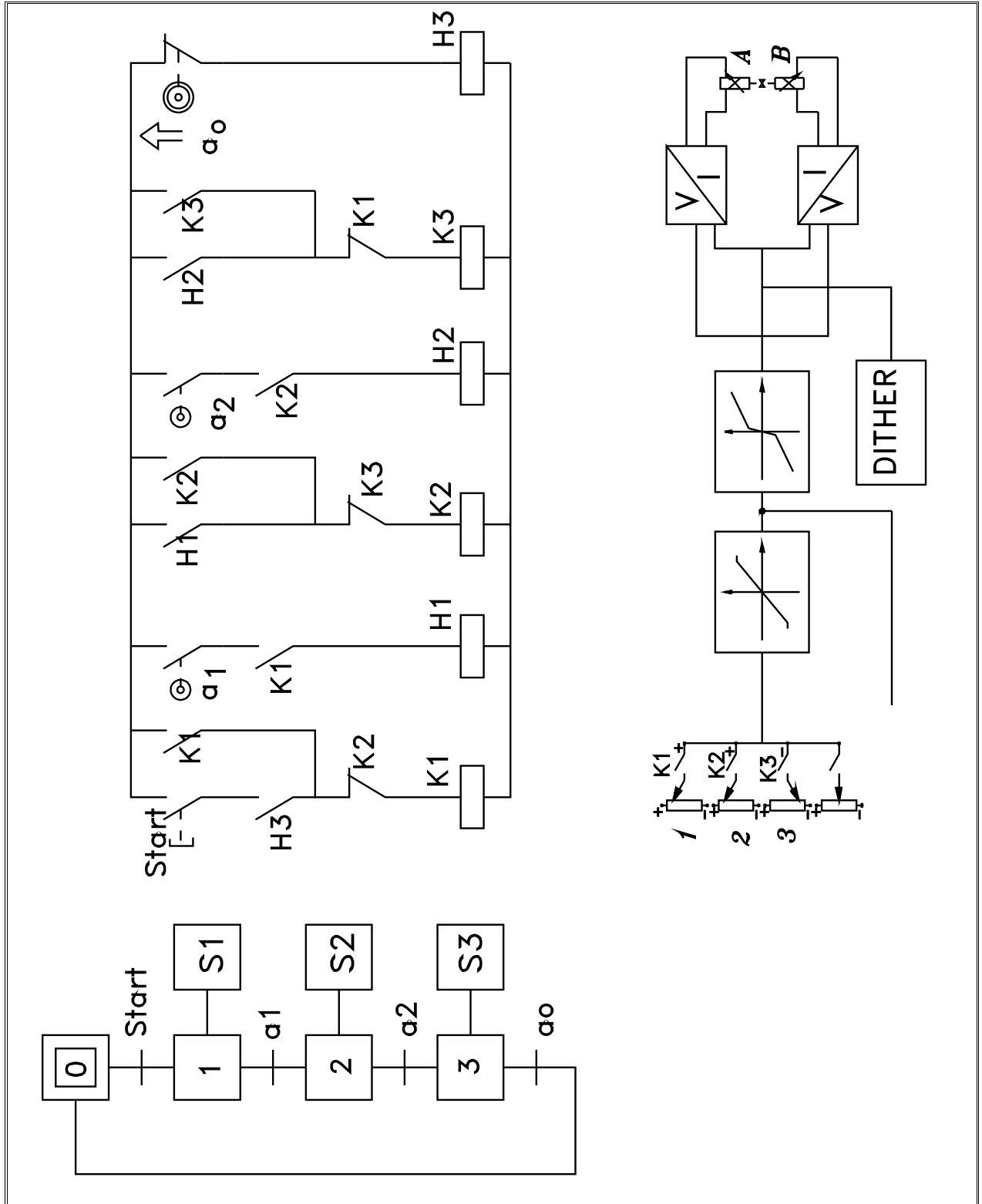
$$H_1 = K_1 \cdot a_1$$

$$K_2 = (H_1 + K_2) \cdot \overline{K_3} \quad = S_2 \quad \text{Corsa andata lenta}$$

$$H_2 = K_2 \cdot a_2$$

$$K_3 = (H_2 + K_3) \cdot \overline{K_1} \quad = S_3 \quad \text{Corsa ritorno veloce}$$

fig.5.27



6 I ROBOT

6.1 PRINCIPI GENERALI

La **robotica** è quella branca dell'ingegneria che studia la costruzione ed il funzionamento dei *robot*.

6.1.1 *Il robot sostituisce l'uomo nei lavori gravosi*

Da dove deriva il termine *robot* ?

Si può far risalire al nome "*robot*", dato dal governo asburgico al tipo di lavoro di natura servile, imposto alle popolazioni dei territori slavi dell'Impero.

Una maggiore diffusione e rispondenza del termine alle caratteristiche dei robot attuali, si ebbe con la divulgazione e la rappresentazione dell'opera teatrale fantascientifica R.U.R. dello scrittore cecoslovacco K. Capek, nella quale compaiono come protagonisti operai meccanici, creati dall'uomo, chiamati "*robot*".

Vi è qui l'antico sogno e aspirazione dell'uomo di poter creare esseri meccanici che abbiano le caratteristiche umane e sappiano svolgere le sue funzioni, ai quali affidare i lavori più gravosi.

Si sono susseguite, in questi ultimi decenni, generazioni di robot che hanno acquistato via via maggiori funzioni proprie dell'essere umano, non solamente nei movimenti, ma anche nelle capacità decisionali: quali la scelta delle operazioni più opportune da eseguire autonomamente, per risolvere problemi non previsti, che si presentano nell'ambiente di lavoro. Ovviamente la scelta viene effettuata utilizzando i programmi precedentemente memorizzati, sfruttando, per così dire, la propria esperienza e deducendo l'azione più opportuna da compiere.

In laboratorio sono in progetto dei robot sperimentali che hanno una architettura simile all'uomo e che riproducono una o più attività umane: come la locomozione con gambe meccaniche, il riconoscimento di un linguaggio e l'esecuzione di comandi orali ecc.

Nella robotica industriale l'architettura del robot dipende dal tipo di lavoro a cui esso viene adibito, e risulta in alcuni casi ben lontana da avere un aspetto antropomorfo.

Si avvicina al modello di un braccio umano il robot articolato verticale, adatto ad effettuare operazioni di manipolazione e di carico e scarico di materiali.

È da precisare che in molte applicazioni industriali un robot sostituisce un uomo (rapporto 1:1). Ad esso si affidano le operazioni rischiose, ripetitive, da eseguire in ambienti malsani. A differenza dell'uomo, il robot esegue il lavoro ripetitivo sempre alla stesa maniera, con precisione e rapidità: non è influenzato da problemi di noia, stanchezza fisica e psicologica.

Il robot è un mezzo che svolge funzioni simili a quella di un operatore umano e lo può sostituire specialmente nei lavori più gravosi, pericolosi, ripetitivi, eseguendoli sempre con la stessa precisione e rapidità.

La considerazione precedente evidenzia un beneficio nell'introduzione del robot nei processi produttivi. Di contro si può osservare la conseguenza negativa della perdita di un posto di lavoro, nel quale, principalmente viene svolta una attività manuale con relativo impegno mentale.

Questa è una tendenza che sarà inarrestabile negli anni avvenire, man mano che ci si avvicinerà alla realizzazione della *Fabbrica Automatica* ove sempre di meno verranno effettuate dall'uomo operazioni manuali.

I posti persi nei lavori meno qualificanti vengono sostituiti con quelli di maggiore impegno intellettuale. Prova ne sia che in Giappone, patria dell'automazione e in particolare della robotica, risulta minima la disoccupazione.

Condizione indispensabile affinché la trasformazione non risulti traumatica, è che alla innovazione segua, passo passo, la riqualificazione delle maestranze che sono in Azienda e la scuola prepari adeguatamente i giovani che vengono introdotti nel mondo del lavoro, non solo nei contenuti indispensabili, ma specialmente nella mentalità e nella capacità di acquisire le nuove procedure. La riqualificazione e l'aggiornamento sulle nuove tecnologie, ormai, non è una eccezione *ma la è regola*.

6.1.2 *L'obiettivo nelle future generazioni di robot*

Nei laboratori sperimentali, come si è detto, sono in studio robot che possano, sempre più, assolvere a funzioni proprie dell'essere umano; non solamente nella capacità di fare determinate lavorazioni o particolari movimenti, ma anche nella comunicazione e nella capacità di decisioni autonome a risolvere un problema imprevisto.

Queste capacità e abilità in studio, una volta acquisite dal robot vengono impiegate nei processi industriali di produzione.

L'obiettivo che ci si prefigge di ottenere in futuro, nelle nuove generazioni di robot, è che le sue attività si avvicinino sempre più a quelle che può svolgere l'uomo: in maniera autonoma, simultanea e coordinata; con la possibilità di comunicazione con il mondo esterno e interagire con esso prendendo le opportune decisioni.

6.1.3 *Intelligenza del robot*

Si parla di intelligenza del robot come capacità che esso ha di prendere autonomamente decisioni di fronte a problemi imprevisti provenienti dal mondo esterno con il quale comunica.

Si intende che un robot è tanto più intelligente quanto più riesce ad agire con una azione intelligente in conseguenza ad una percezione (sensoriale: visiva, sonora ecc.) proveniente dal mondo esterno.

L'intelligenza di un robot dipende dalla qualità e quantità di programmi memorizzati nel suo sistema di controllo.

L'autonomia nel prendere decisioni di fronte ad un problema ed agire conseguentemente con una azione intelligente, corrisponde a scegliere il programma più opportuno tra quelli memorizzati nell'unità di controllo.

In futuro una delle discriminanti, nella scelta di un robot sarà sempre di più il suo grado di intelligenza; ciò specialmente in quelle operazioni ove viene richiesta una maggiore interazione con il mondo esterno, con una maggiore percezione sensoriale dei parametri provenienti da esso.

6.1.4 *Definizione*

Sono state date diverse definizioni della macchina *Robot*. Il S.I.R.I (Società Italiana di Robotica Industriale) ha dato la seguente definizione di robot:

Il robot è un manipolatore programmabile multiscopo per la movimentazione dei materiali, di attrezzi e altri mezzi di produzione, capace di interagire con l'ambiente nel quale si svolge il ciclo tecnologico di trasformazione relativo all'attività produttiva.

Nella definizione si pongono in rilievo gli attributi fondamentali di un robot che lo contraddistingue da altri meccanismi che possono ripetere automaticamente delle operazioni e movimenti propri dell'uomo.

Risale a tempi remoti la fabbricazione di *automi*: macchine che riproducevano sia l'aspetto esterno che i movimenti dell'uomo o degli animali. Tali meccanismi eseguivano automaticamente dei movimenti senza alcuna possibilità di modificare il loro comportamento in relazione alle modificazioni ambientali.

L'introduzione dell'elettronica e dell'informatica ha trasformato l'automa, conferendogli sempre più capacità e proprietà che caratterizzano le funzioni superiori degli esseri viventi.

L'automa si trasforma nel robot, e diviene un sistema capace di autoadattarsi, autoregolarsi in relazione alle mutevoli condizioni ambientali.

La robotica tende a ottenere meccanismi che abbiano sempre più capacità deduttive, in modo che possano agire autonomamente, di fronte a situazioni non previste provenienti dall'ambiente di lavoro.

6.1.5 Classificazione

Sono state proposte dalle società di robotica diverse classificazioni per i robot.

Ci riferiamo alla classificazione giapponese. I robot vengono classificati in base alla loro capacità di interazione bidirezionale con l'ambiente e la loro adattabilità a situazioni impreviste.

Grado di intelligenza

Si definisce grado di intelligenza di un robot la capacità che esso ha di effettuare autonomamente azioni conseguenti la percezione di situazioni che si verificano nell'ambiente di lavoro.

Questa capacità dipende dalla quantità e qualità dei programmi memorizzati che formano il *firmware* del robot.

Con questo criterio di classificazione si parte da robot non aventi alcun grado di intelligenza quali i *manipolatori* guidati dall'operatore, fino ai *robot intelligenti*, che interagiscono con alto grado di autonomia con il mondo esterno.

Nella classificazione giapponese sono così previste cinque classi di robot.

Manipolatori Sono robot comandati dall'operatore mediante pulsantiera o joy-stick. Non presentano alcuna interazione con il mondo esterno e nessun grado di autonomia.

Robot sequenziali Sono robot che eseguono cicli di lavoro muovendo sequenzialmente un asse alla volta. Il controllo è effettuato dai finecorsa in programmi a logica cablata.

Robot apprendista È un robot che può memorizzare più programmi contenenti differenti sequenze di movimenti. Rispetto alla classe precedente i robot di questo tipo offrono la possibilità di poter variare con facilità il programma di lavoro. Sono comandati con circuiti a logica programmata (PLC).

Robot con C.N.C È un robot controllato a logica programmata nel quale i movimenti degli assi sono comandati da un controllo numerico con il quale si può regolare sia i parametri del moto, sia il coordinamento degli assi in modo da poter effettuare una traiettoria.

Robot intelligenti Sono robot che mediante sensori visivi, tattili ecc. interagiscono con il mondo esterno.

Il grado di intelligenza, come si è detto è in funzione della capacità del robot ad agire autonomamente in conseguenza della percezione di eventi non previsti nel programma di lavoro e di adattare il comportamento al mutare delle situazioni esterne.

La classificazione non è così netta. Così un robot, che si può classificare come sequenziale, in quanto il ciclo di lavoro avviene muovendo sequenzialmente un asse alla volta, può essere controllato da un PLC con la possibilità di essere facilmente riprogrammabile e quindi appartenere alla classe dei *robot apprendisti*.

Tra le varie proposte di classificazione dei robot industriali risulta interessante quella effettuata in base alle applicazioni e alle funzioni che può svolgere il robot nel sistema produttivo.

1. *Robot che esplicano funzioni di puro spostamento*

Si possono distinguere in base alla funzionalità dello spostamento in:

a. *Robot adatti al carico e scarico dei materiali e utensili. Utilizzati:*

- a.1 Nelle macchine utensili.
 - a.2 In impianti di fucinatura a freddo.
 - a.3 In impianti di stampaggio a freddo delle lamiere.
 - a.4 In impianti di formatura e stampaggio per iniezione delle materie plastiche.
 - a.5 In impianti di pressofusione di metalli.
 - a-6 In impianti di trattamenti termici.
- ecc.

b. *Robot adatti alla manipolazione dei materiali. Utilizzati:*

- b.1 In confezione di merci.
- b.2 In smistamento di pezzi.
- b.3 In orientamento di pezzi.

2. *Robot che esplicano funzioni di spostamento e lavori di fabbricazione*

In questa categoria vengono compresi i robot che esplicano delle lavorazioni o assemblaggi. Si elencano i robot per le seguenti applicazioni:

- a. Saldatura per punti.
- b. Saldatura continua.
- c. Assemblaggio di gruppi meccanici elettronici.
- d. Cablaggi di impianti elettrici.
- e. lavorazioni speciali con l'impiego di particolari utensili e attrezzature: taglio con laser, lavorazioni di foratura, sbavatura ecc.

3. *Robot per spostamento e misurazioni*

6.2 STRUTTURA E TIPOLOGIA DEI ROBOT

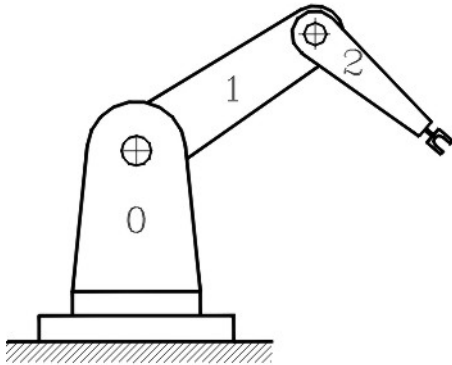
6.2.1 Struttura

Il robot è costituito da una sequenza di elementi meccanici uniti tra loro con particolari collegamenti *detti giunti*, che permettono un moto relativo degli elementi connessi.

Usualmente gli elementi connessi costituiscono una *catena cinematica aperta*, in quanto sono collegati in serie, uno di seguito all'altro, fino all'ultimo elemento che porta l'attrezzatura o l'utensile occorrente per l'operazione a cui il robot è stato adibito.

Gli elementi vanno considerati nell'ordine che va dalla base di fissaggio fino all'ultimo elemento contenente l'attacco dell'utensile.

fig.6.1



La base di fissaggio è l'elemento 0 al quale è solidale il riferimento assoluto. Le coordinate rispetto ad esso vengono dette *coordinate assolute o coordinate mondo*.

Gli elementi della catena, successivi alla base, hanno numeri progressivi fino a $n-1$, dove n è il numero totale di elementi.

6.2.2 Gradi di libertà

Gli elementi costituenti la struttura di un robot si possono considerare con approssimazione, in uno studio cinematico, come dei corpi rigidi. In effetti sono dei corpi elastici che, sottoposti a sollecitazioni, permettono delle piccole deformazioni.

Un corpo si definisce rigido quando le mutue distanze di tutti i suoi punti, presi a due a due in tutti i modi possibili, restano inalterate.

Un sistema di punti, che durante un moto mantengono inalterate le loro mutue distanze, costituisce un *sistema rigido*.

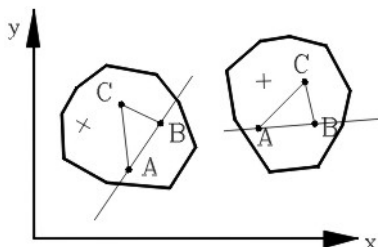
Nel moto di un corpo rigido, rimanendo costanti le mutue distanze dei suoi punti, restano invariate anche tutte le figure geometriche che essi possono individuare: segmenti, triangoli, angoli tra segmenti ecc.

6.2.2.1 Sistema rigido piano

Consideriamo prima una figura posta su di un piano, i cui punti costituiscano un sistema rigido (*invarianza delle mutue distanze*)

Ora risulta interessante, data la figura rigida piana, fissarne la posizione sul piano di appartenenza rispetto ad un riferimento.

fig.6.2



Per determinare la posizione di una figura rigida piana rispetto ad un riferimento, posto sullo stesso piano, *basta fissare la posizione di due soli punti A, B della figura e definire il semipiano positivo rispetto alla retta AB*.

Infatti fissati i due punti A, B ogni altro punto C individuato, con i precedenti, i vertici di un triangolo, che rimane invariato essendo il sistema rigido.

In uno spostamento rigido piano, per individuare le successive posizioni della figura, basta determinare in ognuna di quelle le coordinate di due suoi punti A, B rispetto ad un riferimento fisso del piano e il semipiano positivo rispetto alla retta AB.

Si consideri ora un sistema rigido piano che si sposti da una posizione 1 ad una posizione 2. Per individuare le due posizioni del sistema basta individuarne quella di due suoi punti A, B .

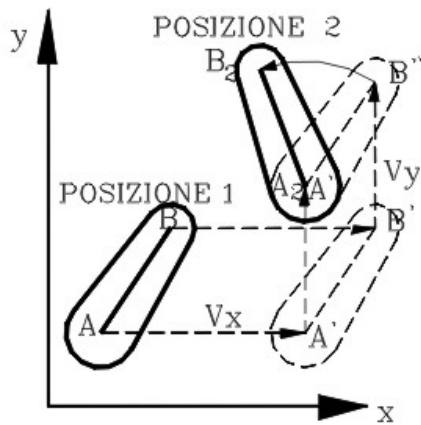
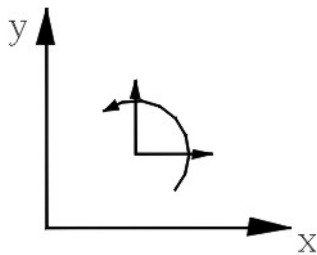


fig. 6.3

Lo spostamento dalla posizione 1 alla 2 si può ottenere dalla combinazione di due traslazioni parallele a due assi cartesiani di riferimento e di una rotazione. Consideriamo infatti il sistema rigido di figura nelle due posizioni 1 e 2. Con una traslazione di vettore V_x parallela all'asse x e una V_y , parallela all'asse y , si porta il segmento AB in $A'B'$ con il punto A' coincidente con il punto A_2 posto nella posizione 2. Nelle due traslazioni il segmento AB non muta né direzione né senso, per cui $A'B'$ è parallelo ad AB , con $A' \equiv A_2$. Con una rotazione si fa poi coincidere anche il punto B' con B_2 .

fig. 6.4



Da quanto esposto ne viene che un sistema rigido piano, privo di impedimenti, può ammettere tre possibili movimenti elementari: due traslazioni nella direzione degli assi cartesiani di riferimento e una rotazione attorno ad un asse perpendicolare al piano di appartenenza del sistema.

Ogni movimento elementare possibile del sistema viene definito grado di libertà.

Un sistema rigido piano, privo di impedimenti, ammette tre gradi di libertà.

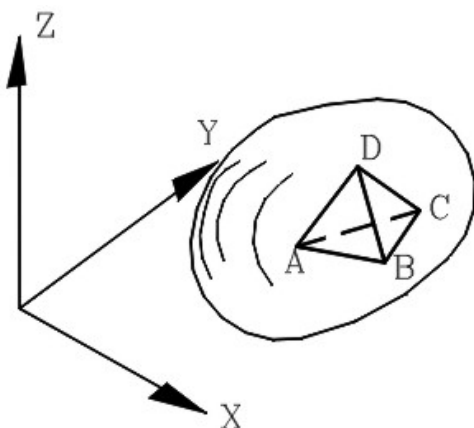
6.2.2.2 Sistema rigido nello spazio

Il sistema rigido, nello spazio costituisce un corpo rigido detto anche *corpo solido*.

Si consideri come sistema di riferimento nello spazio una terna di assi cartesiani.

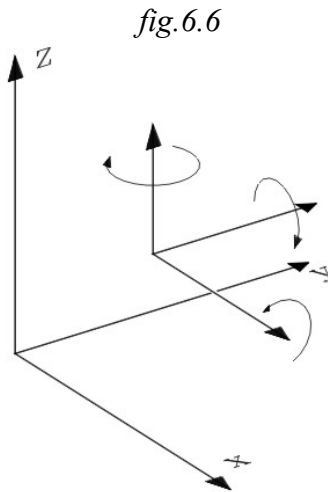
Per fissare la posizione di un corpo rigido nello spazio, basta fissare quella di tre suoi punti A, B, C rispetto alla terna cartesiana di riferimento, e definire il semispazio positivo rispetto al piano ABC .

fig. 6.5



Infatti ogni altro punto D forma, con gli altri tre, i vertici di un tetraedro, che rimane invariato essendo il sistema rigido (*restano invariati gli spigoli: mutue distanze tra i 4 punti*).

Ripetendo lo stesso ragionamento fatto per il sistema rigido piano si arriva alla conclusione che:



Un corpo rigido, privo di impedimenti, può ammettere sei possibili movimenti elementari: tre traslazioni nella direzione degli assi cartesiani di riferimento e tre possibili rotazioni, ciascuna attorno ad uno di essi.

Un sistema rigido nello spazio, privo di impedimenti, ammette sei gradi di libertà.

6.2.2.3 Vincolo

Viene definito vincolo per un corpo rigido un qualsiasi sistema capace di limitare una o più libertà di movimento.

Se la limitazione è sulla posizione che possono assumere i punti nel moto, allora il vincolo si dice *olòno*.

I vincoli che determinano una limitazione sulla velocità del moto dei punti si dice *anolòno*.

La limitazione si può tradurre in una condizione sul moto (*posizione o velocità*) dei punti del corpo rigido, esprimibile con una equazione o una disequaglianza.

Se la limitazione si traduce in equazioni che debbono soddisfare i punti durante il moto allora il *vincolo* si dice *bilaterale*. Se, invece, la limitazione si traduce nel soddisfare disequaglianze, il vincolo si dice *unilaterale*.

Così se il vincolo è di posizione (*olòno*) e la limitazione impone che i punti soddisfino ad una equazione del tipo:

$$\varphi(x_n, y_n, z_n) = 0$$

significa che detti punti si possono muovere su di una superficie, espressa dall'equazione scritta.

Il vincolo olòno espresso da una disequaglianza del tipo

$$\varphi(x_n, y_n, z_n) \geq 0$$

significa che i punti possono essere in una precisa banda rispetto alla superficie.

Nella trattazione che segue interesseranno i vincoli *olònomi*. Essi tolgono uno o più gradi di libertà al sistema.

6.2.3 Giunto

Si definisce giunto una articolazione che unisce tra di loro due elementi rigidi consecutivi che possono muoversi uno relativamente all'altro.

Il giunto è una connessione tra due elementi che permette a questi uno più moti relativi, senza che vi sia il distacco delle parti. La condizione di mutuo contatto determina un vincolo per i due elementi consecutivi.

Il giunto si presenta come un vincolo olòno tra due segmenti consecutivi che permette loro uno o più gradi di libertà di moto relativo.

Nella costruzione dei robot vengono impiegati, generalmente, giunti che permettono un solo grado di libertà elementare: di traslazione o di rotazione.

Da questa constatazione ne deriva che, usualmente, per una connessione della catene di corpi rigidi costituenti il robot, si può dare la seguente definizione di giunto:

Si definisce giunto la connessione tra due elementi rigidi consecutivi della catena costituente il robot, capace di fornire un solo grado di libertà di movimento relativo, o di tipo rotatorio o traslatorio.

Esistono però giunzioni tra due elementi rigidi che forniscono più di un grado di libertà di movimento relativo.

6.2.4 Giunti a più gradi di libertà

6.2.4.1 Giunto sferico (cerniera sferica)

Il vincolo è costituito dalla condizione che i due elementi possano muoversi di moto relativo, in modo che restino sempre a contatto sulla superficie sferica di giunzione.

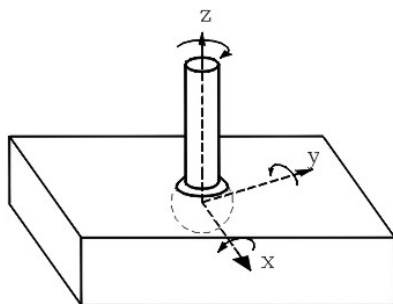


fig.6.7

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$$

Nella figura, considerando il riferimento cartesiano solidale all'elemento di base, l'altro elemento, connesso al primo con il giunto sferico, può ruotare attorno ai tre assi x,y,z.

Il giunto sferico permette tre gradi di libertà di rotazione attorno a tre assi cartesiani.

6.2.4.2 Giunto cilindrico

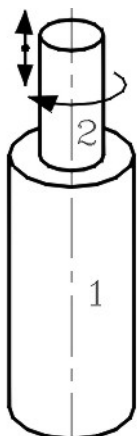


fig.6.8

Il vincolo è costituito dalla condizione che i due elementi possano muoversi di moto relativo, in modo che restino sempre a contatto le due superfici cilindriche di giunzione.

Nella figura, considerando l'elemento 1 fisso, l'altro (2) può, rispetto al primo, ruotare attorno all'asse di simmetria comune e traslare nella direzione di questo.

La giunzione cilindrica permette due gradi di libertà di moto relativo tra gli elementi connessi: di traslazione lungo l'asse di simmetria comune e di rotazione attorno ad esso.

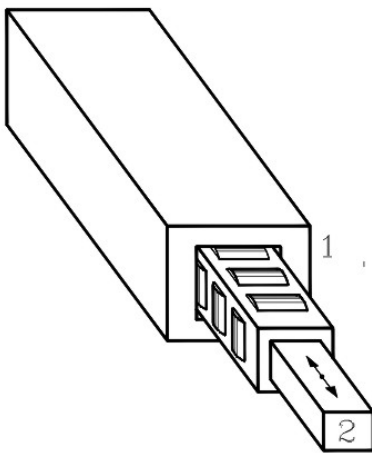
6.2.5 Giunti ad un solo grado di libertà

Si distinguono in: *giunti di traslazione* nella direzione di un asse e *giunti di rotazione* attorno ad un asse.

Come si è detto le articolazioni della catena di segnanti costituenti il robot, forniscono un solo grado di libertà di moto relativo tra due elementi consecutivi connessi; e, quindi, sono o giunti di sola traslazione o di sola rotazione.

6.2.5.1 Giunto prismatico : di traslazione

fig.6.9



La condizione di vincolo imposto dal giunto prismatico è che i due elementi in articolazione possano scorrere, mantenendo il contatto su due piani non paralleli

$$\begin{cases} a_1 \cdot x + b_1 \cdot y + c_1 \cdot z + d_1 = 0 \\ a_2 \cdot x + b_2 \cdot y + c_2 \cdot z + d_2 = 0 \end{cases}$$

I due piani si incontrano in una retta che determina la direzione di traslazione relativa tra i due elementi connessi.

Le altre superfici di contatto tra i due elementi non determinano nessun'altra condizione di vincolo, essendo parallele alle prime due (*proporzionalità tra i coefficienti delle variabili*)

È da rilevare che lo scorrimento di traslazione relativo tra i due elementi non deve avvenire mai con strisciamento delle superfici a contatto diretto: si interpone tra esse un sistema di rulli o sfere, che offrono un attrito di rotolamento, meno gravoso di quello radente, che si otterrebbe in assenza dei corpi volventi.

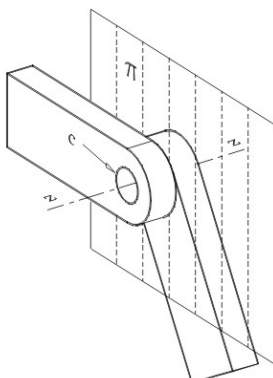
La minimizzazione dell'attrito è indispensabile nella costruzione dei robot, in quanto viene richiesta una rapidità di movimento relativo dei segmenti che lo compongono. Minimo deve essere l'attrito di primo distacco.

Il giunto prismatico offre il vantaggio di garantire una buona rigidità e una precisione di posizionamento. Costruttivamente, però, risulta più difficoltoso del giunto di rotazione e quindi con costo più elevato.

6.2.5.2 Giunto di rotazione - Cerniera cilindrica

La condizione di vincolo si traduce nell'imporre che il moto relativo tra i due elementi avvenga mantenendo fisso il contatto tra due superfici cilindriche e un piano normale al loro asse comune.

fig.6.10



Così, se "z" è l'asse di rotazione, i punti di contatto dei due elementi del giunto soddisfano alle due equazioni del tipo:

$$\begin{cases} z = \text{Costante} \\ (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \end{cases}$$

Il giunto permette il solo grado di libertà di rotazione attorno ad un asse e non la traslazione lungo esso (*come avviene per il giunto cilindrico*)

Nella figura le due superfici di vincolo sono schematizzate dal cilindro c e dal piano π .

Il perno cilindrico è solidale ad uno dei due elementi e su di esso si investe la sede cilindrica dell'altro ; inoltre il moto relativo avviene mantenendo sempre il contatto tra i due elementi sul piano π .

I due segmenti possono solamente ruotare attorno all'asse z .

Nella schematizzazione del giunto l'articolazione avverrebbe con strisciamento relativo di due superfici cilindriche. Da quanto detto precedentemente, questa soluzione deve essere evitata per non ingenerare attriti radenti. Si interpone tra il perno e la sede cilindrica un cuscinetto volvente che minimizza gli attriti.

6.3 Gradi di libertà di un robot

Il robot, come si è detto, usualmente, è costituito da una catena cinematica aperta di elementi rigidi connessi nei giunti, avente lo scopo di muovere, posizionare ed orientare l'elemento terminale, sul quale viene fissato l'apposito attrezzo (*end - effector*) necessario ad effettuare l'operazione a cui il robot è adibito.

La catena cinematica è costruita in modo da poter portare in qualsiasi posizione, entro il volume di lavoro, il punto di riferimento dell'elemento terminale o dell'*end - effector* e di orientare questo nello spazio, in qualsivoglia direzione.

Occorre quindi risolvere due problemi distinti :

- Poter portare in qualsiasi posizione, entro il volume di lavoro del robot, il punto di riferimento dell'elemento terminale o dell'*end - effector*.
- Poter orientare in qualsiasi direzione dello spazio l'*end - effector*.

6.3.1 Posizionamento del punto di riferimento dell'*end - effector* nello spazio

Per determinare la posizione di un punto nello spazio basta fissare tre coordinate indipendenti di un sistema di riferimento. Perciò, affinché il punto caratteristico dell'*end effector* possa assumere qualsiasi posizione entro il volume di lavoro, basta che all'elemento terminale vengano comunicati tre gradi di libertà, corrispondenti alle coordinate indipendenti che possono fissarsi nel sistema di riferimento adottato.

Si possono adottare tre sistemi di riferimento diversi nello spazio:

- Sistema di coordinate cartesiane.
- Sistema di coordinate cilindriche.
- Sistema di coordinate sferiche.

6.3.1.1 Sistema di coordinate cartesiane

Il riferimento è costituito da un punto origine O e tre assi ortogonali orientati x,y,z , passanti per O e sui quali è fissata una unità di misura u (generalmente la stessa per i tre assi).

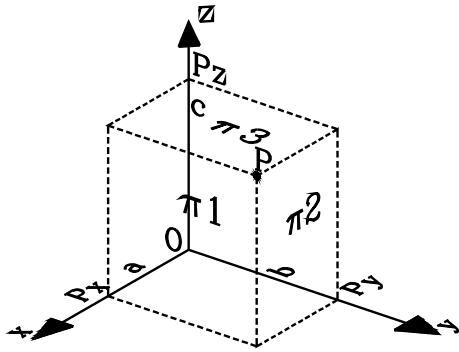


fig.6.11

I tre assi x, y, z formano i tre piani coordinati di riferimento: XY, YZ, ZX .

Dato un punto P nello spazio, si traccino, passanti per esso, i tre piani π_1, π_2, π_3 rispettivamente paralleli ai piani coordinati: YZ, ZX, XY .

- Il piano π_1 , normale all'asse x interseca questo nel punto P_x .
Il segmento $O-P_x$, misurato rispetto al segmento unitario u , dà la coordinata "a" del punto P sull'asse x .
- Il piano π_2 , normale all'asse y interseca questo nel punto P_y .
Il segmento $O-P_y$, misurato rispetto al segmento unitario u , dà la coordinata "b" del punto P sull'asse y .
- Il piano π_3 , normale all'asse z interseca questo nel punto P_z .
Il segmento $O-P_z$, misurato rispetto al segmento unitario u , dà la coordinata "c" del punto P sull'asse z .

Nasce una corrispondenza biunivoca tra la terna ordinata di numeri reali x, y, z e i punti dello spazio: ad un punto dello spazio vi corrisponde la terna ordinata (x, y, z) ; viceversa ad una terna ordinata di numeri reali (x, y, z) corrisponde uno e un solo punto dello spazio.

Così per determinare la posizione del punto di riferimento dell'*end-effector* basta dare di esso le tre coordinate cartesiane (x, y, z) .

6.3.1.2 Sistema di coordinate cilindriche (semipolari)

Alcuni robot hanno una struttura tale che l'*end-effector* può assumere posizioni entro un volume di lavoro costituito da una porzione cilindrica. Risulta in tal caso conveniente indicare e fissare la posizione rispetto ad un riferimento in coordinate cilindriche.

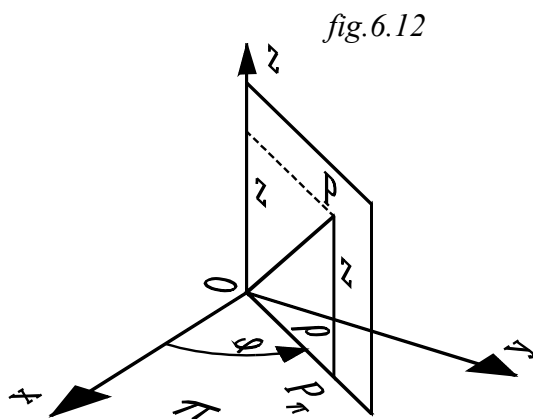


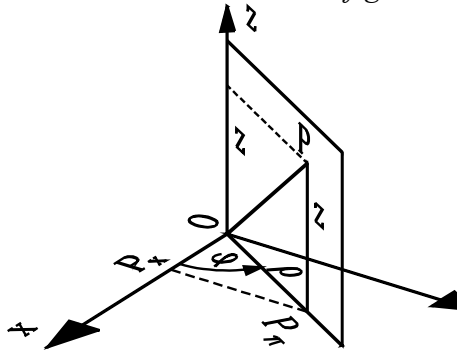
fig.6.12

Il riferimento è costituito da un piano π orientato (*piano equatoriale*), un punto origine O preso su di esso, un'asse z con l'origine in O , normale a π e orientata nel verso positivo del piano, una retta orientata x (*asse polare*). Viene fissato una unità di misura u sulle lunghezze e una α per gli angoli.

Per individuare un punto P dello spazio, occorre associare ad esso tre numeri reali. Si procede nella seguente maniera:

- Si proietti il punto P sul piano π ottenendo il punto P_π .
- Si congiunga l'origine O con il punto P_π . Il segmento $O - P_\pi = \rho$ dà la prima coordinata detta raggio vettore.
- L'angolo φ che il raggio vettore $O - P_\pi = \rho$ forma rispetto all'asse polare x dà la seconda coordinata, detta anomalia.
- Il segmento $P - P_\pi = z$ misurato sull'asse z dà la terza coordinata, detta quota del punto P .

Al punto P dello spazio corrispondono biunivocamente le tre coordinate cilindriche (ρ, φ, z)



Con riferimento alla figura, le coordinate cartesiane si possono facilmente ricavare da quelle cilindriche.

Dal triangolo OP_xP_π si ha:

$$\begin{cases} OP_x = x = \rho \cdot \cos \varphi \\ OP_y = y = \rho \cdot \sin \varphi \end{cases}$$

La coordinata z coincide con la quota, si ha quindi:

Coordinate cartesiane rispetto alle cilindriche:

$$\begin{cases} x = \rho \cdot \cos \varphi \\ y = \rho \cdot \sin \varphi \\ z = z \end{cases}$$

6.3.1.3 Riferimento in coordinate sferiche (o polari)

L'utilizzo di questo riferimento risulta conveniente nei robot, detti sferici, nei quali le articolazioni principali, che posizionano il punto di riferimento dell'*end-effector* nello spazio di lavoro, si muovono secondo le coordinate sferiche.

Risulta poi facile, con semplici relazioni trigonometriche, trasformare le coordinate sferiche in cartesiane.

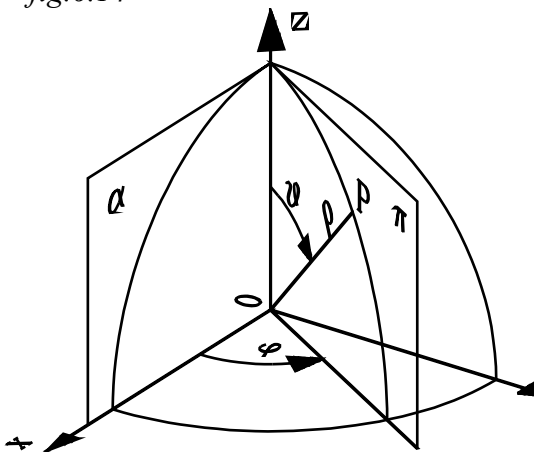
Anche in questo caso un punto nello spazio è individuato da una terna ordinata di numeri reali, costituenti le coordinate sferiche.

Per comprendere il riferimento, ci si riferisca allo schema di figura fig.6.14.

Nello spazio si fissi un punto O come origine (detto polo) e, per esso, si faccia passare una retta orientata z (detta asse polare), avente l'origine coincidente con O .

Si assuma inoltre, come riferimento un piano α , appartenente al fascio di piani, aventi per asse l'asse polare z .

fig.6.14



Ora, dato un punto P dello spazio, per esso si conduca il piano π , appartenente allo stesso fascio di asse z e si congiunga l'origine O con il punto P , ottenendo il segmento $OP = \rho$, (detto raggio vettore).

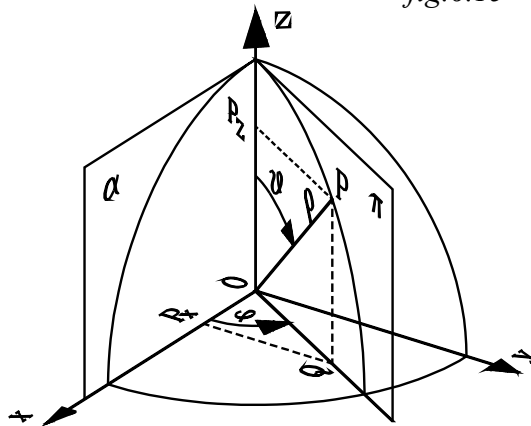
Si scelga inoltre una unità di misura per le lunghezze, una per gli angoli e un orientamento per questi.

Per definire la posizione del punto P rispetto al riferimento preso, si danno, in ordine, i seguenti numeri reali, detti coordinate sferiche (*o polari*) del punto P .

1. Lunghezza ρ del raggio vettore OP .
2. Angolo ϑ del raggio vettore OP rispetto all'asse polare z , detto *colatitudine*.
3. Angolo φ del piano π , rispetto al piano di riferimento α , detto *longitudine*.

Al punto P dello spazio corrispondono biunivocamente le tre coordinate sferiche (*o polari*) (ρ, θ, φ) .

fig.6.15



Con riferimento alla figura, le coordinate cartesiane si possono facilmente ricavare da quelle sferiche.

Dal triangolo OPP_z , retto in P_z si ottiene:

$$OP_z = z = \rho \cos \vartheta$$

$$P_z P = OQ = \rho \sin \vartheta$$

Dal triangolo $OP_x Q$ retto in P_x si ottiene:

$$OP_x = x = OQ \cdot \cos \varphi = \rho \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \varphi$$

$$P_x Q = y = OQ \cdot \sin \varphi = \rho \cdot \sin \vartheta \cdot \sin \varphi$$

Le coordinate cartesiane rispetto alle sferiche sono date quindi dalle espressioni:

$$\begin{cases} x = \rho \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \varphi \\ y = \rho \cdot \sin \vartheta \cdot \sin \varphi \\ z = \rho \cdot \cos \vartheta \end{cases}$$

6.4 Struttura principale - Giunti principali

Da quanto detto, per posizionare il punto di riferimento *dell'end-effector*, occorre una catena cinematica (*in genere aperta*), avente tre gradi di libertà indipendenti, corrispondenti alla determinazione delle tre coordinate del punto in uno dei riferimenti dello spazio analizzati.

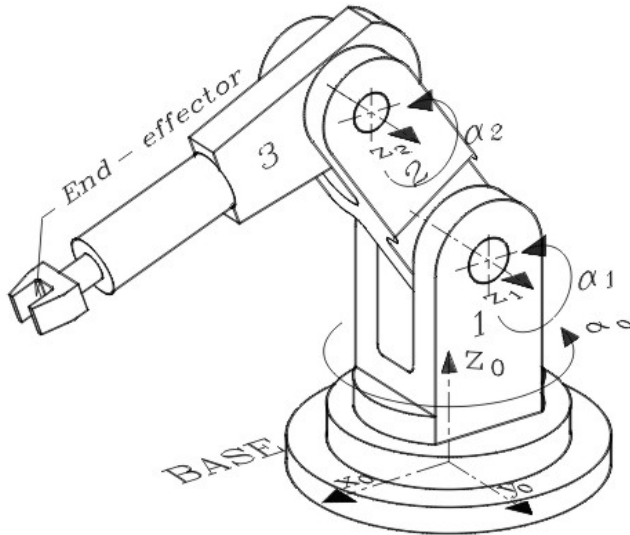
Gli elementi del robot, adibiti al posizionamento del punto di riferimento dell'estremità o *dell'end-effector*, costituiscono la *struttura principale* (*braccio nel robot antropomorfo*) e i giunti specializzati alla loro movimentazione si dicono *principali*.

I giunti hanno un solo grado di libertà, e possono essere, come si è detto, o di traslazione (*prismatici*) o di rotazione (*rotoidali*). Per ottenere i tre gradi di libertà, necessari al posizionamento dell'estremità del robot nello spazio, occorrono *tre giunti principali* che possano fornire tre moti indipendenti agli elementi della struttura principale.

La struttura principale, capace di posizionare il punto di riferimento *dell'end-effector* nello spazio è costituita, usualmente, da una catena cinematica aperta di tre elementi (*principali*), connessi uno di seguito all'altro attraverso tre giunti, dei quali, uno, articola il primo elemento del robot rispetto al riferimento fisso.

Nella figura 6.16 è schematizzata una catena cinematica aperta, composta da tre elementi, connessi con tre giunti rotoidali.

fig. 6.16



- Il primo elemento "1" è connesso alla base fissa con un giunto che gli permette di effettuare una rotazione α_0 attorno all'asse z_0 .
- Il secondo elemento "2" si articola sul primo "1" con un altro giunto rotoidale, che gli permette una rotazione relativa α_1 attorno all'asse z_1 .
- Il terzo elemento "3" si articola sul secondo "2" anch'esso con un giunto rotoidale che gli permette una rotazione relativa α_2 attorno all'asse z_2 .

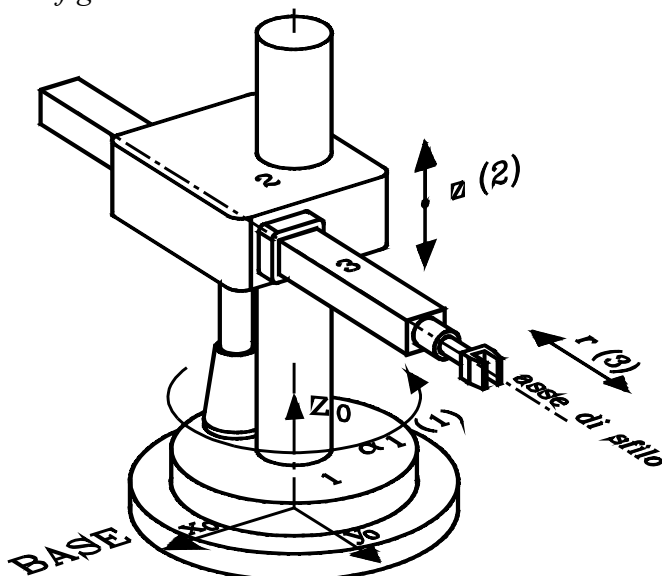
Attraverso le rotazioni $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, il punto di riferimento dell'*end-effector* può raggiungere tutti i punti dello spazio compreso entro un volume, detto *volume di lavoro*.

Le variabili $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, vengono denominate *variabili di giunto*.

Anche nell'esempio di figura 6.17, il punto di riferimento dell'*end-effector* può raggiungere qualsiasi punto dello spazio compreso nel volume di lavoro, attraverso tre elementi connessi con tre giunti.

- Il primo elemento "1" è connesso alla base fissa con un giunto rotoidale che gli permette di effettuare una rotazione α_1 attorno all'asse z_0 .

fig.6.17



- Il secondo elemento "2" può effettuare una traslazione "z" rispetto all'elemento "1" lungo l'asse z_0 della colonna, solidale al primo elemento.
 - Il terzo elemento "3" può effettuare una traslazione di sfilo "r" rispetto all'elemento "2" nella direzione dell'asse di sfilo, normale all'asse z_0 .
- Le variabili di giunto, in ordine dal primo elemento connesso alla base verso l'ultimo connesso con l'estremità, sono: α_0, z, r . Al variare di esse l'estremità della catena cinematica può posizionarsi in qualsiasi punto del volume di lavoro.

In generale, al variare delle variabili di giunto si ottiene una diversa conformazione della struttura principale che può condurre *l'end - effector* in un qualsiasi punto di uno spazio compreso nel volume di lavoro.

Usualmente gli elementi della catena cinematica, i giunti e i rispettivi gradi di libertà da essi ammessi vengono indicati con numeri naturali crescenti, andando dalla base all'estremità del robot.

I gradi di libertà dei giunti della struttura principale si indicano con 1,2,3 rispettivamente dal primo elemento connesso con la base all'ultimo collegato con il polso.

6.4.1 Orientamento nello spazio dell'end - effector

Con i tre gradi di libertà della struttura principale si posiziona nello spazio il punto di riferimento dell'estremità o *dell'end - effector*, ma non ne viene mutato l'orientamento. Questo, in molte operazioni che deve eseguire il robot deve essere variato.

Per orientare nello spazio dell'estremità del robot o *dell'end - effector*, occorre aggiungere alla struttura principale altri elementi, connessi con giunti che forniscano altri gradi di libertà oltre i tre dei giunti principali.

6.4.1.1 Giunti secondari -Polso

La catena cinematica, anch'essa aperta, adibita ad orientare nello spazio l'estremità del robot o *dell'end - effector*, usualmente, viene denominata *polso*. Questo, in riferimento alle funzioni del polso umano, è dotato di movimenti capaci di orientare nello spazio l'oggetto preso tra le dita.

Come si è detto, un oggetto, nello spazio, ha sei gradi di libertà, attraverso i quali può assumere diverse posizioni ed orientamenti. La struttura principale ha tre gradi di libertà, con i quali posiziona *l'end - effector*; per l'orientamento di questo, occorrono altri tre gradi di libertà (*indipendenti*) da attribuire ad altrettanti elementi costituenti il polso.

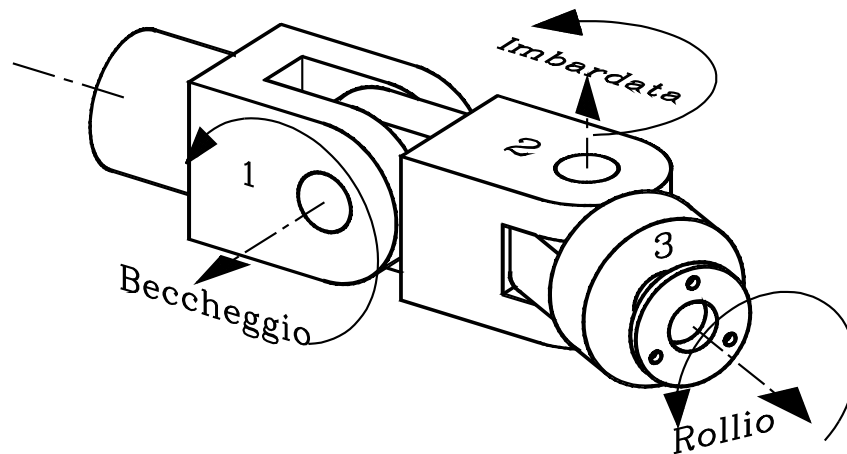
Il polso, usualmente, è costituito da una catena cinematica aperta di tre elementi connessi con giunti rotoidali ad un solo grado di libertà. È preferibile che gli assi di rotazione di questi si incontrino in un solo punto, in modo che la forma del volume di lavoro, definito dalla struttura principale, non venga alterata.

Spesso, quando gli assi di rotazione dei giunti del polso si incontrano in un punto, questo viene utilizzato per definire il volume di lavoro del robot.

I tre movimenti di rotazione possibili del polso assumono particolari denominazioni:

Beccheggio Considerando il polso disteso orizzontalmente, il beccheggio è quella rotazione attorno ad un asse orizzontale, che fa oscillare il punto di riferimento *dell'end - effector* su di un piano verticale (*oscillazione verticale*).

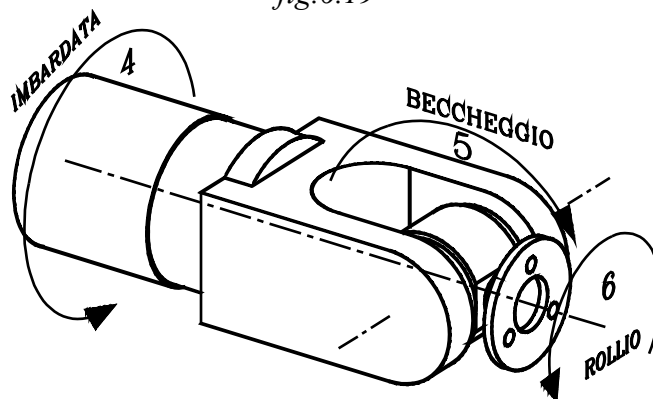
Imbardata L'imbardata è quella rotazione attorno ad un asse verticale che fa oscillare il punto di riferimento *dell'end - effector* su di un piano orizzontale (*oscillazione laterale*).



Rollio I rollio effettua una rotazione *dell'end-effector* attorno ad un asse passante per il suo punto di riferimento. Questo, non subisce alcun spostamento per effetto del rollio.

Nel polso schematizzato in figura i tre assi di rotazione dei giunti non si incontrano in un punto.

fig.6.19



Una configurazione molto usata dai costruttori di robot è quella nella quale la rotazione di imbardata del polso viene sostituita dalla rotazione attorno al suo asse di una appendice contigua al 3° elemento. Al polso vero e proprio vengono demandate le rotazioni di *beccheggio* e *rollio*.

La rotazione dell'appendice all'ultimo elemento della struttura principale, viene ancora denominato *imbardata*; essa, insieme al beccheggio e rollio del polso, riesce ugualmente a dare all'*end-effector* un qualsiasi orientamento nello spazio.

Nella figura è schematizzata detta conformazione. Come si può notare i tre assi di rotazione si incontrano sempre in un punto.

L'*imbardata*, il beccheggio e il rollio vengono, rispettivamente indicati con i numeri 4,5,6.

Si ribadisce che i gradi di libertà 1,2,3 della struttura principale permettono di posizionare il punto di riferimento *dell'end-effector* in qualsiasi punto dello spazio compreso nel volume di lavoro; mentre i gradi di libertà 4,5,6, conferiti al polso o all'insieme dell'ultimo braccio e del polso, sono in grado di orientare comunque nello spazio *l'end-effector*.

6.5 TIPI DI ROBOT RISPETTO ALLA STRUTTURA PRINCIPALE - CARATTERISTICHE

6.5.1 Conformazione geometrica

I robot possono differenziarsi rispetto alla conformazione della struttura principale, dalla tipologia, cioè, dei tre elementi che ne costituiscono la catena cinematica.

La struttura principale determina la *configurazione geometrica del robot*, in quanto a seconda del tipo di giunti impiegati, l'estremità si muove secondo tre assi: cartesiani, cilindrici, o sferici.

Prima di affrontare nel dettaglio la descrizione delle diverse conformazioni dei robot, conviene anticipare alcune caratteristiche, introducendo i parametri più significativi che ne definiscono le prestazioni.

In tal modo potranno meglio descriversi le differenti caratteristiche dei tipi di robot.

6.5.2 Volume di lavoro

Come si è detto, al variare delle variabili dei giunti principali 1, 2, 3, si ha una diversa conformazione di posizione dei tre elementi della struttura principale, che porta il punto di riferimento dell'estremità o *dell'end - effector* in un punto dello spazio circostante il volume occupato dagli elementi del robot e dai suoi accessori.

Si definisce **volume di lavoro del robot** l'insieme di tutti i punti dello spazio raggiungibili dal punto di riferimento dell'estremità (*o dall'end - effector*).

Il volume di lavoro da preferire dipende dal genere di operazioni che il robot dovrà eseguire per adempiere al compito ad esso assegnato. Questo parametro condiziona la scelta sia del tipo che delle dimensioni geometriche del robot.

6.5.3 Capacità di carico

Si riferisce alla massa che può essere applicata alla flangia di attacco *dell'end - effector*.

È evidente che il valore massimo dipende dalla configurazione assunta delle articolazioni del robot. All'aumentare dello sbraccio e degli sfilamenti, aumentano i momenti a cui sono sottoposti gli elementi della catena cinematica principale, con conseguenti deformazioni di inflessione che, oltre un certo limite, assumono valori inaccettabili.

Il dato dichiarato dai costruttori è un valore di riferimento, indipendente dalla configurazione che può assumere la catena cinematica del robot.

Si definisce *capacità di carico o carico statico massimo* la massa in kg massima, applicabile alla flangia di attacco *dell'end - effector*, che il robot può manipolare, con *velocità, accelerazione e accuratezza nominali*, indipendentemente dalla configurazione che può assumere la catena cinematica durante la manipolazione.

6.5.4 Accuratezza -Ripetibilità.

L'esecuzione di un comando di posizione impartito all'estremità del robot avviene con un certo errore: la posizione effettivamente raggiunta è diversa da quella comandata. Inoltre anche l'orientamento *dell'end- effector differisce* da quello ordinato.

È evidente che occorre stabilire una tolleranza ammissibile. Questa dipende dal tipo di lavoro più o meno grossolano che deve essere compiuto dal robot.

Gli errori ammissibili di posizionamento e di orientamento *dell'end - effector* vanno sotto il nome di *Accuratezza* del robot.

Vi è nella esecuzione dei comandi di posizione un altro problema che è importante affrontare e che risulta legato *all'accuratezza*.

In ogni comando di posizione vi è, come si è detto, un errore, che porta *l'end effector* in posizione diversa da quella ordinata.

Ordinando più volte al robot di raggiungere una posizione prefissata, gli errori ottenuti risultano diversi l'uno dall'altro; ne viene, che nei successivi comandi di una stessa posizione, *l'end - effector raggiunge posizioni diverse* da quella di riferimento ordinata.

La *ripetibilità* è la capacità di un robot di porre, entro una certa tolleranza, *l'end - effector*, sempre nella stessa posizione in successivi comandi uguali di posizionamento.

6.5.5 Corse e velocità degli assi

Il robot per compiere il lavoro a cui è adibito, deve variare nel tempo le variabili di giunto, che determinano le articolazioni degli elementi della catena cinematica in modo da condurre *l'end- effector* nelle successive posizioni volute.

Ogni asse, nella movimentazione del robot, può variare il suo parametro di giunto da zero ad un valore massimo: ammette una certa *corsa* in gradi se di rotazione in *mm* se di traslazione

L'end effector deve portarsi da una posizione all'altra con una certa velocità. Questa sarà massima negli spostamenti passivi e moderata nei movimenti di lavoro.

La velocità, partendo da fermo, viene raggiunta con una accelerazione; mentre si ha una decelerazione nel raggiungimento di una posizione con arresto. Un'accelerazione centripeta si ha nell'esecuzione di un arco.

Le accelerazioni provocano forze di inerzia e momenti, dovute alle masse in moto che, sollecitando la struttura, possono limitare l'accuratezza di posizionamento.

I costruttori di robot in genere dichiarano le velocità massime raggiungibili dai singoli assi come variazione della variabile di giunto nell'unità di tempo: in $^\circ/s$ se è un asse di rotazione o m/s se di traslazione.

6.5.6 Numero di assi di un robot

Viene chiamato asse ogni grado di libertà del robot. Essendo ogni elemento della struttura cinematica aperta unito al consecutivo con un giunto ad un solo grado di libertà, il *numero di assi* di un robot coincide con il numero totale di giunti che esso possiede.

Affinché *l'end - effector* possa raggiungere un qualsiasi punto dello spazio compreso nel volume di lavoro e assumere una qualsiasi orientazione, occorrono *sei gradi di libertà*: il robot deve possedere sei assi indipendenti: tre costituenti la struttura principale, per il posizionamento nello spazio e tre nel polso, per l'orientamento.

Non sempre il lavoro che deve essere meccanizzato richiede sei gradi di libertà. Il robot è scelto in base al tipo di lavoro che dovrà svolgere; esso possederà i gradi di libertà che necessitano. Non conviene, specialmente nelle operazioni di assemblaggio, utilizzare gradi di libertà in più dello stretto necessario: ogni asse in più comporta una articolazione in più a scapito della precisione e della ripetibilità.

6.5.7 TIPOLOGIA RISPETTO ALLA CONFORMAZIONE GEOMETRICA

Una classificazione importante dei robot è fatta rispetto alla configurazione della struttura principale, dalla quale dipende il volume di lavoro. Questo può essere riguardato come una parte di una figura solida tipo.

Principalmente vi sono tre figure solide dalle quali si possono considerare ricavati i volumi di lavoro come porzioni di esse: *Parallelepipedo, cilindro, sfera*.

Una classificazione più puntuale si ricava dai tipi di giunti che collegano gli elementi della catena cinematica costituente la struttura principale. Quelli di rotazione vengono indicati con la lettera *R*, quelli di traslazione con la lettera *T* oppure *P* (prismatico).

La struttura principale può essere così contraddistinta, indicando in ordine i giunti che la compongono, partendo dalla base e andando verso l'estremità collegata al polso. Con questo criterio si distinguono i seguenti tipi di robot:

Robot cartesiani Nell'ordine anzidetto, i giunti che li compongono sono del tipo *TTT*.

Il volume di lavoro è un parallelepipedo.

Robot cilindrici I giunti che li compongono sono del tipo *RTT*.

Il volume di lavoro è una porzione di cilindro.

Robot sferici I giunti che li compongono sono del tipo *RRT*.

Il volume di lavoro è una porzione di sfera.

Robot articolati verticali I giunti che li compongono sono del tipo *RRR*.

Il volume di lavoro è una porzione di sfera.

Robot articolati orizzontali I giunti che li compongono sono del tipo *RRT*.

Il volume di lavoro è una porzione di cilindro.

6.5.7.1 ROBOT CARTESIANI

Un robot di tipo cartesiano muove l'estremità della catena cinematica principale con tre componenti di traslazioni, secondo gli assi cartesiani: da cui il nome.

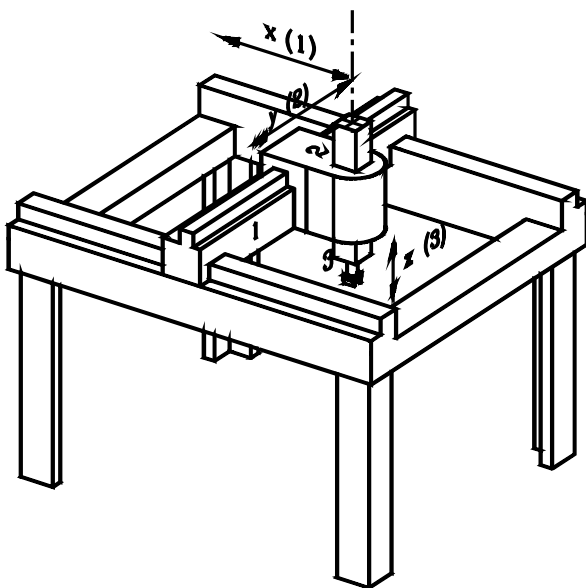


fig. 6.20

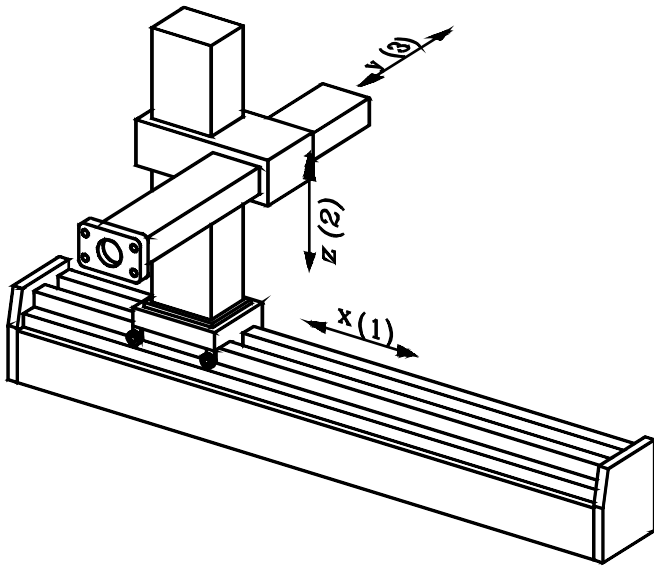


fig.6.21

I tre moti principali di traslazione si ottengono con tre giunti prismatici (di tipo *TTT*) orientati secondo i tre assi cartesiani di riferimento.

Il volume di lavoro è un parallelepipedo con gli spigoli paralleli agli assi di movimento dei giunti; e, a seconda del tipo di lavoro, può assumere costruttivamente piccole dimensioni, con corse inferiori al metro, fino a valori dell'ordine delle decine di metri.

Si possono distinguere due tipi di robot cartesiani con struttura fissa a portale: *fig.6.20* o a montante: *fig.6.21*

Caratteristiche

Le caratteristiche comuni ai due tipi di robot cartesiani si possono riassumere nei seguenti punti.

- *Rigidità della struttura*
Il robot cartesiano presenta, tra i diversi tipi, quella che possiede la struttura più rigida che si possa progettare e che permette di manipolare anche elevati carichi, con limitazione delle inflessioni, garantendo così buona precisione, accuratezza e ripetibilità.
- *Precisione - accuratezza - ripetibilità*
I robot cartesiani, specialmente quelli a portale, permettono di raggiungere la posizione ordinata con elevata accuratezza e precisione.
La ripetibilità può raggiungere valori dell'ordine $\pm 0,05 \div 0,15 \text{ mm}$ in robot per assemblaggio e manipolazione di particolari di media e piccola dimensione (*Robot P-Master - 3 25 della COMAU*).
- *Capacità di carico*
I robot cartesiani presentano la struttura più adatta alla manipolazione di elevati carichi di lavoro, che possono raggiungere, nei tipi a portale, valori fino a 400 kg.
- *Motori utilizzati*

Considerata la rigidità della struttura, nei robot cartesiani possono essere utilizzati anche motori in corrente continua a magneti permanenti il cui peso viene scaricato sulla parte fissa. Per limitare, però, l'appesantimento della struttura, già sollecitata dagli elevati carichi manipolati, molti costruttori utilizzano motori AC Brushless.

- *Tipo di guide*

Per ottenere una elevata precisione vengono utilizzate guide prismatiche, che presentano però il problema di dover limitare gli attriti. Questi possono essere attenuati utilizzando cuscinetti a rulli, oppure speciali pattini ad aria con spostamento pneumatico.

- *Trasduttori*

Usualmente i trasduttori utilizzati sono di tipo assoluto, in modo che, in mancanza di alimentazione, il robot ricordi tutti i parametri di posizionamento e possa poi iniziare di nuovo dal punto in cui è stato interrotto per proseguire il lavoro programmato.

I trasduttori possono essere degli encoder, che però presentano l'inconveniente di sporcarsi in particolari ambienti industriali.

Molto usati sono i resolver di tipo assoluto.

- *Costi*

Le buone caratteristiche di precisione, ripetibilità, elevata capacità di carico vengono ottenute con strutture rigide e l'utilizzo di guide prismatiche, che comportano un più elevato costo rispetto agli altri tipi di robot. Questo è uno dei fattori che va tenuto conto nella scelta del tipo di robot da utilizzare per svolgere una particolare lavorazione.

- *Polso*

Il robot cartesiano è usato nei casi nei quali la manipolazione del carico o di assemblaggio avviene con movimenti che si svolgono, principalmente, secondo i tre assi cartesiani. L'orientamento del pezzo da manipolare o assemblare su un altro potrebbe non necessitare di alcuna variazione rispetto al momento di presa, oppure richiedere solamente una rotazione attorno all'asse dell'ultimo elemento della struttura principale. In quest'ultimo caso il polso possiede il solo 4° asse di rotazione, detto rollio e si ha, in totale, un *robot a quattro assi*. Sono disponibili, come opzioni, a seconda delle necessità operative, polsi che possiedono il 5° o anche il 6° asse. Molto usati sono i polsi che possiedono il rollio o il beccheggio.

- *Volume di lavoro*

Il volume di lavoro è un parallelepipedo con gli spigoli aventi le dimensioni delle corse massime dei tre elementi strutturali che si spostano secondo gli assi x, y, z .

6.5.7.1.1 Robot cartesiani a portale

Questo tipo di robot è la soluzione più vantaggiosa nei lavori in cui occorre la manipolazione di carichi elevati con corse che possono arrivare a valori sull'asse y fino a 20 m.

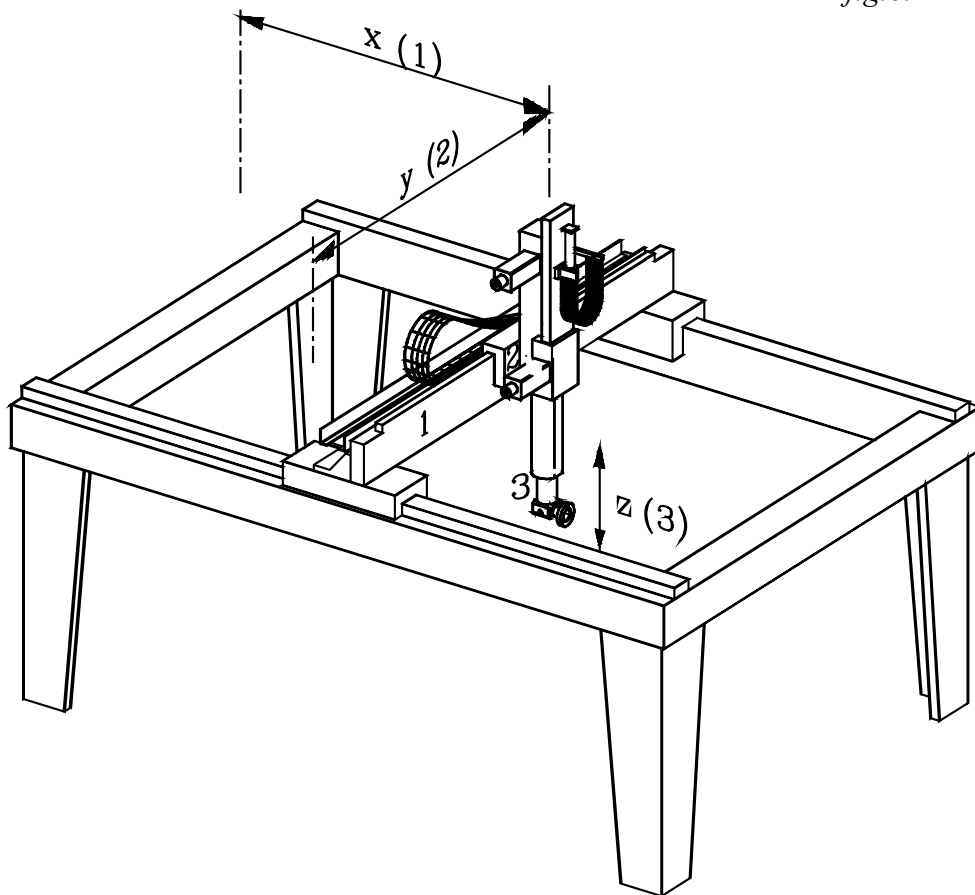
La soluzione a portale è anche particolarmente adatta a risolvere problemi di assemblaggio di pezzi di media e piccola dimensione, dove occorre una elevata rigidità della struttura che garantisca una elevata accuratezza e ripetibilità.

La struttura a portale può essere lineare od aerea, ed è modulare, in modo da permettere corse degli assi variabili e dimensioni strutturali che si adattino alle esigenze dell'applicazione.

Il portale assicura il migliore sfruttamento dello spazio disponibile di lavoro rispetto all'ingombro della struttura. Può manipolare pezzi tra più macchine utensili compresi entro il portale. È quindi facile l'integrazione di esso nei nuovi impianti, nei quali le macchine utensili

possono essere sistemate facilmente nel volume di lavoro; mentre nei vecchi la possibile integrazione è legata alla sistemazione attuale dei posti di lavoro.

fig.6.22



Applicazioni

Nelle grosse strutture:

- Manipolazione di particolari di peso elevato.
- Carico - scarico di macchine utensili.
- Saldatura a punti nei quali si possono adottare allestimenti speciali.

Nelle strutture più compatte e contenute:

- Assemblaggio - manipolazione.
- Sbavatura - avvitatura.

6.5.7.1.2 Robot cartesiani a montante

Questi tipi di robot (schema *fig.6.21*) sono adatti per effettuare manipolazioni, operazioni su una linea di lavoro rettilinea.

Vengono posti ai bordi della linea di manipolazione, integrandosi con facilità con essa, anche nei vecchi impianti, ove le varie macchine utensili sono poste su una direttrice rettilinea.

I robot cartesiani a montante presentano una minore rigidità rispetto a quelli a portale, in quanto il carico e il conseguente momento si scarica sull'unico montante, che è sollecitato ad inflettersi.

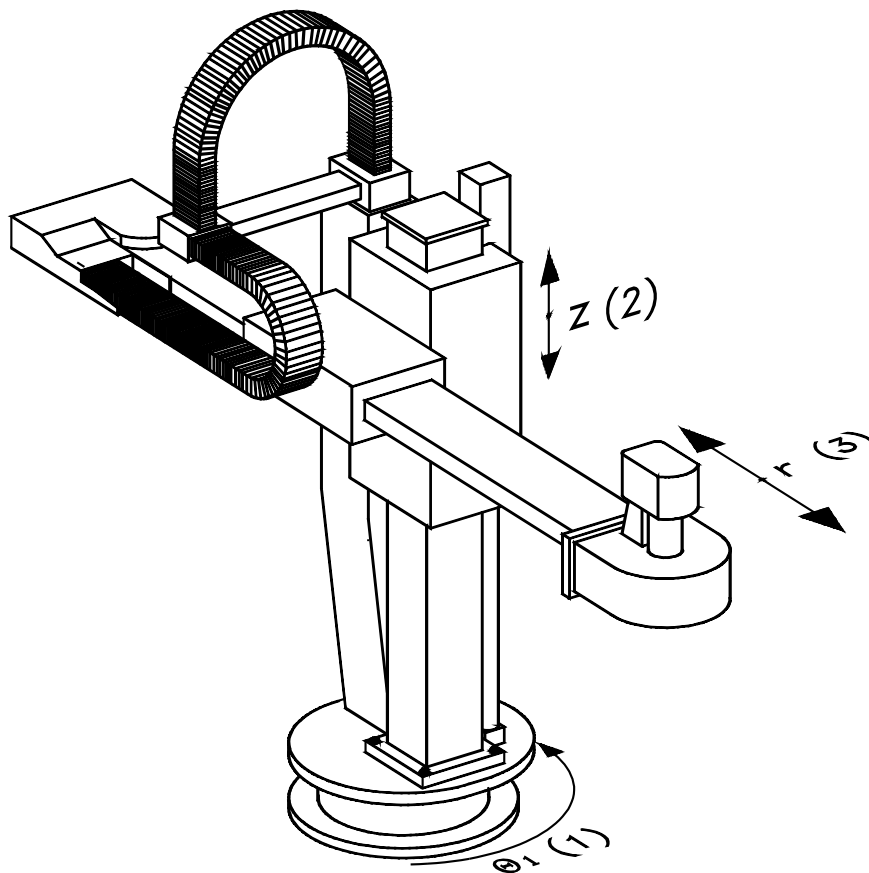
I robot a montante hanno una minore capacità di carico di quelli a portale, e, a parità di carico, per ottenere la stessa precisione e ripetibilità occorre irrigidire le strutture.

Le applicazioni dei robot a montante, tenuto conto delle limitazioni dette, sono le stesse di quelli a portale.

6.5.7.2 ROBOT CILINDRICI - Tipo RTT

I robot cilindrici vengono così denominati perché i tre elementi della struttura principale portano l'*end-effector* nello spazio del volume di lavoro con spostamenti secondo le coordinate cilindriche: θ_1, z, r

fig.6.23



Considerando così lo schema del robot cilindrico di *fig.6.23* (vedere anche *fig. 6.17*), l'elemento n°1 è costituito dalla piattaforma rotante dell'angolo θ_1 (coordinata cilindrica 1), attorno all'asse verticale z_0 , solidale alla base di fissaggio.

Il giunto 1, che collega il primo elemento alla base di fissaggio, è di tipo rotoidale R.

Solidale alla piattaforma rotante vi è un montante, lungo il quale scorre verticalmente il secondo elemento 2, per mezzo di un giunto prismatico: di tipo P. Lo spostamento verticale della mensola costituente l'elemento 2, dà la coordinata cilindrica z di tipo T (coordinata 2 del robot) che comunica al polso uno spostamento verticale.

Sulla mensola, elemento 2, è ricavata una guida prismatica, nella quale si investe e scorre l'elemento 3, che comunica al polso uno spostamento radiale r (detto *sfilo*), di allontanamento o avvicinamento dall'asse di riferimento z_0 .

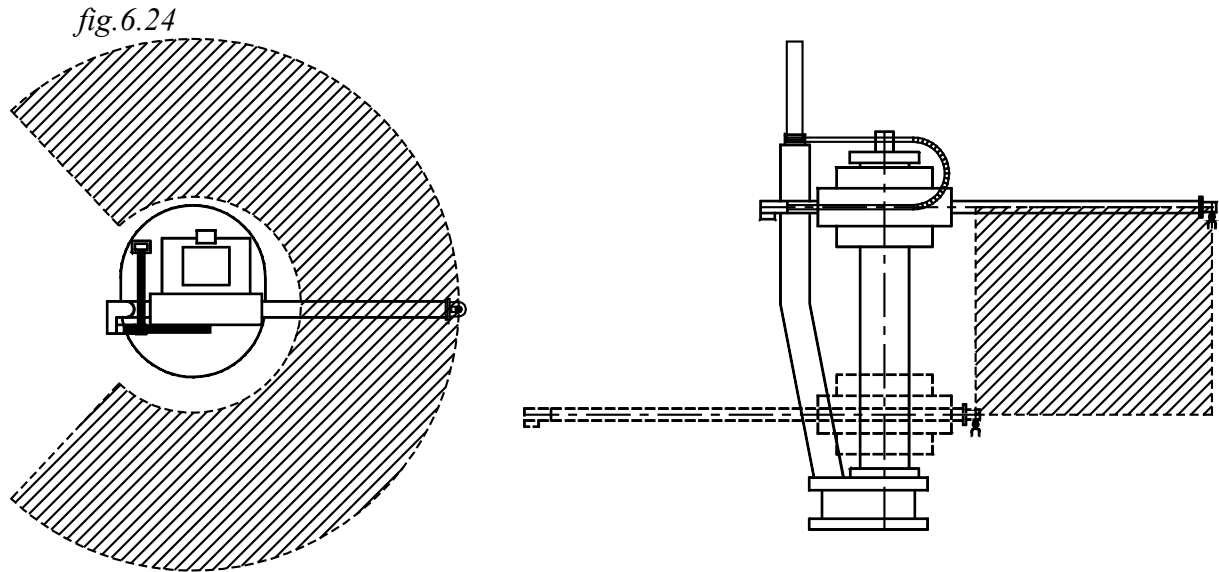
Lo spostamento radiale r dell'elemento 3 dà la terza coordinata cilindrica.

Caratteristiche

Le caratteristiche dei robot cilindrici si possono riassumere nei seguenti punti.

- *Rigidità della struttura*
Il robot cilindrico presenta una geometria strutturale con sbalzi, che determinano dei momenti provocati dal carico e che vanno a sollecitare i tre elementi della struttura principale, con conseguenti inflessioni, in special modo, sullo sfilo e sul montante. Per limitare queste, che si ripercuotono nativamente sulla precisione, accuratezza e ripetibilità, occorre irrigidire la struttura.
- *Precisione - accuratezza - ripetibilità*
Pur irrigidendo la strutture del robot cilindrico, a parità di carico, la sua geometria è tale da non permettere di ottenere la precisione e ripetibilità del robot cartesiano.
Con carichi modesti e strutture rigide si possono ottenere ripetibilità dell'ordine dello ± 0.1 mm
È evidente che la precisione accuratezza e ripetibilità nei robot cilindrici varia a seconda dello sfilo, ossia della distanza del carico dall'asse di rotazione z_0 : all'aumentare di questa diminuiscono quelle.
- *Capacità di carico*
I robot cilindrici sono adatti a manipolare piccoli e medi carichi.
- *Attuatori*
I robot cilindrici si prestano, in comandi di tipo ON/OFF, ad utilizzare attuatori pneumatici con finecorsa per il controllo di posizione e PLC per controllo del programma sequenziale.
Nelle movimentazioni, con controllo feedback sugli assi, vengono adoperati, per limitare l'appesantimento della struttura motori AC Brushless.
- *Trasduttori*
Come per i cartesiani, usualmente, i trasduttori utilizzati sono di tipo assoluto, in modo che, in mancanza di alimentazione, il robot ricordi tutti i parametri di posizionamento e possa poi iniziare di nuovo dal punto in cui è stato interrotto per proseguire il lavoro programmato.

I trasduttori possono essere degli encoder, che però presentano l'inconveniente di sporcarsi in particolari ambienti industriali.
Molto usati sono i resolver di tipo assoluto.
- *Polso*
Il robot cilindrico è adatto alla manipolazioni di pezzi posti in un volume di lavoro costituito da una porzione di cilindro. L'orientamento del pezzo da manipolare o assemblare su un altro potrebbe non necessitare di alcuna variazione rispetto al momento di presa, oppure richiedere solamente una rotazione attorno all'asse dell'ultimo elemento della struttura principale. In quest'ultimo caso il polso possiede il solo 4° asse di rotazione detto rollio e si ha, in totale, un *robot a quattro assi*. Sono disponibili, come opzioni, a seconda delle necessità operative, polsi che possiedono il 5° o anche il 6° asse. Molto usati sono i polsi che possiedono il rollio o il beccheggio.
- *Volume di lavoro*



Il volume di lavoro è in pratica costituito da una porzione dello spazio compreso tra un cilindro esterno di raggio corrispondente al massimo sfilo ed uno interno cui raggio è dato dal minimo sfilo: fig.6.24.

Applicazioni

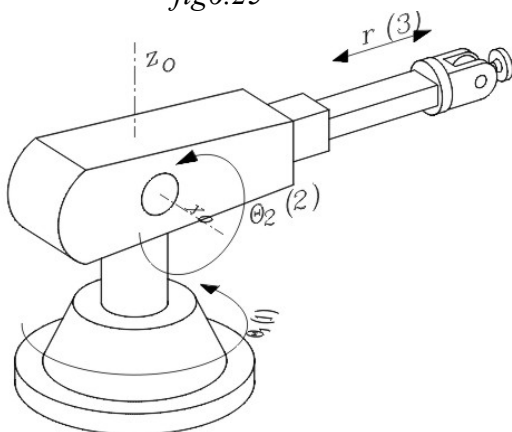
I robot cilindrici sono particolarmente adatti alla manipolazione e assemblaggio di pezzi, posti in un'area circolare.

- Assemblaggio di precisione (MAST- 3 RH della COMAU).
- Pallettizzazione / Spallettizzazione di pezzi.
- Carico scarico e ribaltamento.

6.5.7.3 ROBOT SFERICO - Tipo RRT

In questo tipo di robot la struttura principale posiziona nello spazio l'estremità di riferimento attraverso tre moti elementari, che si svolgono secondo le coordinate polari (sferiche).

fig.6.25



Si ha una rotazione θ_1 attorno all'asse verticale z_0 , una rotazione θ_2 attorno all'asse orizzontale x_0 ed uno sfilo r in direzione radiale.

Questi tipi di robot presentano una elevata versatilità per muovere l'*end-effector* in una porzione di sfera. Utilizzati per operazioni di saldatura, verniciatura.

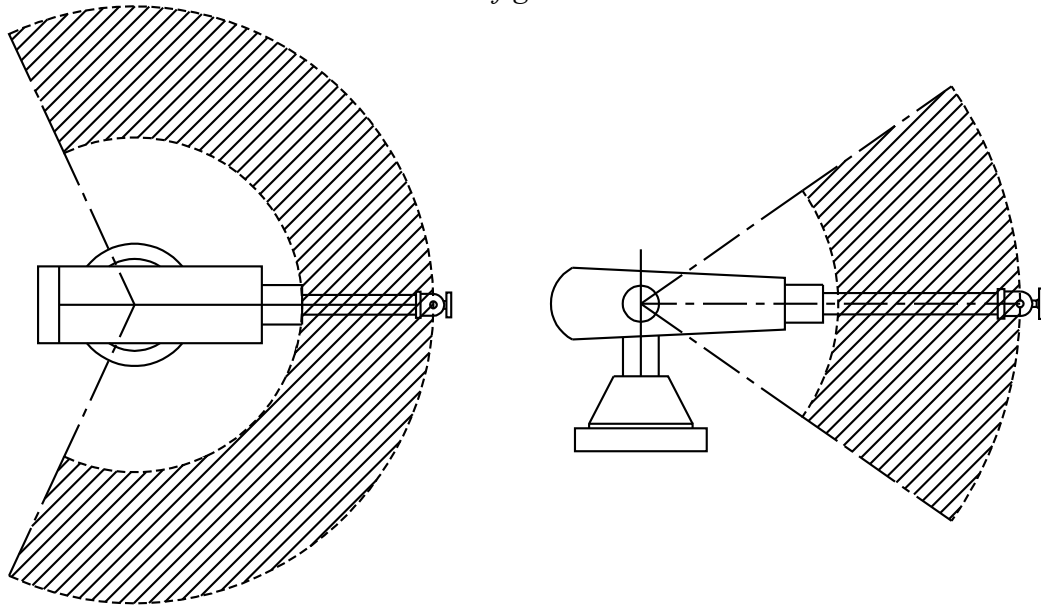
Presentano l'inconveniente di utilizzare un giunto prismatico con la necessità di trasformare il moto rotatorio in rettilineo, nel caso che vengano impiegati attuatori elettrici.

Data la particolare conformazione del robot, per il moto dei giunti si adattano ad essere adoperati attuatori oleoidraulici: motori a palmole per la rotazione e cilindri idraulici per lo sfilo.

Oggi con lo sviluppo degli attuatori elettrici, i robot sferici sono stati sostituiti dagli articolati che impiegano tutti giunti rotoidali, meno costosi e di più facile costruzione.

Il volume di lavoro è una porzione di sfera.

fig.6.26



6.5.7.4 ROBOT ANTROPOMORFO - Tipo RRR

La struttura principale ricorda quella di un braccio umano, articolato al corpo sulla spalla: da cui l'aggettivo di *antropomorfo*. Essa è costituita:

- da un *corpo* (*colonna o base*), costituente l'elemento 1, che può ruotare attorno ad un asse perpendicolare al piede di fissaggio.
- da un braccio, elemento 2, che si articola con il corpo, nella sua estremità superiore opposta al piede, attraverso un giunto rotoidale, detto *spalla*.
- da un avambraccio, elemento 3, che si articola con il braccio, attraverso un giunto detto *gomito*.

Si osservi che, disposta la base del robot in posizione verticale, i due giunti: *spalla* e *gomito*, presentano gli assi di rotazione nella direzione orizzontale e paralleli tra loro; in tal modo, i movimenti del *braccio* ed *avambraccio* fanno descrivere all'estremità del robot una traiettoria posta su di un piano verticale. Per questo il robot antropomorfo viene anche denominato "*robot articolato verticale*".

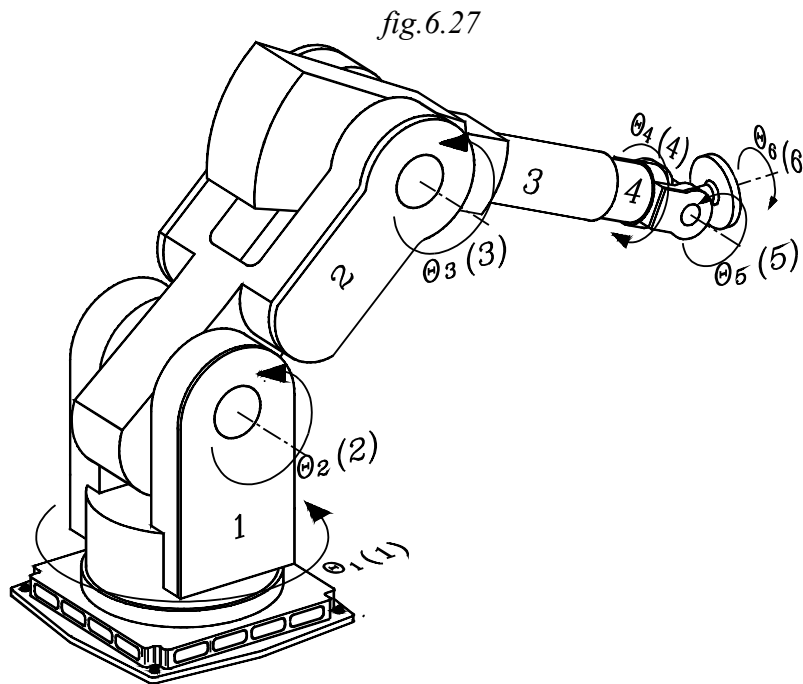
I giunti della struttura principale dei robot antropomorfi sono tutti di tipo rotoidale e risultano meno costosi e di più facile costruzione rispetto a quelli prismatici impiegati nei tre assi dei robot cartesiani e in due di quelli cilindrici. Le articolazione dei giunti rotoidali si ottengono con cuscinetti volventi di grande diametro in modo da permettere la sistemazione dei motori nel centro della cerniera.

Il polso

Il polso, usualmente ha tre gradi di libertà: 4,5,6, rispettivamente: *imbardata*, *beccheggio*, *rollio* (fig.6.18 fig6.19), con i quali può orientare *l'end-effector* in qualsiasi direzione nello spazio.

La configurazione più usata per il polso è quella nella quale *l'imbardata* viene sostituita dalla rotazione attorno al suo asse dell'appendice posta estremità dell'avambraccio fig6.19.

In tal modo i tre assi di rotazione dei giunti rotoidali del polso si incontrano in un punto, conferendo al polso una notevole capacità di orientamento in uno spazio limitato.



La conformazione del braccio del robot antropomorfo gli conferisce una particolare abilità di posizionare ed orientare l'*end-effector* anche in posti di difficile accesso, come penetrare entro cassoni per prelevare pezzi o lavorare al di là di ostacoli sfruttando il moto dei tre assi del polso.

La possibilità di poter posizionare l'*end-effector* anche in posti di difficile accesso viene facilitata dal particolare montaggio del piede di fissaggio che può essere posto sul pavimento, sul soffitto o su di una parete.

Caratteristiche

Le caratteristiche dei robot antropomorfi si possono riassumere nei seguenti punti.

- *Struttura - Rigidezza*

Il robot antropomorfo presenta una struttura con molti sbalzi. Il carico manipolato determina momenti sugli elementi strutturali con sollecitazioni a flessione e tendono a provocare deformazioni. Per limitare queste, che si ripercuotono nativamente sulla precisione, accuratezza e ripetibilità, occorre irrigidire la struttura.

Oltre al problema di irrigidimento occorre soddisfare quello di leggerezza delle strutture, in quanto, nelle accelerazioni con braccio disteso si ottengono forze di inerzia dipendenti dalla massa strutturale.

Per soddisfare dette esigenze si adoperano strutture scatolari. Queste poi vengono sfruttate per far percorrere nel suo interno cavi elettrici di cablaggio e tubazioni per l'aria compressa, utilizzata per gli azionamenti di presa dell'*end-effector*.

- *Precisione - accuratezza - ripetibilità*

La conformazione del robot, che richiede, per il suo funzionamento, notevoli sbalzi del carico rispetto alla base, penalizza la precisione, accuratezza e ripetibilità ottenibili.

Con carichi modesti (6 -12kg) e strutture rigide si possono ottenere ripetibilità dell'ordine dello ± 0.1 mm.

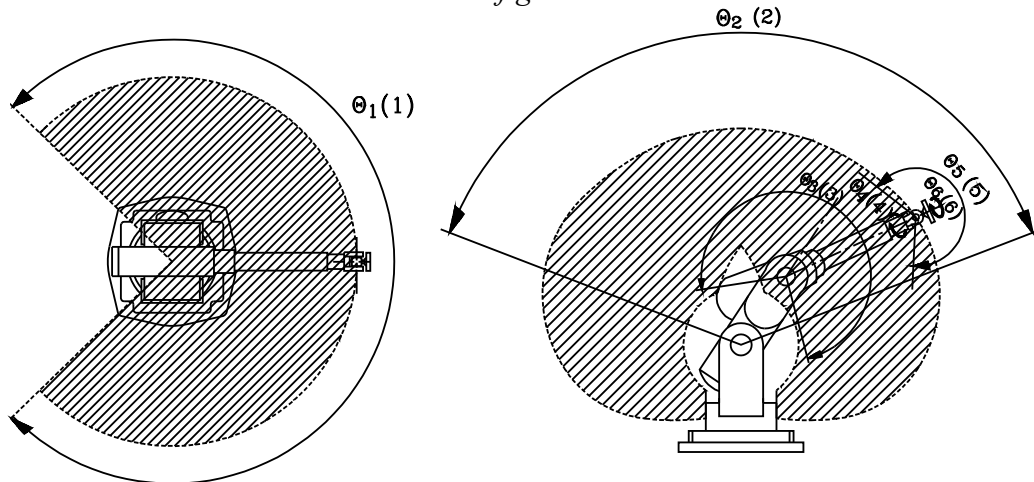
Per capacità di carico maggiore si hanno ripetibilità dell'ordine 0,5 mm.

È evidente che la precisione accuratezza e ripetibilità nei robot cilindrici varia a seconda dello sfilo, ossia della distanza del carico dall'asse di rotazione Z_0 : all'aumentare di questa diminuiscono quelle.

- *Capacità di carico*

I robot antropomorfi sono adatti a manipolare piccoli e medi carichi fino all'ordine di 120 kg.

fig.6.28



- *Attuatori*

Il tipo di motore usualmente utilizzato è AC brushless per la mancanza di contatti striscianti e per la sua leggerezza e limitazione di ingombro. Tutti gli assi sono comandati da uno specifico motore tramite un riduttore.

- *Trasduttori*

I trasduttori utilizzati sono di tipo assoluto, in modo che, in mancanza di alimentazione, il robot ricordi tutti i parametri di posizionamento e possa poi iniziare di nuovo dal punto in cui è stato interrotto per proseguire il lavoro programmato.

I trasduttori possono essere degli encoder, che però presentano l'inconveniente di sporcarsi in particolari ambienti industriali.

Molto usati sono i resolver, montati in asse ai motori per realizzare letture di posizione di tipo assoluto ciclico.

Su ogni asse del robot è posto un microinterruttore che stabilisce la posizione di zero.

L'azzeramento è necessario solo a seguito di un arresto di emergenza o dopo aver mosso il robot con comandi manuali.

- *Volume di lavoro*

Il volume di lavoro si può considerare una porzione di sfera, come rappresentato in fig.6.26

Applicazioni

I robot antropomorfi per la loro conformazione sono quelli più adatti a sostituire l'uomo in operazioni di manipolazione e lavorazioni con l'ausilio di attrezzi quali la saldatura verniciatura ecc. nelle quali non occorre una elevata precisione.

Si possono quindi distinguere robot adatti alla manipolazione, al carico e scarico o alla esecuzione di lavorazioni mediante particolari attrezzature. Questi ultimi debbono avere un più alto grado di ripetibilità, che può raggiungere valori dell'ordine di 0.1 mm.

Si elencano qui alcune applicazioni:

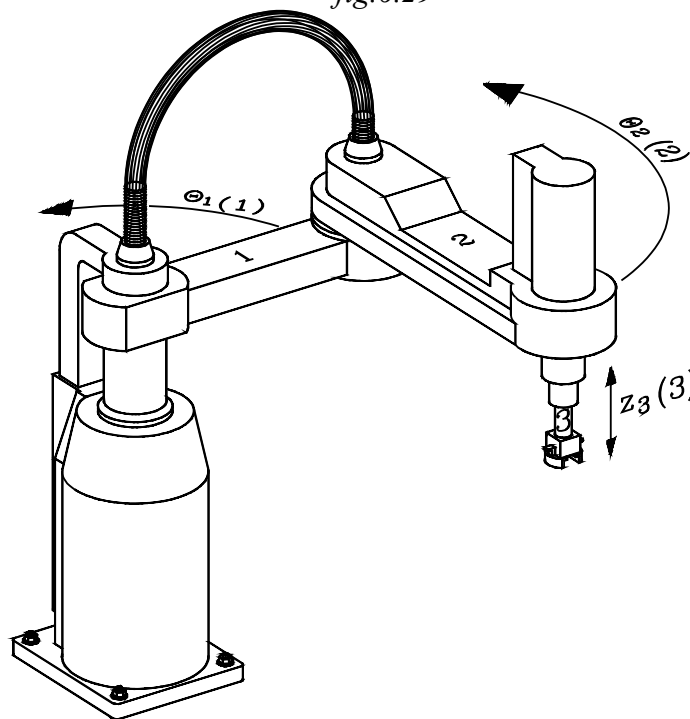
- Carico e scarico di pezzi.
- Carico scarico di macchine utensili.

- Manipolazione\pallettizzazione.
- Montaggio di particolari, come per esempio: *montaggio automatico di cerniere sulle porte di autoveicoli, montaggio automatico delle ruote su autoveicoli...*
- Verniciatura.
- Saldatura a punti.
- Saldatura ad arco continuo.
- Applicazioni utilizzando tecnologia laser (il fascio laser passa attraverso la struttura terminale e viene inviato in una particolare testa di focalizzazione).
- lavorazioni di sbavatura, foratura, avvitatura.
- Stazione di lavaggio.

6.4.5 ROBOT SCARA - ARTICOLATO ORIZZONTALI - Tipo RRT

Il robot è costituito da un corpo posto verticalmente, al quale si collega nell'estremità superiore un braccio, le cui articolazioni fanno muovere i due elementi 1,2 su di un piano orizzontale (da cui la denominazione *articolato orizzontale*).

fig.6.29



Come si può notare dallo schema del robot rappresentato in figura 6.29, il braccio "1" può ruotare dell'angolo θ_1 rispetto all'asse verticale del corpo.

All'estremità del braccio "1", opposta a quella collegata al corpo, si snoda il braccio "2", che può ruotare rispetto a quello di un angolo θ_2 .

L'ultimo elemento "3" della struttura principale è posto all'estremità dell'elemento "2", opposta a quella collegata all'elemento "1", e può compiere uno spostamento "z" in direzione verticale.

Le due rotazioni θ_1 , θ_2 e la traslazione z permettono all'end effector di posizionarsi entro uno spazio pressoché cilindrico, posto attorno al corpo del robot.

I robot SCARA sono costruiti in piccole dimensioni per manipolare piccoli carichi. La conformazione dei bracci, che ammettono moti rotatori sul piano orizzontale, li rende molto rigidi per sollecitazioni in direzione verticale, ottenendo buone precisioni e ripetibilità. Sono adatti ad operazioni di assemblaggio.

Occorre notare che lo spostamento verticale in direzione del carico avviene sull'ultimo elemento e quindi la parte in moto traslatorio ha piccola massa con conseguente limitata inerzia. Nei robot cilindrici, invece, lo spostamento verticale è conferito al primo elemento che supporta tutti gli altri, determinando una notevole massa in moto traslatorio verticale, con notevole inerzia.

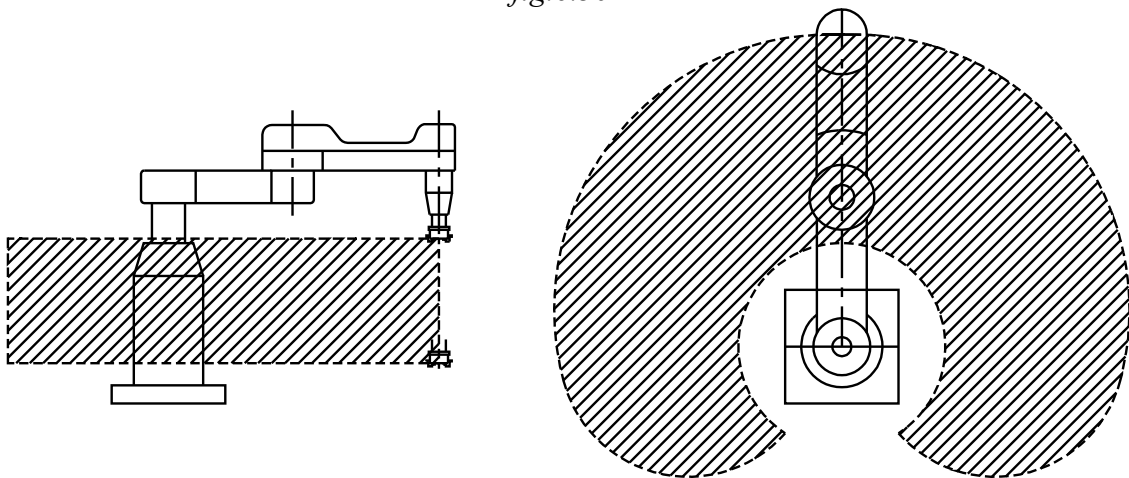
La denominazione SCARA deriva dalla caratteristica del robot di presentare un comportamento di deformazione diverso alle sollecitazioni verticali e orizzontali: più rigido rispetto alle prime, meno rispetto alle seconde (Selective Compliance Assembly Robot Arm).

Caratteristiche

Le caratteristiche dei robot SCARA si possono riassumere nei seguenti punti.

- *Struttura - Rigidezza*
Il robot SCARA è di limitate dimensioni e, come si è detto, data la sua conformazione strutturale, presenta una rigidezza differenziata: più elevata nella direzione verticale rispetto alla orizzontale.
- *Precisione - accuratezza - ripetibilità*
Con raggi di azione dell'ordine di 500 mm si possono ottenere ripetibilità dell'ordine di 0,025 mm.
- *Velocità*
Data la leggerezza e la limitata inerzia il robot SCARA possono raggiungere elevate velocità di rotazione $300\div 480^\circ/s$. la velocità di traslazione può essere dell'ordine di 1000÷1500 mm/s.
- *Capacità di carico*
I robot SCARA sono adatti a manipolare piccoli carichi fino all'ordine decina di kg.
- *Polso*
Il robot SCARA è particolarmente adatto a effettuare assemblaggi nella direzione verticale. Il polso possiede normalmente la rotazione attorno al proprio asse (rollio) per poter orientare meglio il pezzo da assemblare. Vi sono però dei polsi opzionali con 2 o 3 assi che si aggiungono a quelli della struttura principale.
- *Volume di lavoro*
Il volume di lavoro è una particolare forma cilindrica attorno all'asse del robot.

fig.6.30



Applicazioni

I robot SCARA sono di piccole dimensioni anche da banco, che presentano una elevata rigidità nella direzione del carico verticale, ottenendo così elevata precisione accuratezza e ripetibilità.

Lo SCARA è un robot ideale per operazioni di assemblaggio di manipolazione di piccoli carichi. Può effettuare anche lavorazioni di avvitatura ...

6.5 LA SCIENZA ROBOTICA

La parte scientifica della robotica si interessa di studiare la cinematica e la dinamica che regolano i moti degli elementi del robot, in modo da stabilire la dipendenza tra le posizioni e i moti di questi e quelle del punto estremo di riferimento.

Cinematica diretta - Cinematica inversa

Dal punto di vista cinematico si presentano due problemi da dover risolvere.

Come si è detto il robot è costituito da una struttura cinematica aperta di n elementi, connessi da altrettanti giunti ad un solo grado di libertà.

Per posizionare l'estremità di riferimento si utilizzano i tre gradi di libertà della struttura principale e per l'orientamento i gradi di libertà del polso. Affinché poi l'orientamento nello spazio possa essere fissato in qualsiasi direzione, occorre che il polso abbia tre gradi di libertà che si aggiungono agli altri tre della struttura principale.

Per poter posizionare e orientare *l'end-effector* in qualsiasi punto dello spazio, compreso nel volume di lavoro, il robot deve possedere 6 gradi di libertà indipendenti. È, quindi costituito da 6 elementi, connessi da 6 giunti ad un solo grado di libertà.

Gli n elementi si articolano nei giunti ad un solo grado di libertà. Questi permettono un movimento relativo dei due elementi connessi: di rotazione " θ " i rotoidali, di traslazione "z" i prismatici.

La rotazione o lo spostamento relativo di un elemento rispetto all'altro che si presenta nel giunto viene denominato *parametro di giunto*.

È evidente che assegnando un valore a tutti i parametri di giunto si otterrà una posizione ed una sola dell'estremità di riferimento del robot.

Il primo problema che si presenta, detto *di cinematica diretta*, è quello di determinare la posizione dell'estremità del robot, rispetto ad un riferimento fisso (base di fissaggio), conosciti gli n parametri dei giunti.

Il problema di cinematica diretta ammette una sola soluzione: assegnando ad ogni parametro di giunto un valore, si ottiene, univocamente, una posizione dell'estremità della catena cinematica aperta rispetto ad un riferimento fisso, preso, in genere, solidale alla base di fissaggio del robot.

Si presenta anche di dover risolvere il problema inverso, *detto di cinematica inversa*, consistente nel voler determinare i valori dei parametri dei giunti che corrispondano ad una posizione dell'estremità della catena cinematica.

Data, cioè, una posizione dell'estremità del robot rispetto ad un riferimento fisso, ci si domanda quali siano i valori dei parametri dei giunti che portino detta estremità nel punto prefissato.

Il problema della cinematica inversa in genere, non ammette un'unica soluzione o addirittura non ne ammette nessuna.

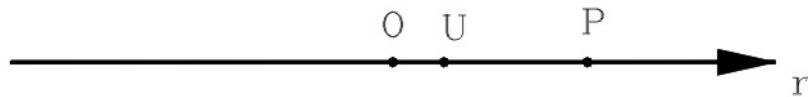
Si consideri il caso di fissare un punto entro la struttura: non vi è nessuna n^{pla} di parametri di giunto che porti l'estremità della catena cinematica in quel punto prefissato.

6.6 MOVIMENTI DI UN ROBOT TEORIA DELLE MATRICI DI TRASFORMAZIONI

6.6.1 Coordinate omogenee di una retta orientata

Sia data una retta r orientata di origine O e punto unitario U . $OU=1$

fig.6.6.1



Ad ogni punto P di r è associata una ascissa x

Ad ogni x si faccia corrispondere un coppia di numeri x_1, x_3 tali che:

$$x = \frac{x_1}{x_3}$$

Ora data una coppia di numeri x_1, x_3 ad essi vi corrisponde uno e un solo numero $x = \frac{x_1}{x_3}$ e a

questo un solo punto P di ascissa x .

Viceversa, dato un punto $P \in r$ ad esso vi corrisponde una sola ascissa x , ma a questa vi corrispondono un infinità di coppie di numeri x_1, x_3 tali che $x = \frac{x_1}{x_3}$

Le coordinate " x_1, x_3 ", definite a meno di un fattore di proporzionalità, vengono denominate coordinate omogenee della retta r .

Il punto P in coordinate omogenee si indica $P(x_1, x_3)$

Occorre notare che quando P si allontana dall'origine e $P \rightarrow \infty$, anche l'ascissa $x \rightarrow \infty$; e si ha:

$$x = \frac{x_1}{x_3} \rightarrow \infty \quad \text{quando } x_3 \rightarrow 0 \quad \text{e } x_1 \neq 0$$

Si definisce punto all'infinito o punto improprio della retta orientata quel punto per il quale $x_3=0$ e $x_1 \neq 0$

$$P_\infty = (x_1, 0)$$

In un rapporto si può dividere numeratore e denominatore per uno stesso numero diverso da zero senza che esso vari. Si dividano così le coordinate omogenee del punto improprio per x_1

Il punto improprio viene ad avere le coordinate omogenee nella forma:

$$P_\infty = (x, 0)$$

Altri punti particolari:

Punto origine	$O=(0,1)$	dove	$x = \frac{0}{1} = 0$
Punto unità	$U=(1,1)$	dove	$x = \frac{1}{1} = 1$

Così il punto $P(x_1, x_3)$, espresso con coordinate omogenee, dividendo queste per x_3 , si può scrivere nella forma:

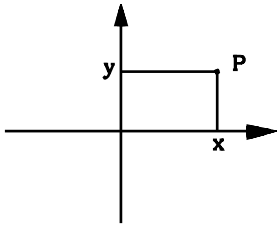
$$P(x,1) \quad \text{con} \quad \frac{x_1}{x_3} = x \quad \frac{x_2}{x_3} = 1$$

6.6.2 Coordinate omogenee nel piano

Si opera per i punti del piano alla stessa maniera effettuata per quelli sulla retta.

Al punto P del piano si fanno corrispondere tre coordinate x_1, x_2, x_3 tali che:

fig.6.6.2



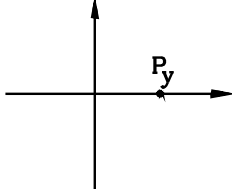
$$\begin{cases} x = \frac{x_1}{x_3} \\ v = \frac{x_2}{x_3} \end{cases}$$

E si scrive $P(x_1, x_2, x_3)$

Come le coordinate omogenee della retta, quelle del piano x_1, x_2, x_3 sono definite a meno di un fattore di proporzionalità.

Si consideri il punto P_y sull'asse delle x , di ascissa " x "

fig.6.6.3



Questo in coordinate non omogenee viene indicato con $P_y = (x, 0)$

dove $x \neq 0$ e $y=0$

Rispetto alle coordinate omogenee si avrà:

$$\frac{x_1}{x_3} = x \quad \frac{x_2}{x_3} = 0$$

Le coordinate omogenee saranno:

$$x_1 \neq 0 \quad x_2 = 0 \quad x_3 \neq 0$$

Il punto P_y in coordinate omogenee sarà espresso da:

$$P_y = (x_1, 0, x_3)$$

Dividendo per x_3 si ha:

$$P_y = (x, 0, 1)$$

Si allontani dall'origine il punto P_y , spostandolo verso l'infinito $P_y \rightarrow \infty$; allora l'ascissa x tende anch'essa all'infinito: $x \rightarrow \infty$, ma ciò si ottiene facendo tendere $x_3 \rightarrow 0$. Infatti:

$$x = \frac{x_1}{x_3} \rightarrow \infty \quad \text{quando} \quad x_3 \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad x_1 \neq 0$$

Il punto all'infinito o punto improprio dell'asse x è espresso con $X_\infty = (x_1, 0, 0)$

Dividendo per x_1 si ha:

$$\text{Punto improprio asse } x \quad X_\infty = (1, 0, 0)$$

Con gli stessi ragionamenti si ottengono i seguenti punti caratteristici:

Punto origine	$O = (0, 0, 1)$
Punto unità	$U = (1, 1, 1)$
Punto unità asse x	$U_x = (1, 0, 1)$
Punto unità asse y	$U_y = (0, 1, 1)$
Punto improprio asse x	$X_\infty = (1, 0, 0)$
Punto improprio asse y	$Y_\infty = (0, 1, 0)$

Punto generico del piano $P = (x_1, x_2, x_3)$ e dividendo per x_3 $P = (x, y, 1)$

6.6.3 Equazione della retta in coordinate omogenee

L'equazione della retta in coordinate non omogenee in forma implicita è :

$$ax + by + c = 0$$

Si introducano le coordinate omogenee, ponendo:

$$x = \frac{x_1}{x_3} \quad y = \frac{x_2}{x_3}$$

Si ottiene:

$$a \frac{x_1}{x_3} + b \frac{x_2}{x_3} + c = 0$$

Moltiplicando ambo i membri per x_3 si ottiene:

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$$

Che rappresenta l'equazione della retta in coordinate omogenee:

6.6.4 Retta impropria del piano

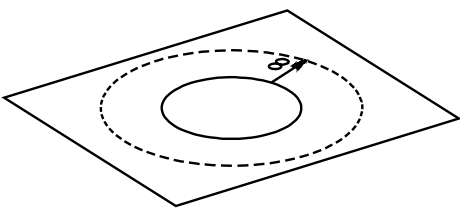
Si definisce retta impropria del piano l'insieme dei punti all'infinito del piano. Tutti i punti impropri hanno la terza coordinata $x_3=0$. In tal caso infatti per $x_3 \rightarrow 0$ si ha:

$$x = \frac{x_1}{x_3} \rightarrow \infty \quad y = \frac{x_2}{x_3} \rightarrow \infty$$

Da quanto detto l'equazione della retta impropria è:

$$x_3 = 0$$

fig 6.6.4



Per potere immaginare la retta all'infinito di un piano, si consideri su questo un cerchio e si faccia tendere il raggio all'infinito: si può pensare il limite a cui tende la circonferenza coincidente con la retta all'infinito del piano o retta impropria

6.6.5 Punto improprio di una retta generica del piano

Si intersechi una data r con la retta impropria: il punto di intersezione che si ottiene sarà il punto all'infinito della retta.

$$R_{\infty} \Rightarrow \begin{cases} ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{sostituendo si ha:}$$

$$ax_1 + bx_2 = 0 \quad \text{da cui:}$$

$$\frac{x_1}{x_2} = -\frac{b}{a}$$

Per cui a meno di un fattore di proporzionalità il punto improprio avrà coordinate:

$$\begin{cases} x_1 = -kb \\ x_2 = ka \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Il punto all'infinito della retta R_∞ (punto improprio) ha coordinate
 $R_\infty = (-kb, ka, 0)$ dividendo per k

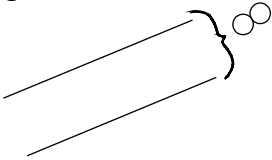
$$R_\infty = (-b, a, 0)$$

I, coefficienti $-b, a$ danno la direzione della retta il cui coefficiente angolare è $m = -\frac{b}{a}$

Il punto improprio $R_\infty = (-b, a, 0)$ di una retta determina la sua direzione.

Due rette parallele, avendo la stessa direzione, hanno lo stesso punto improprio.

fig.6.6.5



Si può anche affermare:

Due rette parallele si incontrano nel loro punto improprio

6.6.6 TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE E DI COORDINATE

Nello studio della robotica e più in generale *nella simulazione di movimentazione* interessa descrivere matematicamente:

- 1- l'effetto del movimento di un oggetto rispetto ad un riferimento fisso,
- 2- Il cambiamento di scala
- 3- Lo spostamento di un riferimento rispetto all'oggetto.

Occorre considerare due punti di vista complementari:

- a) L'oggetto si muove rispetto ad un riferimento stazionario.
L'algoritmo si esprime con una trasformazione geometrica che può essere applicata ad ogni singolo punto dell'oggetto.
- b- L'oggetto sta fermo ed è il sistema di riferimento che si muove rispetto all'oggetto.
In questo caso si parla di trasformazioni di coordinate.

Si consideri, così, il caso di simulazione del movimento riguardante un'autovettura.

- Si ha una trasformazione geometrica quando l'auto (*oggetto*) si muove rispetto allo sfondo (*riferimento fisso*).

- Si ha una trasformazione di coordinate quando l'auto è ferma rispetto all'osservatore (*che è alla guida*) e lo sfondo appare in movimento.

6.6.6.1 Trasformazioni geometriche nel piano

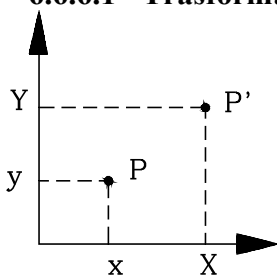


fig.6.6.6

Una trasformazione geometrica, (*traslazione, rotazione, ecc.*) in generale, (*vedi il prossimo paragrafo*), viene espressa con un sistema di equazioni lineari.

Siano x,y le coordinate di un punto generico $P(x,y)$, riferite ad un sistema di riferimento O,x,y

Dopo la trasformazione geometrica il punto P si sposterà in P' .

Vengono indicate con X,Y le nuove coordinate assunte dal punto P' ottenuto dal punto P mediante la trasformazione.

Effettuando una trasformazione geometrica, la relazione che lega le coordinate x,y di un punto dell'oggetto prima della trasformazione e quelle X,Y dello stesso punto dopo di essa può essere espressa, in molti casi (*omotetia, simmetrie, rotazione...*), da un sistema di equazioni lineari omogenee del tipo:

$$\begin{cases} X = a_{11}x + a_{12}y \\ Y = a_{21}x + a_{22}y \end{cases} \quad (6.6.1)$$

Nel sistema (6.6.1) le coordinate sono non omogenee

La precedente espressione può essere posta in forma matriciale:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (6.6.2)$$

Viene indicata con T la matrice caratteristica della trasformazione.

$$[T] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad (6.6.3)$$

Nelle applicazioni conviene riportare il sistema (6.6.1) nella forma espressa in coordinate omogenee.

Nella (6.6.1) si sostituiscono le coordinate non omogenee x,y e X,Y con i rapporti:

$$x = \frac{x_1}{x_3} \quad y = \frac{x_2}{x_3} \quad X = \frac{X_1}{X_3} \quad Y = \frac{X_2}{X_3} \quad \text{con } X_3 = x_3$$

$$\begin{cases} \frac{X_1}{X_3} = a_{11} \frac{x_1}{x_3} + a_{12} \frac{x_2}{x_3} \\ \frac{X_2}{X_3} = a_{21} \frac{x_1}{x_3} + a_{22} \frac{x_2}{x_3} \end{cases} \quad \text{moltiplicando ambo i membri per } x_3 = X_3$$

Considerando il sistema completo rispetto alle tre coordinate si ha:

$$\begin{cases} X_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + 0 \\ X_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + 0 \\ X_3 = 0 + 0 + x_3 \end{cases} \quad (6.6.4)$$

La coordinata x_3 compare solo nella terza espressione $X_3 = x_3$

Dividendo di nuovo per $X_3=x_3$ si ottiene la trasformazione nella forma particolare:

$$\begin{cases} \frac{X_1}{x_3} = a_{11} \frac{x_1}{x_3} + a_{12} \frac{x_2}{x_3} + 0 \\ \frac{X_2}{x_3} = a_{21} \frac{x_1}{x_3} + a_{22} \frac{x_2}{x_3} + 0 \\ \frac{X_3}{x_3} = 0 + 0 + \frac{x_3}{x_3} \end{cases} \quad \text{ma} \quad \begin{cases} \frac{X_1}{x_3} = X \\ \frac{X_2}{x_3} = Y \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \frac{x_1}{x_3} = x \\ \frac{x_2}{x_3} = y \end{cases}$$

$$\begin{cases} X = a_{11}x + a_{12}y + 0 \\ Y = a_{21}x + a_{22}y + 0 \\ 1 = 0 + 0 + 1 \end{cases}$$

La trasformazione in forma matriciale si presenta nella forma:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \quad (6.6.5)$$

La matrice caratteristica della trasformazione è del tipo:

$$[T] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.6.6)$$

Quando la trasformazione ha come componente una traslazione (*vedi oltre*), il sistema di equazioni che caratterizza la trasformazione stessa è un sistema lineare non omogeneo, nel quale compaiono al II membro termini noti, non moltiplicati per le variabili, quindi del tipo:

$$\begin{cases} X = a_{11}x + a_{12}y + a_{13} \\ Y = a_{21}x + a_{22}y + a_{23} \end{cases} \quad (6.6.7)$$

La relazione in forma matriciale si esprime come somma di un prodotto di matrici 2×2 come nel caso precedente più la matrice colonna dei termini noti a_{13}, a_{23}

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix} \quad (6.6.8)$$

Se l'equazione caratteristica della trasformazione si riporta in coordinate omogenee, allora essa si può ancora esprimere con un prodotto matriciale 3×3 .

Infatti sostituendo alle coordinate non omogenee i rapporti rispetto a quelle omogenee:

$$\begin{cases} \frac{X_1}{X_3} = X \\ \frac{X_2}{X_3} = Y \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{x_1}{x_3} = x \\ \frac{x_2}{x_3} = y \end{cases}$$

Il sistema (6.6.7) diviene:

$$\begin{cases} \frac{X_1}{X_3} = a_{11} \frac{x_1}{x_3} + a_{12} \frac{x_2}{x_3} + a_{13} \\ \frac{X_2}{X_3} = a_{21} \frac{x_1}{x_3} + a_{22} \frac{x_2}{x_3} + a_{23} \end{cases} \quad \text{moltiplicando per } x_3 \text{ e ponendo } X_3 = x_3 \text{ si ha:}$$

$$\begin{cases} X_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ X_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ X_3 = 0 + 0 + 1 \cdot x_3 \end{cases}$$

Dividendo di nuovo la (6.6.8) per x_3 si ottiene la trasformazione nella forma:

$$\begin{cases} X = a_{11}x + a_{12}y + a_{13} \\ Y = a_{21}x + a_{22}y + a_{23} \\ 1 = 0 + 0 + 1 \end{cases} \quad (6.6.9)$$

Così la trasformazione si può ancora esprimere in prodotto di matrici:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \quad (6.6.10)$$

La matrice caratteristica della trasformazione nel piano, contenente componenti di traslazione, è espressa in coordinate omogenee normalizzate rispetto a x_3 :

$$[T] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.6.11)$$

6.6.6.2 Trasformazioni geometriche nello spazio

Come per il piano, le trasformazioni geometriche sono espresse da un sistema di equazioni lineari, che pongono in relazione le coordinate x,y,z del punto P generico dell'oggetto con le coordinate X,Y,Z che assume lo stesso punto dopo la trasformazione.

Nel caso che la trasformazione è espressa da equazioni lineari omogenee, la trasformazione è del tipo:

$$\begin{cases} X = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\ Y = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z \\ Z = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z \end{cases} \quad (6.6.12)$$

La trasformazione in forma matriciale con coordinate non omogenee è espressa:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (6.6.13)$$

La matrice caratteristica della trasformazione è del tipo:

$$[T] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad (6.6.14)$$

Anche nello spazio si possono introdurre le coordinate omogenee.

Ad un punto generico P viene associata una quaterna di coordinate x_1, x_2, x_3, x_4 , con:

$$x = \frac{x_1}{x_4} \quad y = \frac{x_2}{x_4} \quad z = \frac{x_3}{x_4} \quad (6.6.15)$$

Ripercorrendo gli stessi ragionamenti effettuati per il piano si ottengono i seguenti punti particolari

Punto origine $O = (0,0,0,1)$

Punto unità	$U = (1,1,1,1)$
Punto unità asse x	$U_x = (1,0,0,1)$
Punto unità asse y	$U_y = (0,1,0,1)$
Punto unità asse z	$U_z = (0,0,1,1)$
Punto improprio asse x	$X_\infty = (1,0,0,0)$
Punto improprio asse y	$Y_\infty = (0,1,0,0)$
Punto improprio asse z	$Z_\infty = (0,0,1,0)$

Punto generico dello spazio $P = (x_1, x_2, x_3, x_4)$

Come per le coordinate omogenee del piano quelle dello spazio sono definite a meno di un fattore di proporzionalità: si possono quindi dividere o moltiplicare per uno stesso numero diverso da zero, ottenendo come rappresentazione lo stesso punto dello spazio.

Dividendo così le coordinate omogenee del punto generico $P = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ per $x_4 \neq 0$ si ottiene il punto generico nella forma:

$$P = \left(\frac{x_1}{x_4}, \frac{x_2}{x_4}, \frac{x_3}{x_4}, \frac{x_4}{x_4} \right) \quad \text{ma} \quad \frac{x_1}{x_4} = x \quad \frac{x_2}{x_4} = y \quad \frac{x_3}{x_4} = z \quad \frac{x_4}{x_4} = 1$$

$$P = (x, y, z, 1)$$

Sostituendo al posto delle coordinate non omogenee x, y, z i rapporti (6.6.15) che le lega alle omogenee si ottengono le trasformazioni espresse rispetto a queste.

Effettuando gli stessi passaggi fatti nel caso del piano si ottiene il sistema omogeneo analogo alla espressione:

$$\begin{cases} X_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + 0 \\ X_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + 0 \\ X_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + 0 \\ X_4 = 0 + 0 + 0 + 1 \cdot x_4 \end{cases} \quad (6.6.16)$$

Dividendo tutte le equazioni per $X_4 = x_4$ si ottiene:

$$\begin{cases} X = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + 0 \\ Y = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + 0 \\ Z = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + 0 \\ 1 = 0 + 0 + 0 + 1 \end{cases} \quad (6.6.17)$$

Le trasformazioni contraddistinte da equazioni lineari omogenee è espressa, in coordinate omogenee, dal seguente prodotto matriciale del tipo:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \quad (6.6.18)$$

La matrice caratteristica della trasformazione nello spazio è:

$$[T] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.6.19)$$

Nel caso che la trasformazione ha come componente una traslazione, allora il sistema di equazione lineare, comesi constaterà, è non omogeneo. La quarta colonna è formata dai termini noti.

$$\begin{cases} X = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14} \\ Y = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24} \\ Z = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34} \end{cases} \quad (6.6.20)$$

Sostituendo al posto delle coordinate non omogenee x, y, z i rapporti (6.6.15) che le lega alle omogenee si ottengono le trasformazioni espresse rispetto a queste.

Si ottiene il sistema omogeneo rispetto alle coordinate X_1, X_2, X_3, X_4 :

$$\begin{cases} X_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 \\ X_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 \\ X_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 \\ X_4 = 0 + 0 + 0 + 1 \cdot x_4 \end{cases} \quad (6.6.21)$$

Dividendo tutto per X_4 si ottiene:

$$\begin{cases} X = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14} \\ Y = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24} \\ Z = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34} \\ 1 = 0 + 0 + 0 + 1 \end{cases} \quad (6.6.22)$$

Introducendo le coordinate omogenee, la trasformazione, avente componenti di traslazione, è espressa ancora con prodotto di matrici del tipo:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \quad (6.6.23)$$

Matrice caratteristica della trasformazione nello spazio con componenti di traslazione:

$$[T] = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (6.6.24)$$

Matrici tipo di trasformazioni geometriche in coordinate omogenee		
Dimensione	Senza componenti di traslazione	Con componenti di traslazione
Nel piano	$[T] = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$	$[T] = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$
Nello spazio	$[T] = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$	$[T] = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

6.6.6.3 TRASFORMAZIONI DI COORDINATE

Il movimento piano riferito all'oggetto ha un sistema di equazioni lineari, le cui matrici caratteristiche tipo sono riportate nelle precedente tabella.

Lo stesso movimento conferito al riferimento, considerando l'oggetto fermo, è espresso da un sistema di equazioni lineari, avente una matrice caratteristica $[T]^{-1}$ inversa della matrice $[T]$ della trasformazione riferita al movimento dell'oggetto.

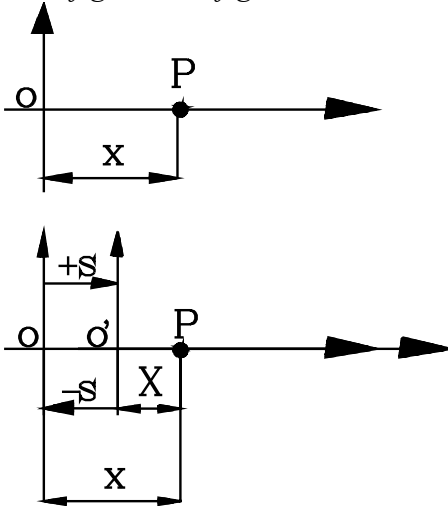
Si indichino genericamente con x le coordinate x_1, x_2, x_3, x_4 di un punto dell'oggetto nella posizione iniziale e con X le coordinate X_1, X_2, X_3, X_4 dello stesso punto nella posizione finale, dopo il movimento dell'oggetto rispetto al riferimento (nel piano manca la coordinata omogenea x_4).

L'espressione della trasformazione geometrica del moto di un punto dell'oggetto, in prodotto matriciale, simbolicamente, si può porre nella forma

$$X = [T] \cdot x \quad (6.6.25)$$

Si consideri ora il moto relativo del riferimento rispetto al punto dell'oggetto, considerato fisso nel piano; ciò è come se l'oggetto si spostasse in senso inverso rispetto al riferimento.

fig.6.6.7 fig.6.6.8



Si consideri come esempio la traslazione "+s" impressa al riferimento, rappresentato in figura, lungo l'asse x , mentre il punto P rimane fisso nel piano.

Sia x la posizione del punto P , rispetto all'origine O degli assi, prima della traslazione.

La traslazione s conferita al riferimento porta l'origine da O in O' e la posizione X del punto P rimasto fisso nel piano, rispetto alla nuova posizione O' dell'origine, risulta:

$$X = x - s$$

Si ha lo stesso risultato se il riferimento rimanesse fermo mentre il punto si spostasse in senso opposto di $-s$

Ora si imprima un moto al riferimento, e si indichino, genericamente, con x le coordinate del punto P dell'oggetto rispetto al riferimento posto nella posizione iniziale e con X le coordinate dello stesso punto P rispetto al riferimento dopo avergli conferito il moto.

La relazione tra le coordinate X rispetto al riferimento spostato e le x rispetto allo stesso riferimento posto nella posizione iniziale, è un prodotto matriciale:

$$X = [T]^{-1} \cdot x \quad (6.6.26)$$

Dove $[T]^{-1}$ è la matrice inversa di quella caratteristica $[T]$ della trasformazione geometrica del moto relativo del punto rispetto al riferimento considerato fisso.

Viene qui di seguito rammentato con un esempio la costruzione di una matrice inversa $[T]^{-1}$ di una $[T]$ data.

Sia data la matrice:

$$[T] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Per ottenere la matrice inversa della matrice quadra $[T]$ si può operare nella seguente maniera:

1°- Si calcola il determinante della matrice quadrata:

$$|T| = -5$$

2°- Si costruisce la trasposta della matrice aggiunta di $[T]$

Per far ciò:

- Si pone al posto di ogni elemento della 1° riga i complementi algebrici dalla 1° colonna.
 - Si pone al posto di ogni elemento della 2° riga i complementi algebrici dalla 2° colonna.
 - Si pone al posto di ogni elemento della 3° riga i complementi algebrici dalla 3° colonna.
-
- Si pone al posto di ogni elemento dell'ultima riga i complementi algebrici dalla ultima colonna.

Si eseguano le suddette operazioni:

Matrice aggiunta della trasposta $[T]_{adj}^t$

$$[T]_{adj}^t = \begin{vmatrix} |3 & 1| & -|0 & 1| & |0 & 1| \\ |2 & 1| & |1 & 1| & -|2 & 1| \\ |2 & 3| & -|1 & 0| & |1 & 0| \\ |2 & 1| & -|2 & 1| & |2 & 3| \end{vmatrix}$$

$$[T]_{adj}^t = \begin{vmatrix} -1 & +1 & -3 \\ +2 & -2 & +1 \\ -4 & -1 & +3 \end{vmatrix}$$

La matrice inversa si ottiene dividendo per il determinante $|T|$ la trasposta della matrice aggiunta $[T]_{adj}^{-1}$

Dividendo $[T]_{adj}^{-1}$ per il determinante $|T| = -5$ si ottiene la matrice inversa $[T]^{-1}$:

$$[T]^{-1} = \begin{vmatrix} +\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & +\frac{3}{5} \\ -\frac{2}{5} & +\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ +\frac{4}{5} & -\frac{1}{5} & +\frac{3}{5} \end{vmatrix}$$

Si osservi che la matrice inversa $[T]^{-1}$ è tale che moltiplicata per la matrice $[T]$ si ottiene la matrice unitaria o matrice identità $[I]$, i cui elementi sono tutti zeri, salvo la diagonale principale composta da tutti 1:

$$[T] \cdot [T]^{-1} = [I]$$

Infatti:

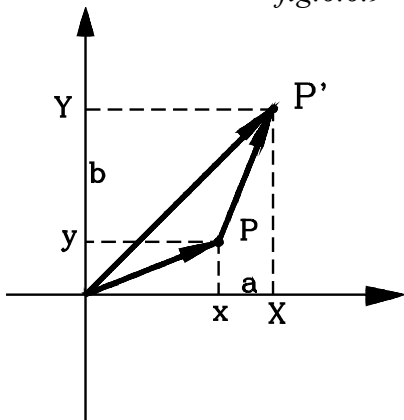
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} +\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & +\frac{3}{5} \\ -\frac{2}{5} & +\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ +\frac{4}{5} & -\frac{1}{5} & +\frac{3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6.6.7 TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE PIANE

Le trasformazioni geometriche che interessano la cinematica dei robot si possono ridurre a due soli tipi: traslazione e rotazione. Non vengono qui considerate le altre trasformazioni come le simmetrie l'omotetia, che rivestono particolare importanza nella simulazione dei movimenti

6.6.7.1 Traslazione del punto oggetto P di un vettore $\vec{v} = (a, b)$

fig.6.6.9



Sia $P=(x,y)$ un punto generico dell'oggetto.

Si voglia effettuare del punto P una traslazione di vettore $\vec{v} = (a, b)$

Con la traslazione si somma il vettore \vec{v} al punto oggetto P e si ottiene il punto $P'(X,Y)$: dove X,Y sono le nuove coordinate assunte dal punto oggetto traslato e P' è la posizione assunta da esso dopo la traslazione.

$$Q = P + \vec{v} \quad (6.6.27)$$

Proiettando sugli assi la (6.6.27) si ottiene la relazione tra le coordinate x,y del punto P e quelle X,Y del punto traslato P' .

$$\begin{cases} X = x + a \\ Y = y + b \end{cases} \quad (6.6.28)$$

Il sistema di equazione (6.6.28) rappresenta la relazione di trasformazione geometrica della traslazione di vettore \vec{v}

La trasformazione di traslazione (6.6.28) può essere tradotta in forma matriciale mista, di prodotto 2×2 più la matrice colonna corrispondente al vettore \vec{v} di componenti a, b :

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad (6.6.29)$$

La trasformazione traslazione si può riportare nella forma matriciale di prodotto 3×3 utilizzando le coordinate omogenee.

Infatti si introducano nel sistema di trasformazione (6.6.28) le coordinate omogenee:

$$x = \frac{X_1}{X_3} \quad y = \frac{X_2}{X_3} \quad X = \frac{X_1}{X_3} \quad Y = \frac{X_2}{X_3} \quad \text{con } X_3 = x_3$$

Si ottiene il sistema:

$$\begin{cases} \frac{X_1}{x_3} = \frac{x_1}{x_3} + 0 + a \\ \frac{X_2}{x_3} = 0 + \frac{x_2}{x_3} + b \\ X_3 = 0 + 0 + x_3 \end{cases} \quad \text{moltiplicando le prime due equazioni per } x_3$$

$$\begin{cases} X_1 = x_1 + 0 + ax_3 \\ X_2 = 0 + x_2 + bx_3 \\ X_3 = 0 + 0 + 1x_3 \end{cases} \quad \text{dividendo tutte le equazioni per } x_3 = X_3 \text{ si ottiene:}$$

$$\begin{cases} X = x + 0 + a \\ Y = 0 + y + b \\ 1 = 0 + 0 + 1 \end{cases} \quad (6.6.30)$$

Il sistema (6.6.30) esprime il sistema di trasformazione della traslazione sul piano del punto oggetto rispetto al riferimento, considerato fisso. In forma matriciale si ha:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \quad (6.6.31)$$

Per porre la trasformazione di traslazione in forma di prodotto matriciale si aggiunge alla matrice unitaria una 3° colonna con componenti $(a, b, 1)$, che sono le coordinate omogenee del vettore traslazione. La terza riga ha componenti $0, 0, 1$.

Infatti svolgendo il prodotto matriciale (6.6.31) si ottiene l'espressione originaria (6.6.28) della traslazione:

$$\begin{cases} X = x + a \\ Y = y + b \\ 1 = 1 \end{cases} \quad (6.6.32)$$

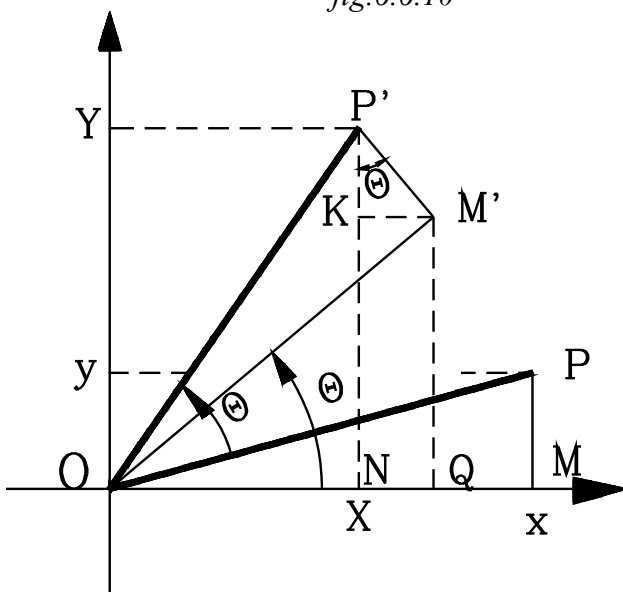
La matrice caratteristica della traslazione nel piano 3×3 in coordinate omogenee normalizzate rispetto a x_3 è:

$$[T_s] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (6.6.33)$$

La matrice caratteristica $[T_s]$ della traslazione sul piano si ottiene aggiungendo alla matrice unità una terza colonna, i cui elementi sono le componenti omogenee del vettore traslazione $(a, b, 1)$, una terza riga i cui elementi sono $(0, 0, 1)$.

6.6.7.2 Rotazione del punto oggetto rispetto all'origine

fig.6.6.10



Dato un punto $P=(x,y)$ dell'oggetto nel piano, si effettui una rotazione $+\theta$ attorno all'origine O .

Dopo la rotazione il punto P si porta in $P'=(X,Y)$ e il triangolo OMP in $OM'P'$.

Osservando la figura risulta:

$$\begin{cases} X = OQ - NQ \\ Y = NK + KP' \end{cases} \quad (6.6.34)$$

essendo $\begin{cases} NQ = KM' \\ NK = QM' \end{cases}$ sostituendo si ha

$$\begin{cases} X = OQ - KM' \\ Y = QM' + KP' \end{cases} \quad (6.6.35)$$

Risulta inoltre:

$$\begin{cases} OM' = OM = x \\ MP = M'P' = y \\ NP' = Y \\ ON = X \end{cases}$$

Dal triangolo OQM' si ha:

$$\begin{cases} OQ = OM' \cdot \cos\theta = x \cdot \cos\theta \\ QM' = OM' \cdot \sin\theta = x \cdot \sin\theta \end{cases}$$

Dal triangolo $KM'P'$ si ha:

$$\begin{cases} KM' = M'P' \cdot \sin\theta = y \cdot \sin\theta \\ KP' = M'P' \cdot \cos\theta = y \cdot \cos\theta \end{cases}$$

Sostituendo nella (6.6.34) si ottiene l'espressione della trasformazione geometrica della rotazione di un punto oggetto attorno all'origine degli assi del riferimento, considerato fisso.

$$\begin{cases} X = x \cdot \cos\theta - y \cdot \sin\theta \\ Y = x \cdot \sin\theta + y \cdot \cos\theta \end{cases} \quad (6.6.35)$$

In forma di prodotto matriciale:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

In forma di prodotto matriciale 3x3 in coordinate omogenee, normalizzate rispetto a X_3 , si scrive aggiungendo la terza riga e colonna con gli elementi: 001

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \quad (6.6.36)$$

La matrice caratteristica della rotazione R nel piano del punto oggetto attorno all'origine degli assi di riferimento considerati fissi è:

$$[R] = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.6.37)$$

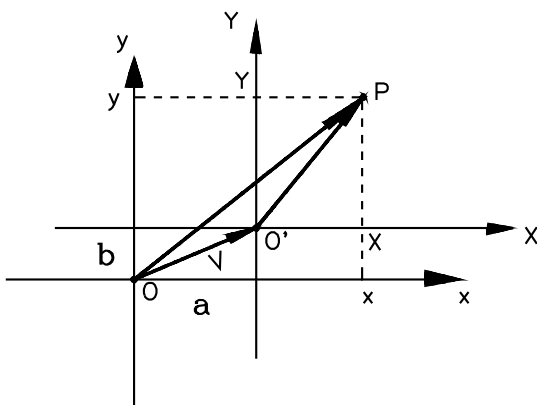
6.6.8 TRASFORMAZIONE DI COORDINATE

Si consideri ora fermo nel piano il punto oggetto P e che, rispetto a questo, si muova il riferimento.

Si indichi con P il punto generico dell'oggetto, fisso nel piano. Esso avrà coordinate x, y rispetto al vecchio riferimento Oxy iniziale e coordinate X, Y rispetto a detto riferimento $O'XY$ nella sua posizione finale ottenuta dopo il movimento.

$P=(x,y)$ Punto oggetto riferito al riferimento prima che a questo sia impartito il movimento

$P=(X,Y)$ Stesso punto riferito al riferimento spostato.



6.6.8.1 Traslazione

fig.6.6.11

Mantenendo fermo il punto P dell'oggetto, si trasli il riferimento Oxy del vettore:

$$\vec{v} = (a, b)$$

L'origine $O = (0,0)$ subirà una traslazione di vettore $\bar{v} = (a,b)$, portandosi nel punto $O' = (a,b)$

Il riferimento nella nuova posizione OXY , ottenuto dalla traslazione, ha gli assi paralleli a quelli dello stesso riferimento nella posizione iniziale Oxy .

Il punto P ha coordinate x,y rispetto al riferimento nella sua posizione iniziale: $P=(x,y)$ e coordinate X,Y rispetto allo stesso riferimento nella sua posizione finale dopo la traslazione: $P(X,Y)$.

Come si può constatare dalla figura il punto P si ottiene dalla somma di due vettori $\overline{O'-O} = \bar{v}$ e $\overline{P-O'}$

$$\overline{P-O'} + \overline{O'-O} = \overline{P-O}$$

da cui

$$\overline{P-O'} = \overline{P-O} - \overline{O'-O}$$

$$\text{dove } \overline{O'-O} = \bar{v}$$

si ha

$$\overline{P-O'} = \overline{P-O} - \bar{v} \quad (6.6.38)$$

La posizione del punto P rispetto al nuovo riferimento traslato si ottiene dallo stesso punto P , riferito al vecchio riferimento, meno il vettore traslazione $\bar{v} (a,b)$.

Considerando le componenti sugli assi della espressione vettoriale (6.6.38) si ha:

$$\begin{cases} X = x - a \\ Y = y - b \end{cases} \quad (6.6.39)$$

Ripetendo lo stesso procedimento effettuato nel caso di traslazione del punto oggetto, la (6.6.39) in coordinate omogenee si scrive:

$$\begin{cases} X_1 = x_1 + 0 - ax_3 \\ X_2 = 0 + x_2 - bx_3 \\ X_3 = 0 + 0 + 1x_3 \end{cases}$$

Normalizzando le coordinate omogenee rispetto a $x_3 = X_3$: dividendo cioè tutto per x_3 si ottiene:

$$\begin{cases} X = x + 0 - a \\ Y = 0 + y - b \\ 1 = 0 + 0 + 1 \end{cases}$$

Nella forma di prodotto matriciale:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \quad (6.6.40)$$

La matrice caratteristica della traslazione del riferimento rispetto al punto oggetto, in coordinate omogenee normalizzate rispetto a x_3 è:

$$[T_{sc}] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (6.6.41)$$

Si può facilmente verificare che:

La matrice caratteristica della traslazione di coordinate $[T_{sc}]$ è la matrice inversa di quella $[T_s]$ caratteristica della traslazione geometrica (*dell'oggetto*).

$$[T_{sc}] = [T_s]^{-1}$$

La traslazione di vettore $\bar{v} = (a, b)$ delle coordinate corrisponde ad una traslazione geometrica inversa di vettore:

$$\bar{v} = (-a, -b) = -\bar{v}$$

Le argomentazioni ora effettuate per la traslazione valgono in generale anche per le altre trasformazioni di coordinate.

Si può dimostrare che:

Se $[Tr]$ è la matrice di una trasformazione geometrica, la corrispondente trasformazione di coordinate $[Trc]$ è la matrice inversa di $[Tr]$

$$[Trc] = [Tr]^{-1}$$

In pratica, per le coordinate, si opera la trasformazione inversa della geometrica. Così:

Traslazione di assi di vettore $\bar{v} = (a, b)$ Corrisponde alla trasformazione geometrica di vettore:

$$\bar{v}_c = -\bar{v} = (-a, -b)$$

$$\begin{vmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x \\ y \\ 1 \end{vmatrix} \quad (6.6.42)$$

Rotazione θ degli assi attorno all'origine Corrisponde alla rotazione geometrica del punto oggetto di $-\theta$ attorno all'origine

$$\begin{vmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x \\ y \\ 1 \end{vmatrix} \quad (6.6.43)$$

La trasformazione del riferimento di matrice caratteristica $[Trc] = [Tr]^{-1}$ dà, ovviamente, le coordinate nuove X, Y rispetto a quelle x, y che si avevano prima della trasformazione di coordinate. Simbolicamente:

$$X = [T_{rc}] \cdot x$$

Per ottenere le coordinate vecchie (x, y) che si avevano prima del cambiamento del riferimento, rispetto alle nuove (X, Y) , occorre operare la trasformazione inversa di $[Trc]$: ricavare cioè dal sistema le coordinate (x, y) rispetto a (X, Y) :

$$x = [T_{rc}]^{-1} \cdot X \quad (6.6.44)$$

dove $[T_{rc}] = [T_r]^{-1}$ quindi

$$[T_{rc}]^{-1} = \left[[T_r]^{-1} \right]^{-1} = [T_r] \quad \text{sostituendo nella (6.6.44) si ha:}$$

$$x = [T_r] \cdot X \quad (6.6.45)$$

Quando, nel cambio del riferimento, si vogliono ottenere le coordinate vecchie (x,y) rispetto alle nuove (X,Y) , occorre applicare la relazione corrispondente alla trasformazione geometrica (di matrice $[T_r]$) che risulta inversa a quella di coordinate.

Matrici caratteristiche delle trasformazioni		
Tipo di trasformazione	Trasformazione geometrica di un punto mobile	Trasformazione di coordinate
Traslazione di vettore $\vec{v}(a, b)$	$[T_s] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$	$[T_{sc}] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$
Rotazione dell'angolo θ attorno all'origine	$[R] = \begin{vmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$	$[R_c] = \begin{vmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

6.6.8.2 Conclusioni sulle trasformazioni dirette e inverse

Trasformazione geometrica

- a)- Diretta Se nella trasformazione geometrica si vogliono determinare le nuove coordinate (X,Y) rispetto alle vecchie (x,y) allora occorre operare la trasformazione di matrice diretta $[T_r]$ (dove $[T_r] = [T_s]$ per la traslazione, $[T_r] = [R]$ per la rotazione)
- b)-Inversa Se nella trasformazione geometrica si vogliono determinare le vecchie coordinate (x,y) rispetto alle nuove (X,Y) allora occorre operare la trasformazione di matrice inversa $[T_r]^{-1}$ (dove $[T_r]^{-1} = [T_s]^{-1}$ per la traslazione, $[T_r]^{-1} = [R]^{-1}$ per la rotazione)

Trasformazione di coordinate

- a)- **Diretta** Se in una trasformazione di cambiamento del riferimento si vogliono determinare le coordinate nuove (X,Y) rispetto alle vecchie (x,y) , allora occorre operare la trasformazione di matrice $[T_{rc}]$, inversa della corrispondente trasformazione geometrica di matrice $[T_r]$: $[T_{rc}] = [T_r]^{-1}$
- b)- **Inversa** Se in una trasformazione di cambiamento del riferimento si vogliono determinare le coordinate vecchie (x,y) rispetto alle nuove (X,Y) , (*passaggio di riferimento inverso*) allora occorre operare la trasformazione di matrice $[T_{rc}]^{-1}$, inversa della trasformazione di coordinate, ma questa, a sua volta, è l'inversa di quella geometrica : $[T_{rc}] = [T_r]^{-1}$.

Si conclude che: nel passaggio inverso del riferimento, per determinare le coordinate vecchie (x,y) rispetto alle nuove (X,Y) , si opera la trasformazione con matrice uguale a quella geometrica:

$$[T_{rc}]^{-1} = [[T_r]^{-1}]^{-1} = [T_r] \quad (6.6.46)$$

6.6.9 TRASFORMAZIONI COMPOSTE

Nei paragrafi precedenti si sono studiate le trasformazioni basilari nel piano. Trasformazioni più complesse si possono, ottenere da una opportuna combinazione di quelle già descritte.

Le applicazioni vengono studiate negli esercizi; qui si vuole ricavare la espressione della trasformazione composta Tr , ottenuta effettuando una prima trasformazione Tr_1 (*geometrica o di coordinate*), che cambia le coordinate del punto da x,y a X',Y' , e, successivamente, una seconda trasformazione Tr_2 che cambia le coordinate da X',Y' a X'',Y'' .

Per convenzione si indicheranno in, ordine le trasformazioni effettuate separate dal (\bullet)

Così si indicherà :

$$Tr = Tr_1 \cdot Tr_2$$

Intendendo con ciò che viene operata prima la trasformazione Tr_1 e successivamente la Tr_2

Qualunque sia la trasformazione, essa, in coordinate omogenee, è sempre espressa da un *prodotto matriciale*

Si operi così la prima trasformazione T_{r1} di matrice $[T_{r1}]$. Essa muterà le coordinate di un punto da quelle iniziali (x,y) a quelle finali (X',Y') , secondo una relazione espressa da un prodotto matriciale del tipo:

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \quad (6.6.47)$$

La matrice $[T_{r1}]$ caratteristica della prima trasformazione T_{r1} è

$$[T_{r1}] = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (6.6.48)$$

Nel caso che la trasformazione è caratterizzata da un sistema omogeneo (per esempio una rotazione) allora risulta " $a_{13} = a_{23} = 0$ ".

Si operi la seconda trasformazione T_{r2} di matrice $[T_{r2}]$. Essa muterà le coordinate del punto, da quelle X', Y' , ottenute dalla prima trasformazione, alle coordinate X'', Y'' che si otterranno applicando la seconda trasformazione.

$$\begin{vmatrix} X'' \\ Y'' \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} X' \\ Y' \\ 1 \end{vmatrix} \quad (6.6.49)$$

Matrice caratteristica della seconda trasformazione:

$$[T_{r2}] = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (6.6.50)$$

Si può ora sostituire la (6.6.47) nella (6.6.49), ottenendo la trasformazione composta Tr , la quale, immettendo le coordinate iniziali (x, y) , fornisce le coordinate finali (X'', Y'') .

$$\begin{vmatrix} X'' \\ Y'' \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x \\ y \\ 1 \end{vmatrix} \quad (6.6.51)$$

La matrice della trasformazione composta $Tr = Tr1 \cdot Tr2$ si ottiene moltiplicando la matrice della seconda trasformazione $Tr2$ per la prima $Tr1$.

$$[T_r] = [T_{r1} \cdot T_{r2}] = [T_{r2}] \cdot [T_{r1}]$$

La matrice colonna delle coordinate iniziali $(x, y, 1)$ viene prima moltiplicata a sinistra per la matrice $[T_{r1}]$ della prima trasformazione; il risultato viene moltiplicato a sinistra per la matrice $[T_{r2}]$ della seconda trasformazione.

$$[T_r] = [T_{r1} \cdot T_{r2}] = [T_{r2}] \cdot [T_{r1}] = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (6.6.52)$$

In generale se si hanno più trasformazioni consecutive:

$$T_r = T_{r1} \cdot T_{r2} \cdot \dots \cdot T_{rn} \quad (78)$$

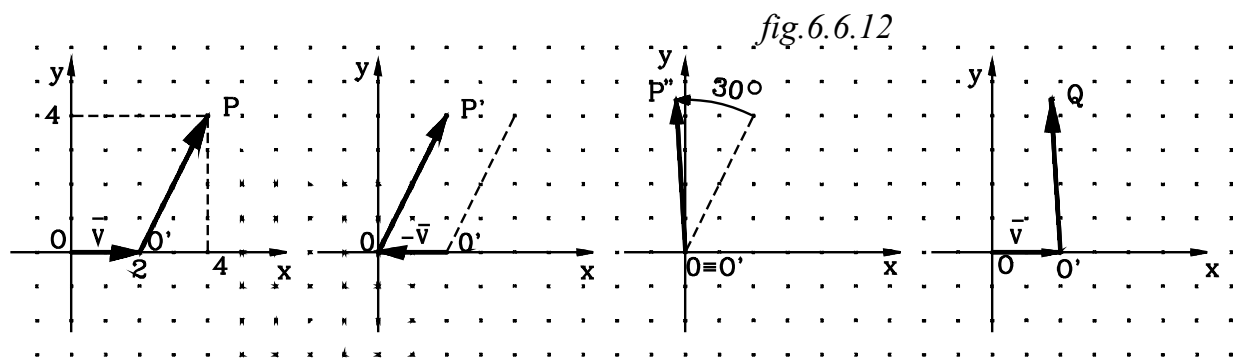
le matrici, nella moltiplicazione, si pongono in ordine da destra verso sinistra partendo dalla prima verso l'ultima.

$$[Tr] = [Tr_1 \cdot Tr_2 \cdot \dots \cdot Tr_n] = [Tr_n] \cdot [Tr_{n-1}] \cdot \dots \cdot [Tr_2] \cdot [Tr_1] \quad (6.6.53)$$

ESERCIZI

1°

Dato il punto oggetto $P=(4,4)$, determinare il punto $Q=(X,Y)$ ottenuto da P dopo una rotazione di $\theta = 30^\circ$ effettuata attorno, al punto $O'=(2,0)$



La trasformazione geometrica si può ottenere dalla composizione di tre trasformazioni elementari:

a)- Traslazione da O' in O

Si effettua una traslazione che porta il punto $O'(2,0)$ nell'origine $O(0,0)$.

Se con $\vec{v} = (2, 0)$ si indica il vettore $\vec{v} = (0' - 0)$, per portare O' in O occorre operare la traslazione di vettore $-\vec{v} = (-2, 0)$

$$O = O' - \vec{v}$$

Con la traslazione il punto P si porta in P'

La matrice caratteristica della trasformazione di traslazione geometrica di vettore $-\vec{v} = (-2, 0)$ è:

$$[T_{-\vec{v}}] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

b)- Rotazione attorno all'origine

Si effettua una rotazione di $\theta = 30^\circ$ attorno all'origine: il punto P' si porta in P''

La matrice caratteristica della rotazione di 30° è:

$$[R] = \begin{vmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ & 0 \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

c)- **Traslazione da O in O'**

Si effettua ora una traslazione che riporta il punto di rotazione **O** nella posizione originaria **O'** in modo che la rotazione di 30° risulti attorno a quest'ultimo punto e non attorno all'origine.

Occorre effettuare la traslazione di vettore $\bar{v} = (2, 0)$.

La matrice caratteristica della trasformazione della traslazione geometrica di vettore $\bar{v} = (2, 0)$ è:

$$[T_v] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Occorre quindi operare in ordine:

- 1- La traslazione T_{-v} che porta il punto di rotazione O' sull'origine O : matrice $[T_{-v}]$
- 2- La rotazione attorno all'origine O : matrice $[R]$
- 3- Traslazione T_v che riporta il punto O in O' in modo che la rotazione risulti attorno a questo: matrice $[T_v]$

La trasformazione totale T_r composta è:

$$T_r = T_{-v} \cdot R \cdot T_v$$

La matrice globale di trasformazione è:

$$[T_r] = [T_v] \cdot [R] [T_{-v}]$$

$$[T_r] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

La composizione delle prime due trasformazioni si ottiene moltiplicando la seconda sulla prima:

$$[T_{-v} \cdot R_\theta] = [R_\theta] \cdot [T_{-v}] = \begin{vmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

si ottiene:

$$[T_{-v} \cdot R_{\theta}] = [R_{\theta}] \cdot [T_{-v}] = \begin{vmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 & -\sqrt{3} \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

La moltiplicazione matriciale va fatta ponendo a destra la prima trasformazione e a sinistra la seconda.

La matrice risultante ottenuta viene poi moltiplicata alla sua sinistra per la matrice caratteristica della terza trasformazione.

$$[T_r] = [T_{-v} \cdot R_{\theta} \cdot T_v] = [T_v] \cdot [R_{\theta}] \cdot [T_{-v}] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 & -\sqrt{3} \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$[T_r] = \begin{vmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 & -\sqrt{3} + 2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

La trasformazione è espressa dal prodotto matriciale:

$$\begin{vmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 & -\sqrt{3} + 2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x \\ y \\ 1 \end{vmatrix}$$

al quale corrisponde il sistema:

$$\begin{cases} X = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot x - \frac{1}{2} \cdot y + (-\sqrt{3} + 2) \\ Y = \frac{1}{2} \cdot x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot y - 1 \\ 1 = 0 + 0 + 1 \end{cases}$$

Sostituendo nella trasformazione le coordinate del punto P=(4,4) si ottiene il punto Q cercato.

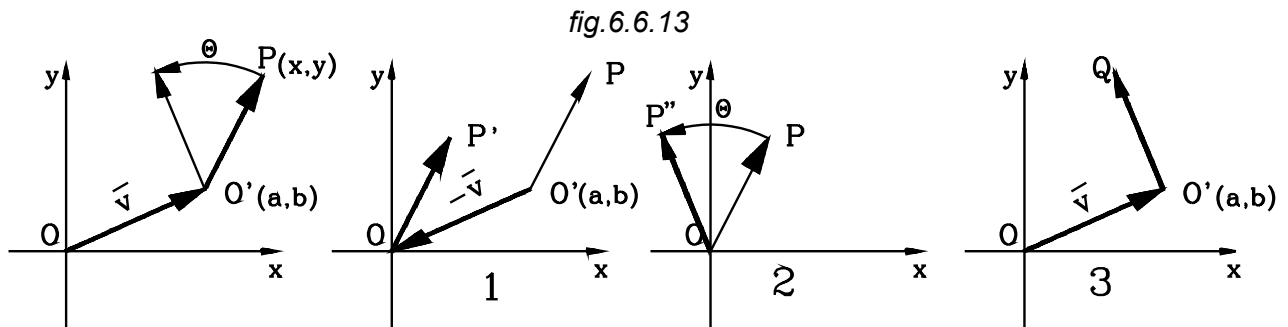
$$\begin{cases} X = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot 4 + (-\sqrt{3} + 2) \\ Y = \frac{1}{2} \cdot 4 + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 4 - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X = \sqrt{3} \\ Y = \frac{2}{3} + 1 \end{cases}$$

$$Q = \left(\sqrt{3}, \frac{2}{3} + 1 \right)$$

2-

Determinare la trasformazione che fa ruotare un punto oggetto generico $P=(x,y)$ dell'angolo θ attorno ad un punto $O'=(a,b)$



Si procede alla stessa maniera dell'esercizio precedente:

- 1- Si effettua una traslazione $T_{-\bar{v}}$ di vettore $-\bar{v} = (-a, -b)$ che porta il centro di rotazione $O' = (a, b)$ nell'origine $O = (0, 0)$.
Dopo la traslazione il punto P si porta in P'
- 2- Si effettua una rotazione R_{θ} dell'angolo θ attorno all'origine $O = (0, 0)$
Dopo la rotazione il punto P' si porta in P''
- 3- Si effettua una traslazione $T_{\bar{v}}$ di vettore $\bar{v} = (a, b)$ che porta di nuovo il punto di rotazione da O nella posizione originaria O' : il punto iniziale P si porta nella posizione finale Q

La trasformazione globale T_r , in ordine è composta:

$$T_r = T_{-\bar{v}} \cdot R_{\theta} \cdot T_{\bar{v}}$$

La matrice caratteristica della trasformazione globale T_r è data dal prodotto matriciale:

$$[Tr] = [T_{\bar{v}}] \cdot [R_{\theta}] \cdot [T_{-\bar{v}}]$$

$$[T_r] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Moltiplicando le prime due si ha:

$$[R_{\theta}] \cdot [T_{-\bar{v}}] = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & (-a \cdot \cos \theta + b \sin \theta) \\ \sin \theta & \cos \theta & (-a \cdot \sin \theta - b \cos \theta) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice risultante va moltiplicata a sinistra per $T_{\bar{v}}$

$$[T_r] = [T_{\bar{v}}] \cdot [R_\theta] \cdot [T_{-\bar{v}}] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & (-a \cdot \cos\theta + b \sin\theta) \\ \sin\theta & \cos\theta & (-a \cdot \sin\theta - b \cos\theta) \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$[T_r] = [T_{\bar{v}}] \cdot [R_\theta] \cdot [T_{-\bar{v}}] = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & (-a \cdot \cos\theta + b \sin\theta + a) \\ \sin\theta & \cos\theta & (-a \cdot \sin\theta - b \cos\theta + b) \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

la matrice di trasformazione dell'esercizio precedente si può ottenere sostituendo :

$$\begin{cases} a = 2 \\ b = 0 \\ \theta = 30^\circ \end{cases} \quad \text{ottenendo:}$$

$$[T_r] = \begin{vmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 & -\sqrt{3} + 2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

6.6.10 TRASFORMAZIONI TRIDIMENSIONALI

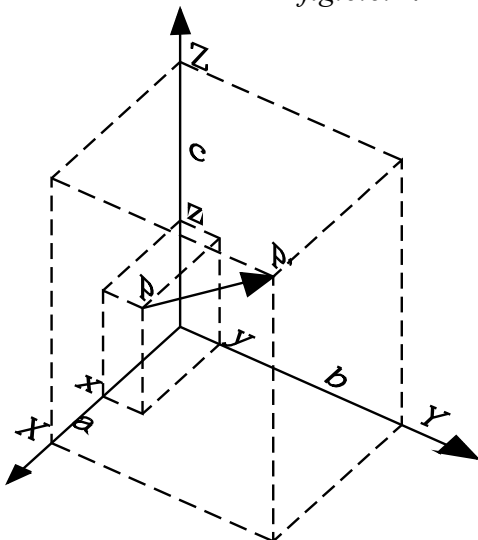
Valgono le stesse argomentazioni e gli stessi risultati ottenuti per le trasformazioni piane.

La trasformazione è espressa da un sistema di equazioni lineari omogenee, quando non vi sono traslazioni. Quando, invece, una delle componenti è una traslazione, il sistema è lineare non omogeneo; per renderlo omogeneo si impiegano coordinate omogenee.

6.6.10.1 Traslazione geometrica

Sia $v = (a, b, c)$ il vettore traslazione nello spazio che porta il punto generico $P(x, y, z)$ nel nuovo punto $P'(X, Y, Z)$. La trasformazione è espressa dal sistema non omogeneo

fig.6.6.14



$$\begin{cases} X = x + a \\ Y = y + b \\ Z = z + c \end{cases} \quad (6.6.54)$$

Si potrà scrivere:

$$\begin{cases} X = x + 0 + 0 + a \\ Y = 0 + y + 0 + b \\ Z = 0 + 0 + z + c \end{cases} \quad (6.6.55)$$

In forma matriciale:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad (6.6.56)$$

Per ricondurre la espressione in forma di prodotto di matrici 4×4 conviene esprimere la trasformazione in coordinate omogenee, normalizzate rispetto a x_4 . Ripetendo le stesse argomentazioni effettuate per la traslazione nel piano, la matrice si ottiene aggiungendo a quella unitaria la colonna " $a, b, c, 1$ " e la riga " $0, 0, 1$ ". gli elementi " a, b, c " della colonna sono le componenti, del vettore traslazione. Si ottiene l'espressione della trasformazione con le coordinate omogenee in forma matriciale:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \quad (6.6.57)$$

La matrice caratteristica della traslazione è:

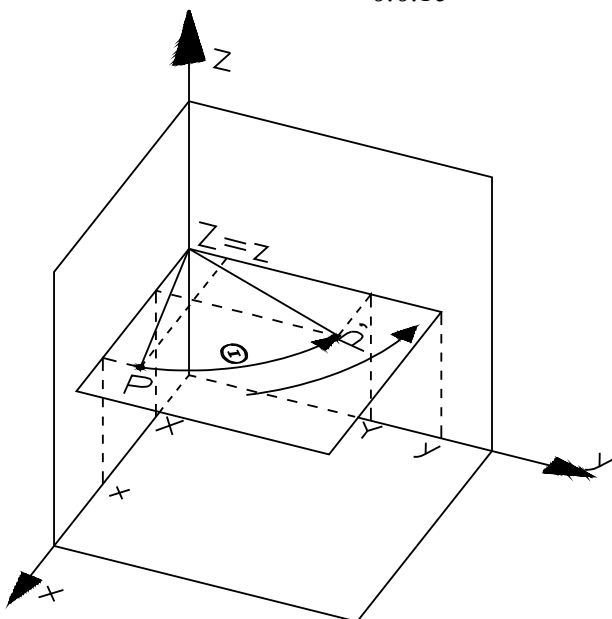
$$[T_s] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.6.58)$$

Rotazioni

Una rotazione nello spazio si può sempre decomporre in successive rotazioni attorno agli assi coordinati. Si vogliono, così, determinare le trasformazioni di rotazione attorno a questi.

6.6.10.2 Rotazione attorno all'asse z

6.6.15



La rotazione avviene su di un piano parallelo al piano coordinato x, y .

Rispetto a detti assi, si è nelle stesse condizioni già studiate nel piano x, y di cui sono già note le relazioni che legano le nuove coordinate (X, Y) del punto $P'(X, Y)$, che ha subito la rotazione, rispetto quelle (x, y) dello stesso punto oggetto nella sua posizione iniziale $P(x, y)$.

La rotazione positiva è quella del senso antiorario, che si ha guardando dalla freccia dell'asse z verso il piano x, y (in quello, cioè, nel quale deve ruotare l'asse x per ricongiungersi con l'asse y , spazzando l'angolo di 90°).

Nella rotazione attorno all'asse z , la coordinata Z , che il punto assume nella posizione $P'(X,Y,Z)$ finale, coincide con quella z , che lo stesso punto aveva nella sua posizione $P(x,y,z)$ iniziale.

$$Z=z$$

Le relazioni che legano le coordinate (X,Y) del punto P' alle (x,y) di P sono quelle già determinate per la rotazione nel piano x,y : in più si aggiunge la condizione della costanza della terza coordinata: $Z=z$

La trasformazione è espressa da seguente sistema:

$$\begin{cases} X = \cos\theta \cdot x - \sin\theta \cdot y + 0 \\ Y = \sin\theta \cdot x + \cos\theta \cdot y + 0 \\ Z = 0 + 0 + z \end{cases} \quad (6.6.59)$$

La matrice caratteristica della rotazione attorno all'asse z , in coordinate non omogenee risulta:

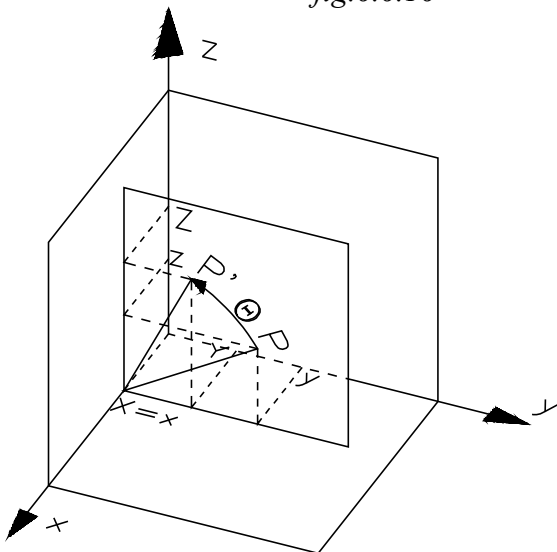
$$[R_{z_\theta}] = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (6.6.60)$$

Per effettuare le trasformazioni composte nella quali compare una componente di traslazione, conviene come noto, esprimere la matrice caratteristica con coordinate omogenee normalizzate rispetto a x_4 . Ciò si ottiene aggiungendo alla precedente matrice la quarta riga e colonna con elementi "0,0,0,1"

$$[R_{z_\theta}] = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (6.6.61)$$

6.6.10.3 Rotazione attorno all'asse x

fig. 6.6.16



La rotazione positiva attorno all'asse x è quella che, guardando dalla freccia dell'asse x verso il piano coordinato y,z , porta l'asse y a combaciare con l'asse z , spazzando l'angolo di 90° .

Dalla precedente affermazione ne deriva che, per la rotazione attorno all'asse x dell'angolo θ , in senso antiorario, si possono adoperare le stesse espressioni ottenute per il piano parallelo a x,y con la seguente sostituzione di assi:

$$\begin{cases} \text{Asse } x & \text{Viene sostituito dall'asse } y & x \xrightarrow{\text{con}} y \\ \text{Asse } y & \text{Viene sostituito dall'asse } z & y \xrightarrow{\text{con}} z \\ \text{Asse } z & \text{Viene sostituito dall'asse } x & z \xrightarrow{\text{con}} x \end{cases} \quad (6.6.62)$$

Nella rotazione attorno all'asse x , la coordinata x del punto oggetto rimane costante $X=x$. Effettuando le sostituzioni (6.6.62) nelle (6.6.60) si ha:

$$\begin{cases} Y = \cos\theta \cdot y - \sin\theta \cdot z \\ Z = \sin\theta \cdot y + \cos\theta \cdot z \\ X = x \end{cases} \quad (6.6.63)$$

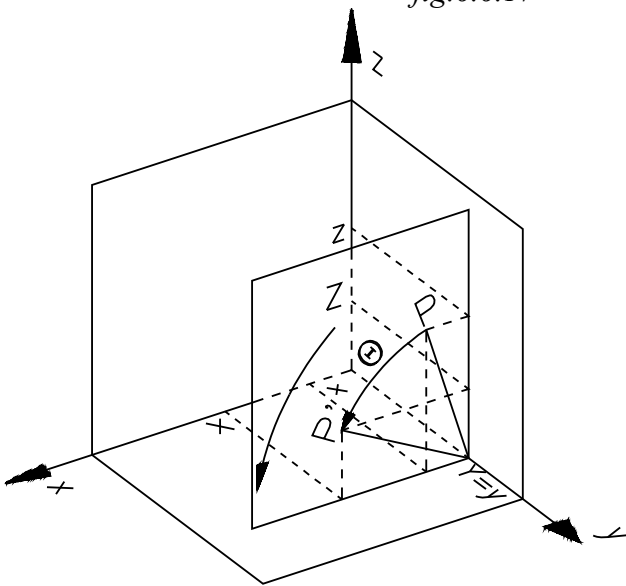
$$\begin{cases} X = x + 0 + 0 \\ Y = 0 + \cos\theta \cdot y - \sin\theta \cdot z \\ Z = 0 + \sin\theta \cdot y + \cos\theta \cdot z \end{cases} \quad (6.6.64)$$

La matrice caratteristica della rotazione dell'angolo θ attorno all'asse x , in coordinate omogenee normalizzate rispetto a x_4 è:

$$[R_{x_\theta}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.6.65)$$

6.6.10.4 Rotazione attorno all'asse y

fig.6.6.17



La rotazione positiva attorno all'asse y è quella che, sul piano z,x , porta l'asse z a combaciare con l'asse x , spazzando l'angolo di 90° .

Dalla precedente affermazione ne deriva che, per la rotazione attorno all'asse y dell'angolo θ , in senso antiorario, si possono adoperare le stesse espressioni ottenute per il piano parallelo a x,y con la seguente sostituzione di assi:

$$\left\{ \begin{array}{lll} \text{Asse } x & \text{Viene sostituito dall'asse } z & x \xrightarrow{\text{con}} z \\ \text{Asse } y & \text{Viene sostituito dall'asse } x & y \xrightarrow{\text{con}} x \\ \text{Asse } z & \text{Viene sostituito dall'asse } y & z \xrightarrow{\text{con}} y \end{array} \right. \quad (6.6.66)$$

Nella rotazione attorno all'asse y , la coordinata y del punto oggetto rimane costante $Y=y$. Effettuando le sostituzioni (6.6.67) nelle (6.6.60) si ha:

$$\left\{ \begin{array}{l} Z = \cos\theta \cdot z - \text{sen}\theta \cdot x \\ X = \text{sen}\theta \cdot z + \cos\theta \cdot x \\ Y = y \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} X = \cos\theta \cdot x + 0 + \text{sen}\theta \cdot z \\ Y = 0 + y + 0 \\ Z = -\text{sen}\theta \cdot x + 0 + \cos\theta \cdot z \end{array} \right.$$

La matrice caratteristica della rotazione dell'angolo θ attorno all'asse y , in coordinate omogenee normalizzate rispetto a x_4 è:

$$[R_{y_\theta}] = \left\| \begin{array}{cccc} \cos\theta & 0 & \text{sen}\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\text{sen}\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\| \quad \text{fig. 6.6.67}$$

6.6.11 SPOSTAMENTO DEI GIUNTI DI UN ROBOT CINEMATICA DIRETTA

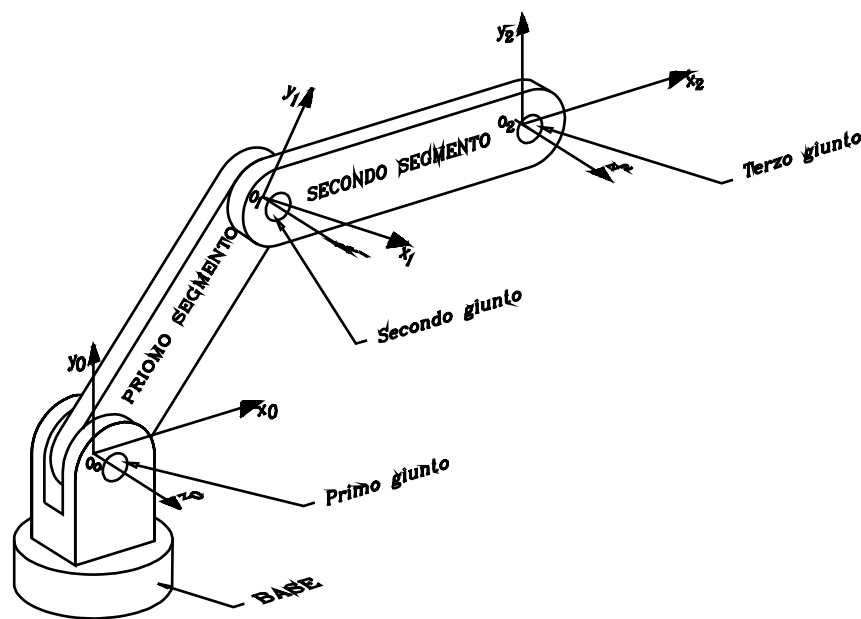
Per facilitare le relazioni cinematiche tra i parametri di giunto e l'estremità della catena cinematica aperta, si introducono particolari convenzioni nella definizione e denominazione: degli elementi del robot, dei giunti e delle terne di riferimento poste sui giunti:

- 1- I segmenti del robot sono numerati in ordine progressivo dalla base di fissaggio fino all'ultimo estremo del polso.
- 2- Il segmento costituente la base di fissaggio è *l'elemento zero*, i successivi segmenti si identificano con il numero progressivo.
- 3- Ogni movimento relativo tra due segmenti di un giunto costituisce *un asse del robot*.
- 4- L'asse può essere o di *traslazione* o di *rotazione*.
- 5- Ogni giunto ha *un solo grado di libertà* (possibilità di movimento relativo) e, quindi, esso costituisce un solo asse di movimento.
- 6- Ogni asse rispetto al precedente può subire o una traslazione o una rotazione.

- 7- Ad ogni asse è associata una terna cartesiana, posta sul giunto e fissa rispetto all'elemento che lo precede. La terna è contraddistinta dal numero di contrassegno dell'elemento che precede il giunto sul quale è posta.
- 8- La prima terna, posta sul primo giunto, è indicata con $O_0 - X_0, Y_0, Z_0$; questo perché l'elemento che lo precede è la base di fissaggio (elemento 0).
- 9- Il numero di riferimenti che vengono considerati per lo studio cinematico sono quelli posti negli n giunti più uno solidale alla estremità della catena cinematica: in totale $n+1$.

Si consideri la semplice articolazione tra i due elementi rappresentati in figura fig.6.6.19.

fig.6.6.18



Al primo giunto (*primo asse di movimento*) tra il primo segmento e la base di fissaggio del robot si associa la prima terna x_0, y_0, z_0 fissa rispetto al basamento (*che rappresenta l'elemento zero precedente al primo segmento*). La seconda terna x_1, y_1, z_1 , viene associata al secondo asse di movimento e quindi al secondo giunto tra il secondo segmento e il primo ed è solidale a questo. Si procede così fino alla estremità dell'ultimo segmento al quale viene associata la terna x_n, y_n, z_n solidale alla estremità del segmento stesso (*non vi è il segmento seguente*).

In generale, considerato il giunto i^{mo} , asse del moto tra il braccio i^{mo} e il precedente $(i-1)^{mo}$, ad esso verrà associata una terna $(x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1})$, fissa rispetto al braccio precedente $(i-1)^{mo}$.

Così, nella semplice articolazione di due elementi, rappresentata in figura, sul *secondo* giunto si articola il *secondo braccio* e la terna di riferimento sul giunto è (x_1, y_1, z_1) , fissa rispetto al primo braccio (elemento 1).

Nella cinematica diretta si vuole risolvere il problema di determinare le coordinate dell'estremità dall'ultimo elemento del robot, rispetto al riferimento $O_0 - X_0, Y_0, Z_0$, espresse

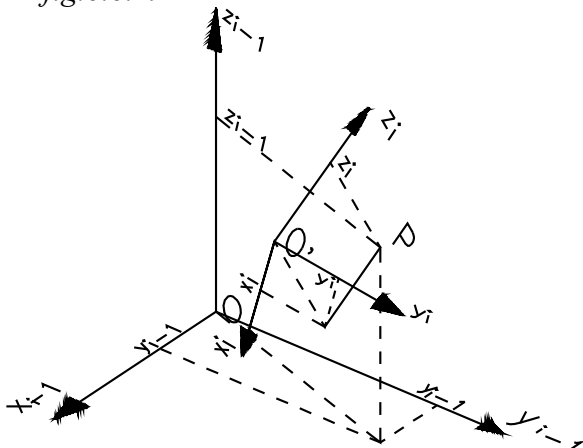
rispetto ai parametri dei giunti. Le coordinate X_0, Y_0, Z_0 vengono denominate *coordinate assolute*.

Con la particolare scelta effettuata per le terne di riferimento, potrà essere descritto il movimento dell'asse del braccio i^{mo} , nel giunto i^{mo} , rispetto alla terna $x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1}$ solidale al braccio precedente.

Ogni giunto ha una terna di assi solidali al segmento precedente.
Con successivi cambiamenti di riferimento si potrà, a ritroso, descrivere il movimento dell'estremità dell'ultimo segmento del polso, mediante le coordinate x_0, y_0, z_0 solidali al basamento del robot, ed espresse rispetto ai parametri di giunto.

Così nelle articolazioni schematiche di figura, dalle coordinate di un punto, riferito alla terna di estremità (x_2, y_2, z_2) solidale al secondo segmento si può passare, con cambiamento di riferimento, a quelle (x_1, y_1, z_1) della terna solidale al primo segmento; con un ulteriore cambiamento di riferimento, il punto considerato potrà essere espresso con le coordinate (x_0, y_0, z_0) della terna solidale al basamento.

fig.6.6.19



Si prendano ora in considerazione i giunti di due segmenti contigui $i-1$ ed i .

Conosciute le coordinate (x_i, y_i, z_i) di un punto P rispetto alla terna del giunto i^{mo} , si vogliono determinare le coordinate $(x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1})$ dello stesso punto, riferite alla terna del giunto precedente $(i-1)^{mo}$.

Per facilitare il cambiamento di riferimento e semplificare le matrici di trasformazione, le due terne cartesiane, riferite a due giunti contigui, possono essere scelte con un particolare criterio.

6.6.11.1 Criteri sulla scelta delle terne di riferimento sui giunti

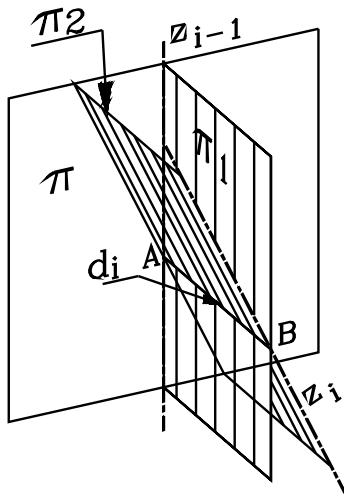
6.6.11.1 TRASFORMAZIONE DI COORDINATE MEDIANTE IL SISTEMA DI RIFERIMENTO DI DENAVIT HARTENBERG

Per comprendere la particolarità del riferimento, conviene rammentare alcune proprietà geometriche delle rette nello spazio.

In generale, gli assi di due giunti consecutivi z_{i-1}, z_i possono essere due rette sghembe, poste nello spazio: fig. 6.6.19 - fig. 6.6.20.

La distanza tra due rette sghembe è il più piccolo segmento che congiunge un punto dell'una con uno dell'altra retta. Tale segmento si trova sull'unica retta, che le interseca e che risulta normale ad entrambi.

fig.6.6.20



Per individuare la retta normale intersecante le due rette sghembe z_{i-1}, z_i , e determinare la loro distanza, si può procedere come indicato in *fig.6.6.20*.

Nel fascio di piani di asse z_{i-1} si può determinare e tracciare l'unico piano π parallelo alla retta z_i . Si può ora determinare e tracciare il piano π_1 del fascio di asse z_{i-1} e normale al piano π , così pure si può determinare e tracciare il piano π_2 del fascio di asse z_i normale allo stesso piano π .

I due piani π_1, π_2 si intersecano su di una retta normale alle due rette z_{i-1}, z_i , in quanto essi sono normali al piano π che risulta parallelo a z_{i-1} , e z_i .

La distanza d_i tra le due rette sghembe è il segmento AB posto sulla retta normale e intersecante le due rette, avente gli estremi nei punti di intersezione.

Occorre ora introdurre le seguenti convenzioni sulle terne di riferimento. Riferirsi alle figure 6.6.20 - 6.6.21:

- 1°- Le terne sono tutte levogire.
- 2°- L'asse z_0 viene scelto coincidente con quello della rotazione o traslazione del primo segmento rispetto al basamento del robot.
- 3°- L'asse x_0 è ovviamente perpendicolare a z_0 ed è fissato dal costruttore.
- 4°- L'asse y_0 viene di conseguenza essendo la terna levogira.
- 6°- Su ogni giunto viene scelta una terna di riferimento solidale all'elemento che lo precede. Così nel giunto " $i+1$ " che congiunge l'elemento " i " con " $i+1$ " (non rappresentato in figura (6.6.21) è posta una terna solidale all'elemento " i ". Sul giunto " i " è posta una terna solidale all'elemento " $i-1$ ". Ecc.
- 7°- Scelta dell'origine
Nel riferimento di *Denavit Hartenberg* la particolare scelta dell'origine permette di ottenere relazioni di trasformazione dalla terna " i " di coordinate alla " $i-1$ " con solamente 4 parametri (anziché in generale 6).

L'origine della terna di riferimento relativa al giunto " $i+1$ " viene posta nel punto O_i , di intersezione della retta normale ai due assi z_{i-1}, z_i , sulla quale si stacca il segmento $O'O_i = d_i$ che misura la distanza tra detti assi *fig.6.6.21*...

- 8°- L'asse del giunto generico " $i+1$ " (corrispondente al suo grado di libertà) si fa coincidere con l'asse cartesiano z_i .
- 9°- L'asse cartesiano x_i si fa coincidere con la retta normale ai due assi consecutivi z_{i-1}, z_i e avente il senso di allontanamento dall'asse z_{i-1} .
- 10°- L'asse cartesiano y_i viene di conseguenza essendo tutte le terne levogire.

Si considerino ora i due elementi consecutivi generici della catena cinematica: " $i-1$ ", " i " *fig.6.6.21*.

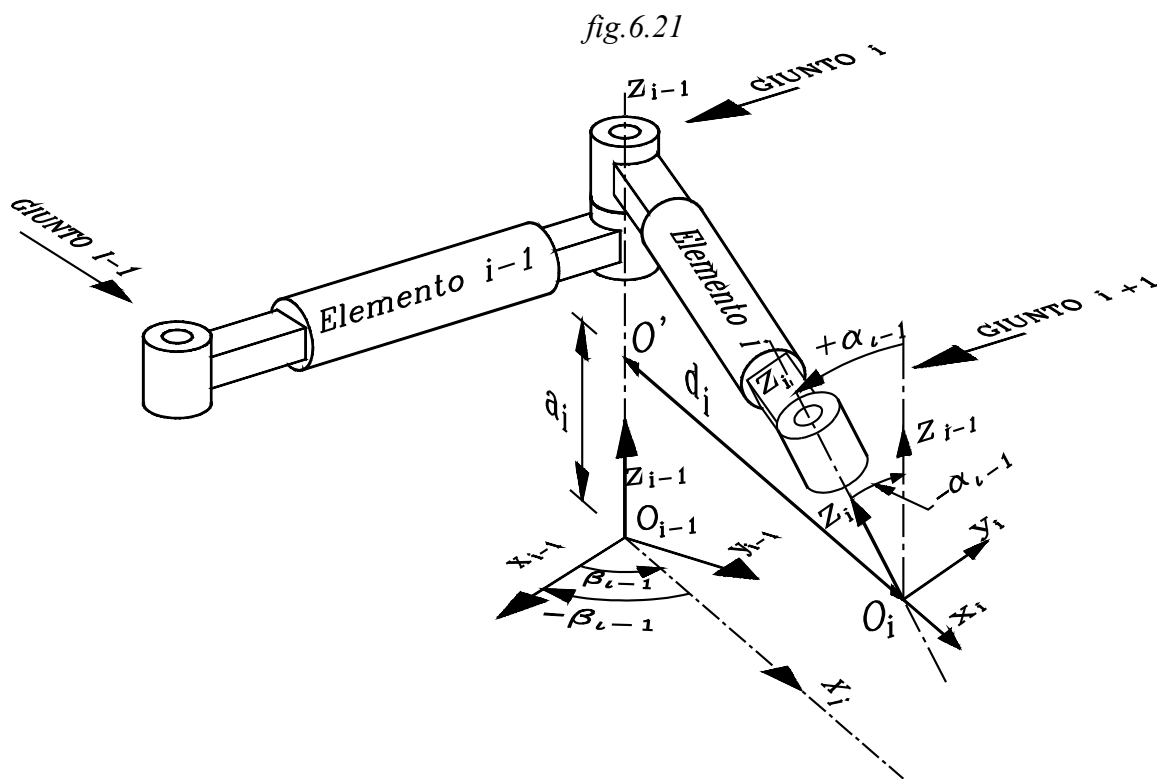
All'estremità dell'elemento i^{mo} vi è il giunto " $i+1$ " con asse di rotazione Z_i (indicato con lo stesso numero dell'elemento i). L'estremità iniziale dell'elemento " i " si articola con l'elemento " $i-1$ " attraverso il giunto " i " con asse " $i-1$ ".

Con le convenzioni sulle terne di riferimento e sulla scelta dell'origine, la matrice di trasformazione di coordinate *a ritroso*, dalla terna " i " alla " $i-1$ ", può essere espressa rispetto a quattro parametri, anziché a sei.

I parametri sono costituiti da due costanti e due variabili di giunto.

Costanti:

- Distanza $O'O_i = d_i$ tra i due assi consecutivi z_{i-1} , z_i
- Distanza $O'O_{i-1} = a_i$ tra l'origine O_{i-1} e la proiezione dell'origine O_i sull'asse z_{i-1} .
Si noti che i tre punti O_{i-1}, O', O_i giacciono su uno stesso piano.



Variabili di giunto

- L'asse z_i in generale è sghembo rispetto a z_{i-1} . Si indichi con α_{i-1} l'angolo che z_i forma rispetto a z_{i-1} . Esso si intende positivo se, guardando dalla freccia dell'asse x_i , la proiezione di z_{i-1} sul piano perpendicolare a x_i deve ruotare in senso antiorario per ricongiungersi con la proiezione di z_i sullo stesso piano, spazzando l'angolo inferiore a 90° ; fig.6.6.21 L'angolo α_{i-1} è la variabile del giunto " $i+1$ ".
- Per la particolare scelta dei riferimenti, l'asse x_i è normale e incontra l'asse z_{i-1} , così pure avviene per l'asse x_{i-1} . Si indichi con β_{i-1} l'angolo che l'asse x_i forma rispetto a x_{i-1} . Esso si intende positivo se, guardando dalla freccia dell'asse z_{i-1} , la proiezione di x_{i-1} sul piano normale a z_i deve ruotare in senso antiorario per ricongiungersi con la proiezione di x_i sullo

stesso piano, spazzando l'angolo inferiore a 90° ; fig.6.6.21 L'angolo β_{i-1} è la variabile del giunto "i".

Per il cambiamento del riferimento a ritroso dalla terna "i" alla "i-1" si adoperano le matrici inverse del cambiamento di coordinate, che coincidono con quelle delle trasformazioni geometriche:

$$[\mathbf{T}_{rc}]^{-1} = \left[[\mathbf{T}_r]^{-1} \right]^{-1} = \mathbf{T}_r \quad (6.6.78)$$

Dove, come al solito, con \mathbf{T}_{rc} si intende la matrice di trasformazione diretta di coordinate dalla terna "i-1" alla "i", che è l'inversa della corrispondente trasformazione geometrica \mathbf{T}_r .

$$[\mathbf{T}_{rc}] = [\mathbf{T}_r]^{-1}$$

Dovendo effettuare un cambiamento di coordinate in senso inverso, dalla terna "i" alla "i-1" occorre effettuare la matrice inversa di $[\mathbf{T}_{rc}]$ e quindi si ha la (6.6.78).

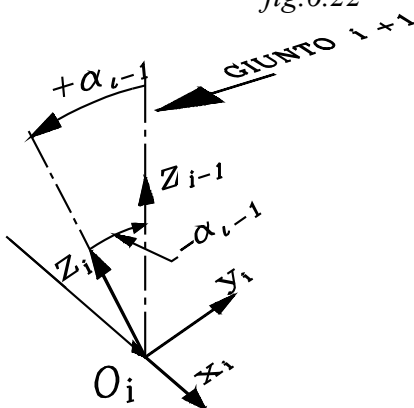
Per portare a coincidere la terna "i" con la "i-1" si possono effettuare le seguenti trasformazioni:

1. L'asse x_i è normale ai due assi z_{i-1} , z_i e il secondo di questi forma l'angolo α_{i-1} rispetto al primo. Con una rotazione $-\alpha_{i-1}$ si porta l'asse z_i nella stessa direzione e senso di quelli dell'asse z_{i-1} . In questa rotazione l'asse x_i rimane invariato: i suoi punti sono uniti nella trasformazione. L'asse y_i si porterà in una nuova posizione ben definita, conoscendo quella degli altri due.
2. Si trasporta la terna ottenuta dall'origine O_i alla sua proiezione O' sull'asse z_i . Si ha una trasformazione di traslazione di coordinate in senso inverso nella direzione dell'asse x_i di componente " $-d_i$ ".
3. Si trasporta la terna ottenuta dal punto di proiezione O' all'origine O_{i-1} . Si ha una trasformazione di traslazione di coordinate in senso inverso nella direzione dell'asse z_{i-1} di componente " $-a$ ".
4. Dopo l'ultima traslazione la terna ottenuta ha l'asse z coincidente con z_{i-1} e l'origine coincidente con O_{i-1} . L'asse x_i , nelle due ultime trasformazioni di traslazione, si è spostato nello spazio, ma non ha mutato né direzione né senso: forma ancora l'angolo β_{i-1} rispetto a x_{i-1} . Con una rotazione $-\beta_{i-1}$ attorno all'asse z_{i-1} si porta l'asse x_i a coincidere con x_{i-1} . Di conseguenza anche y_i coinciderà con y_{i-1} .

Si effettuano ora le trasformazioni di coordinate descritte nei punti 1, 2, 3, 4.

6.6.11.3.1 Rotazione $-\alpha_{i-1}$ attorno all'asse x_i

fig.6.22



Si effettua la rotazione $-\alpha_{i-1}$ attorno all'asse x_i che porta z_i ad essere parallelo e nello stesso senso di z_{i-1} .

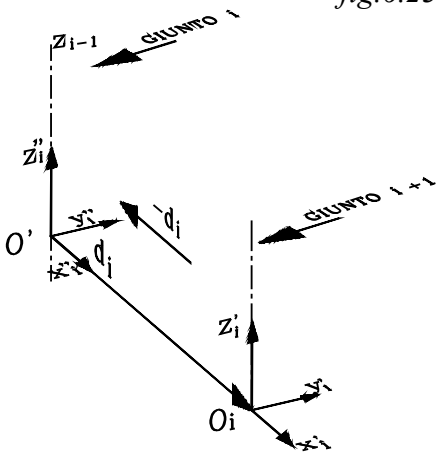
La matrice di trasformazione di coordinate nella rotazione inversa attorno a x_i è data dalla rotazione geometrica R_{x_i} di matrice:

$$[R_{x_i}] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_{i-1} & -\sin \alpha_{i-1} & 0 \\ 0 & \sin \alpha_{i-1} & \cos \alpha_{i-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Si noti che essendo la matrice riferita ad trasformazione inversa di coordinate da "i" ad "i-1" si pone nella rotazione l'angolo $-(\alpha_{i-1}) = \alpha_{i-1}$.

6.6.11.3.2 Traslazione della terna di "-d_i" dall'origine O_i al punto O'

fig.6.23



Si effettua la traslazione di coordinate di un vettore posto sull'asse x_i di componente "-d_i" che porta l'origine O_i nella sua proiezione O' sull'asse z_{i-1}.

La trasformazione è la traslazione T_{x_i} di matrice:

$$[T_s] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & d_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Essendo la matrice riferita ad una trasformazione inversa da "i" ad "i-1" si pone nella traslazione la componente $-(-d_i) = d_i$.

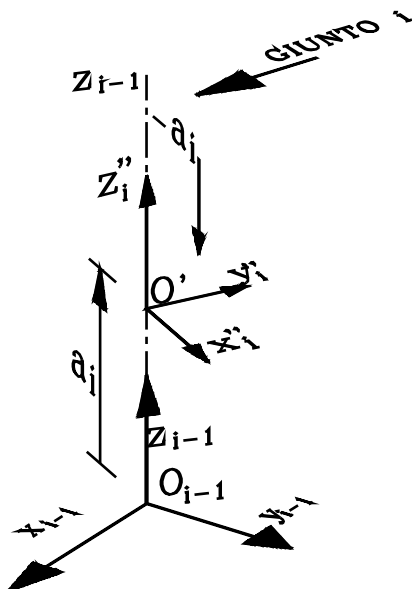
Nella figura fig.6.23 si è indicata con O_i-x',y',z' la terna dopo la precedente rotazione con O'-x'',y'',z'' la terna dopo la traslazione di -d_i.

6.6.11.3.3 Traslazione della terna di "-a_i" dal punto O' all'origine O_{i-1}.

Si effettua la traslazione di coordinate del vettore posto sull'asse z_{i-1} di componente "-a_i" che porta il punto O' sull'origine O_{i-1}.

La trasformazione è la traslazione T_{z_i} di matrice:

fig.6.24



$$[T_s] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a_i \end{vmatrix}$$

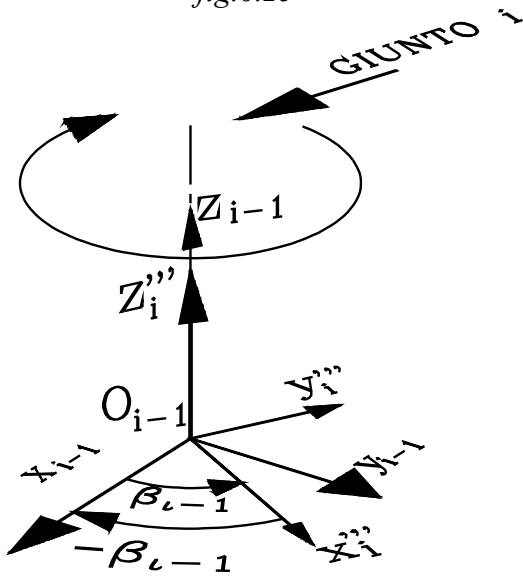
Essendo la matrice riferita ad una trasformazione inversa da "i" ad "i-1", si pone nella traslazione la componente $-(-a_i) = a_i$.

Dopo la traslazione la terna ha:

- l'asse z (indicato con z''_i in figura) coincidente con z_{i-1}
- l'asse x (indicato con x''_i in figura) parallelo e nello stesso senso di x_{i-1} .
- l'asse y è conseguente alla posizione degli altri due assi.

Dopo la traslazione, la terna $O'-x''_i, x''_i, x''_i$ porta la sua origine a coincidere con O_{i-1} (fig. 6.25) e viene indicata con $O_{i-1}-x'''_i, x'''_i, x'''_i$.

6.6.11.3.4 Rotazione β_{i-1} attorno all'asse z_{i-1} fig. 6.25



Si effettua la rotazione $-\beta_{i-1}$ attorno all'asse z_{i-1} che porta l'asse x'''_i a coincidere con x_{i-1} .

La matrice di trasformazione di coordinate nella rotazione inversa attorno a z_{i-1} è data dalla rotazione geometrica $R_{z_{i-1}}$ di matrice:

$$[R_{z_{i-1}}] = \begin{vmatrix} \cos\beta_{i-1} & -\sin\beta_{i-1} & 0 & 0 \\ \sin\beta_{i-1} & \cos\beta_{i-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Nella matrice viene introdotta la rotazione: $-(-\beta_{i-1}) = \beta_{i-1}$ in quanto si riferisce alla trasformazione inversa dalla terna $O_{i-1}-x'''_i, x'''_i, x'''_i$ alla

$O_{i-1}-x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1}$.

6.6.11.3.5 Matrice caratteristica della trasformazione di coordinate dal riferimento i^{mo} al riferimento $(i-1)^{mo}$

Per determinare la matrice caratteristica $[T_c]$ della trasformazione T_c di coordinate dalla terna i^{ma} riferita al giunto "i+1" alla $(i-i)^{ma}$ riferita al giunto "i", occorre effettuare la composizione delle 4 trasformazioni definite nei punti precedenti, costituite in ordine:

1. Rotazione R_{x_i} di matrice $[R_{x_i}]$
2. Traslazione T_{x_i} di matrice $[T_{x_i}]$
3. Traslazione $T_{z_{i-1}}$ di matrice $[T_{z_{i-1}}]$
4. Rotazione $R_{z_{i-1}}$ di matrice $[R_{z_{i-1}}]$

La trasformazione T_c è la composizione:

$$T_c = R_{x_i} \cdot T_{x_i} \cdot T_{z_{i-1}} \cdot R_{z_{i-1}}$$

La matrice $[T_c]$ della trasformazione T_c è data dal prodotto matriciale delle singole matrici di trasformazione, poste in ordine da destra verso sinistra dalla prima all'ultima.

$$[T_c] = [R_{z_{i-1}}] \cdot [T_{z_{i-1}}] \cdot [T_{x_i}] \cdot [R_{x_i}]$$

Partendo da destra verso sinistra, effettuiamo i prodotti matriciali.

$$[T_{x_i}] \cdot [R_{x_i}] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & d_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha_{i-1} & -\sin\alpha_{i-1} & 0 \\ 0 & \sin\alpha_{i-1} & \cos\alpha_{i-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$[T_{x_i}] \cdot [R_{x_i}] = \begin{vmatrix} \cos\beta_{i-1} & -\sin\beta_{i-1} & 0 & d_i \\ \sin\beta_{i-1} & \cos\beta_{i-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Moltiplicando a sinistra per la matrice $[T_{z_{i-1}}]$ si ha:

$$[T_{z_{i-1}}] \cdot [T_{x_i}] \cdot [R_{x_i}] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \cos\beta_{i-1} & -\sin\beta_{i-1} & 0 & d_i \\ \sin\beta_{i-1} & \cos\beta_{i-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$[T_{z_{i-1}}] \cdot [T_{x_i}] \cdot [R_{x_i}] = \begin{vmatrix} \cos\beta_{i-1} & -\sin\beta_{i-1} & 0 & d_i \\ \sin\beta_{i-1} & \cos\beta_{i-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Infine moltiplicando a sinistra per la matrice $[R_{z_{i-1}}]$ si ottiene la matrice della trasformazione di coordinate $[T_c]$ dalla terna "i" alla "i-i"

$$[R_{z_{i-1}}] \cdot [T_{z_{i-1}}] \cdot [T_{x_i}] \cdot [R_{x_i}] = \begin{vmatrix} \cos\beta_{i-1} & -\sin\beta_{i-1} & 0 & 0 \\ \sin\beta_{i-1} & \cos\beta_{i-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \cos\beta_{i-1} & -\sin\beta_{i-1} & 0 & d_i \\ \sin\beta_{i-1} & \cos\beta_{i-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} R_{z_{i-1}} \\ T_{z_{i-1}} \\ T_{x_i} \\ R_{x_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\beta_{i-1} & -\sin\beta_{i-1} \cdot \cos\alpha_{i-1} & \sin\beta_{i-1} \cdot \sin\alpha_{i-1} & \cos\beta_{i-1} \cdot d_i \\ \sin\beta_{i-1} & \cos\beta_{i-1} \cdot \cos\alpha_{i-1} & -\cos\beta_{i-1} \cdot \sin\alpha_{i-1} & \sin\beta_{i-1} \cdot d_i \\ 0 & \sin\alpha_{i-1} & \cos\alpha_{i-1} & a_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Avanti...

[clic qui per continuare](#)


Indietro...

[clic qui per precedente](#)


Indietro...

[clic qui per la pagina iniziale](#)