

[Cile per tutti gli appunti](#) (AUTOMAZIONE – TRATTAMENTI TERMICI ACCIAIO – SCIENZA delle COSTRUZIONI...)



e-mail per suggerimenti

3.8.5 STUDIO DELLA STABILITÀ MEDIANTE RAPPRESENTAZIONE LOGARITMICA

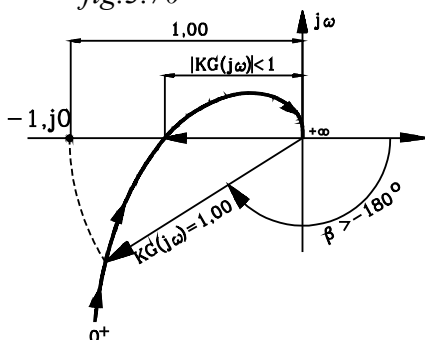
Si prenderà in esame sempre il caso più usuale, nel quale il denominatore della funzione di trasferta a catena aperta, uguagliato a zero, non ammette soluzioni con parte reale positiva.

Per la stabilità basta studiare il valore del modulo $|KG(j\omega)|$ della funzione di trasferimento per valori di $(-1, j0)$ che determinano fasi del vettore nell'intorno di -180° .

Si è stabilito infatti che quando la fase del vettore $|KG(j\omega)|$ risulta di -180° , se il modulo $|KG(j\omega)| > 1$ allora la curva tracciata dall'estremità di detto vettore al variare di ω contorna il punto $(-1, j0)$ e il sistema è instabile; se, invece risulta $|KG(j\omega)| < 1$ allora la curva sopra descritta non contorna il punto $(-1, j0)$ e il sistema è stabile.

Occorre osservare che all'aumentare di ω il modulo della funzione di trasferta diminuisce, mentre la sua fase diviene sempre più negativa. Ciò è fisicamente spiegabile: infatti è intuitivo che la risposta ad un segnale sinusoidale si *attenua alle elevate frequenze* per effetto degli elementi inerziali che non riescono a seguire le rapide vibrazioni che tendono inoltre ad essere ritardate nel tempo.

fig.3.70

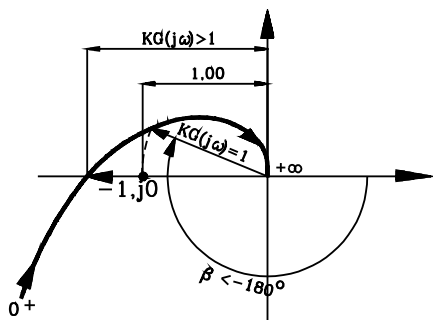


Tenuto conto dell'osservazione fatta, per verificare se la curva tracciata dall'estremità del vettore $KG(j\omega)$ al variare di ω contorna o no il punto $(-1, j0)$, si può porre l'attenzione sul valore che l'angolo di fase assume quando il modulo di $|KG(j\omega)|$ risulta uguale ad 1.

Osservando la figura si nota che, quando la curva tracciata dalle estremità dei vettori $KG(j\omega)$ al variare di ω nell'intervallo $0 \div +\infty$ non contorna il punto $(-1, j0)$, il particolare vettore con fase -180° ha modulo inferiore ad 1: $|KG(j\omega)| < 1$. Ne deriva che la funzione di trasferta $KG(j\omega)$ quando assumerà il valore unitario: $|KG(j\omega)| = 1$ avrà una fase $\beta > -180^\circ$ (minore di 180° in valore assoluto).

Si conclude che il sistema ha stabilità assoluta quando, al variare di ω nell'intervallo $0 \div \infty$ il modulo di $KG(j\omega)$ assume il valore unitario con un angolo di fase $\beta \Rightarrow -180^\circ$ (inferiore di 180° in valore assoluto)

fig.3.71



Ne deriva che la funzione di trasferta $KG(j\omega)$ quando assumerà il valore unitario: $|KG(j\omega)| = 1$ avrà una fase $\beta < -180^\circ$ (maggiore di 180° in valore assoluto).

Si conclude che il sistema risulta instabile quando, al variare di ω nell'intervallo $0 \div \infty$ il modulo di $KG(j\omega)$ assume il valore unitario con un angolo di fase $\beta = < -180^\circ$ (maggiore di 180° in valore assoluto)

Tenendo conto di questi ultimi criteri di stabilità conviene analizzare separatamente il modulo e l'angolo di fase del vettore $KG(j\omega)$ al variare di ω nell'intervallo $0^+ \div +\infty$. Per detto studio torna utile la rappresentazione logaritmica o di Bode.

La funzione di trasferimento $KG(s)$ a catena aperta si presenta come il rapporto tra due polinomi nella variabile s :

$$KG(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \quad (3.8.21)$$

In molti casi il polinomio numeratore $N(s)$ coincide con una costante K (come è avvenuto negli esempi studiati).

I polinomi si possono decomporre in prodotto di tanti binomi quant'è il grado dei polinomi stessi. La funzione di trasferta si può ridurre nella forma:

$$KG(s) = K \cdot \frac{(s - z_1) \cdot (s - z_2) \cdot \dots \cdot (s - z_n)}{(s - p_1) \cdot (s - p_2) \cdot \dots \cdot (s - p_m)} \quad (3.8.22)$$

Dove:

$z_1, z_2, \dots, z_i, \dots, z_n$ sono le soluzioni della equazione $N(s)=0$.

$p_1, p_2, \dots, p_i, \dots, p_m$ sono le soluzioni della equazione $D(s)=0$.

Si indichino genericamente con $s_1, s_2 \dots s_i \dots$ i termini noti dei binomi indifferentemente che siano al numeratore o al denominatore di $KG(s)$: che rappresentino cioè o una soluzione z_i oppure p_i .

Si possono presentare diversi casi a seconda della natura della soluzione s_i .

s_i è reale $\neq 0$ Usualmente reale negativa. In tal caso il binomio si presenta nella forma $(s + s_i)$. Vi possono essere più soluzioni reali e coincidenti e quindi il binomio $(s + s_i)$ compare più volte nel prodotto.

s_i è uguale a zero In tal caso il binomio si presenta nella forma $(s+0)=s$ che può comparire più volte nel prodotto.

s_i è complesso Usualmente con parte reale negativa. Se esiste come soluzione un numero complesso $(-\alpha + j\omega)$ vi è anche il complesso coniugato $(-\alpha - j\omega)$. Nel prodotto si presentano i due binomi:

$$(s + \alpha + j\omega) \cdot (s + \alpha - j\omega)$$

Conviene in questo caso lasciare come fattore il prodotto dei due binomi, ottenendo così un trinomio di 2° grado del tipo già considerato:

$$s^2 + 2\sigma\omega_0 \cdot s + \omega_0^2$$

Così, per esempio, tanto per fissare le idee, si supponga che la funzione di trasferta si presenti nella forma:

$$KG(s) = K_1 \cdot \frac{(s+a) \dots}{s \cdot (s+b) \cdot (s^2 + 2\sigma\omega_0 \cdot s + \omega_0^2) \dots}$$

Come si è detto, per certificare la stabilità o no del sistema, occorre studiare la funzione $KG(j\omega)$ al variare di ω nell'intervallo $0^+ \div +\infty$ e determinare l'angolo di fase quando il modulo $|KG(j\omega)| = 1$: il sistema è stabile se detto angolo è maggiore di -180° (*minore di 180° in valore assoluto*), è instabile nel caso che risulti minore di -180° (*maggiore di 180° in valore assoluto*).

Si sostituisca $j\omega$ alla variabile s :

$$KG(j\omega) = K_1 \cdot \frac{(j\omega + a) \dots}{j\omega \cdot (j\omega + b) \cdot (-\omega^2 + j\omega \cdot 2\sigma\omega_0 + \omega_0^2) \dots}$$

Si pongano in evidenza tutte le costanti dei binomi; nel caso del trinomio di 2° grado si pone in evidenza ω_0^2 . Si ottiene:

$$KG(j\omega) = K_1 \cdot \frac{\left(j\omega \cdot \frac{1}{a} + 1\right) \cdot a \dots}{j\omega \cdot \left(j\omega \cdot \frac{1}{b} + 1\right) \cdot b \cdot \left(-\omega^2 \cdot \frac{1}{\omega_0^2} + j\omega \cdot 2\sigma \cdot \frac{1}{\omega_0} + 1\right) \cdot \omega_0^2 \dots}$$

Si osservi che i termini noti dei binomi: a , b , $\omega_0 \dots$ hanno le stesse dimensioni di ω : l'inverso del tempo $[T^{-1}]$; per cui i loro inversi: $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{\omega_0}$ hanno le dimensioni del tempo $[T]$. esse prendono il nome di costanti di tempo. Indichiamo con:

$$\tau_1 = \frac{1}{a} \quad \tau_2 = \frac{1}{b} \quad \tau_3 = \frac{1}{\omega_0} \quad \text{le costanti di tempo.}$$

Tutti i fattori costanti, posti al numeratore e la denominatore si riuniscono in un'unica costante globale:

$$K = \frac{K_1 \cdot a \dots}{b \cdot \omega_0 \dots}$$

in tal modo la funzione di trasferta si presenta nella forma:

$$KG(j\omega) = K \cdot \frac{(j\omega \cdot \tau_1 + 1) \dots}{j\omega \cdot (j\omega \cdot \tau_2 + 1) \cdot (-\omega^2 \cdot \tau_3^2 + j\omega \cdot 2\sigma \tau_3 + 1) \dots} \quad (3.8.24)$$

Si deve studiare separatamente il modulo e l'angolo di fase della funzione $KG(j\omega)$ al variare di ω nell'intervallo $0^+ \div +\infty$.

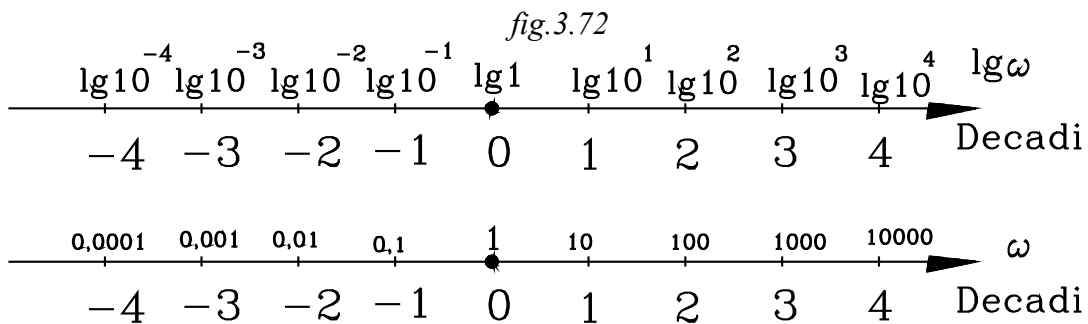
Risulta molto conveniente studiare il modulo della funzione, in un piano doppio logaritmico, nel quale sull'asse delle ascisse viene riportata la pulsazione ω e sulle ordinate il corrispondente valore del modulo.

3.8.5.1 Scala delle ascisse delle pulsazioni ω

La scala logaritmica, dell'asse delle ascisse, può essere effettuata secondo i logaritmi in base 10: " $\lg \omega$ ". In tal caso una unità logaritmica corrisponde ad una potenza di 10.

$$\lg 10^n = n \cdot \lg_{10} 10 = n \cdot 1 = n$$

Le unità logaritmiche in base 10 vengono dette *decadi*.

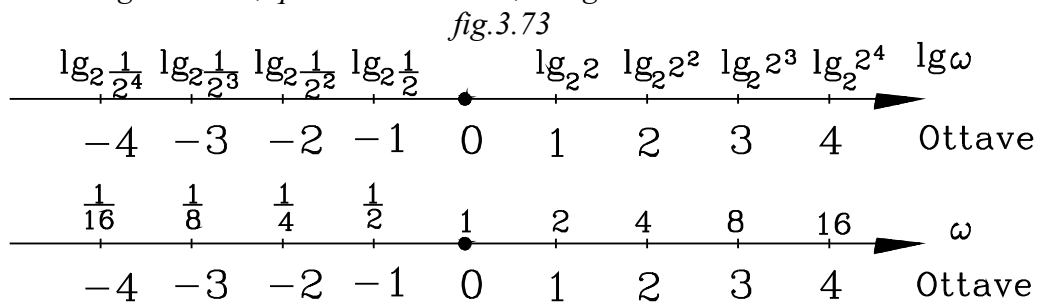


Più conveniente risulta effettuare la scala logaritmica dell'asse delle ascisse secondo il logaritmo in base 2: " $\lg_2 \omega$ ". In tal caso una unità logaritmica corrisponde ad una potenza di 2.

$$\lg_2 2^n = n \cdot \lg_2 2 = n \cdot 1 = n$$

La scala risulta più fitta e più appropriata per riportare i bassi valori di ω quali si possono presentare nei sistemi meccanici quando risulta unitario il modulo della funzione di trasferta.

Le unità logaritmiche, quando la base è 2, vengono dette "*Ottave*".



La scelta della scala da adottare dipende dal tipo di sistema e dal valore di ω per il quale risulta $|KG(j\omega)| = 1$.

Qui, negli esercizi si adotteranno *le ottave*.

3.8.5.2 Scala delle ordinate - dei moduli $|KG(j\omega)|$

I moduli $|KG(j\omega)|$ della funzione di trasferta vengono riportati sull'asse delle ordinate in *DECIBEL "db"*.

Il valore in decibel è data dalla espressione:

$$db = 20 \cdot \lg_{10} |KG(j\omega)| = 20 \cdot \lg |KG(j\omega)| \quad (3.8.25)$$

Se sull'asse delle ascisse sono riportate le pulsazioni ω secondo il logaritmo in base 10 (*unità in decadi*) per la determinazione di "db" si utilizza l'espressione (3.8.25).

Volendo utilizzare la scala dell'asse delle ascisse in *ottave*, si trasforma il logaritmo in base 10 nel logaritmo in base 2.

Per la trasformazione del logaritmo in base 10 in logaritmo in base 2 si applica la seguente relazione:

$$\log_{10} N = \log_{10} 2 \cdot \log_2 N$$

$$\text{ma } \log_{10} 2 \cong 0.3 \quad \text{per cui}$$

$$\log_{10} N = 0.3 \cdot \log_2 N$$

Così l'espressione del modulo della funzione di trasferta in *dB* è:

$$dB = 20 \cdot \log_{10} |KG(j\omega)| = 20 \cdot 0.3 \cdot \log_2 |KG(j\omega)|$$

$$db = 6 \cdot \log_2 |KG(j\omega)| \quad (3.8.26)$$

Con la decomposizione dei polinomi, la funzione di trasferta si presenta come prodotto e divisione di più termini, del tipo espresso dalla (3.8.24).

$$KG(j\omega) = K \cdot \frac{(j\omega \cdot \tau_1 + 1) \dots}{j\omega \cdot (j\omega \cdot \tau_2 + 1) \cdot (-\omega^2 \cdot \tau_3^2 + j\omega \cdot 2\sigma\tau_3 + 1) \dots} \quad (3.8.27)$$

La funzione $KG(j\omega)$ si presenta come prodotto e divisione di numeri complessi. Il modulo della funzione è dato dal prodotto e divisione dei rispettivi moduli dei singoli numeri complessi.

$$|KG(j\omega)| = K \cdot \frac{|(j\omega \cdot \tau_1 + 1)| \dots}{|j\omega| \cdot |(j\omega \cdot \tau_2 + 1)| \cdot |(-\omega^2 \cdot \tau_3^2 + j\omega \cdot 2\sigma\tau_3 + 1)| \dots}$$

Calcolando l'espressione del modulo in *dB*, il prodotto e divisione si traducono in una *somma algebrica*: i termini al numeratore vengono sommati e quelli al denominatore sottratti.

$$db = 20 \cdot \log K + 6 \cdot \log_2 |(j\omega \tau_1 + 1)| + \dots - 6 \cdot \log_2 |j\omega| + 6 \cdot \log_2 |(j\omega \tau_2 + 1)| - 6 \cdot \log_2 |(-\omega^2 \cdot \tau_3^2 + j\omega 2\sigma\tau_3 + 1)|$$

Per la costante K conviene lasciare il logaritmo in base 10

Essendo inoltre la funzione di trasferta una divisione di prodotti di numeri complessi, il suo angolo di fase si ottiene sommando le fasi dei singoli numeri complessi posti al numeratore e sottraendo quelle dei fattori posti al denominatore.

Con l'introduzione delle scale logaritmiche, sia per il calcolo dei moduli che per le fasi si operano somme algebriche.

Per la rappresentazione delle fasi l'asse delle ordinate viene riportata in scala lineare

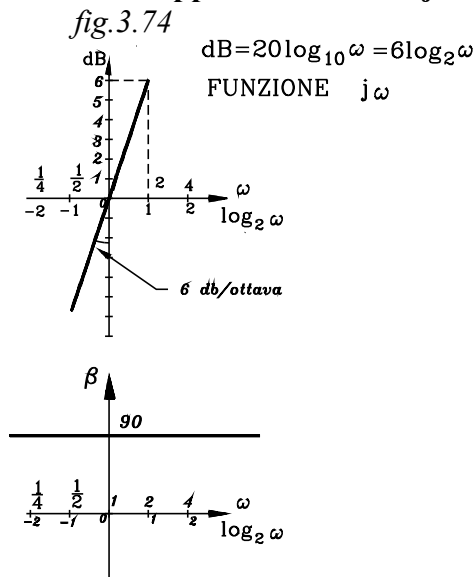
Dovendo effettuare una somme algebrica di più termini, sia per il calcolo del modulo che per l'angolo di fase, conviene rappresentare singolarmente ciascun termine e poi effettuare, al variare di ω , la somma algebrica delle ordinate.

I termini della somma algebrica sono i moduli dei fattori al numeratore e al denominatore della funzione di trasferta le cui espressioni si riducono a tre tipi fondamentali:

- 1- $j\omega$
- 2- $j\omega \cdot \tau + 1$
- 3- $(j\omega)^2 \cdot \tau^2 + j\omega \cdot 2\sigma\tau + 1 = -\omega^2 \cdot \tau^2 + j\omega \cdot 2\sigma\tau + 1 = j\omega \cdot 2\sigma\tau + (1 - \omega^2 \cdot \tau^2)$

La rappresentazione sarà diversa a seconda che l'espressione si trovi al numeratore o al denominatore.

3.8.5.3 Rappresentazione di $j\omega$



Modulo di $j\omega$:

$$|j\omega| = \omega$$

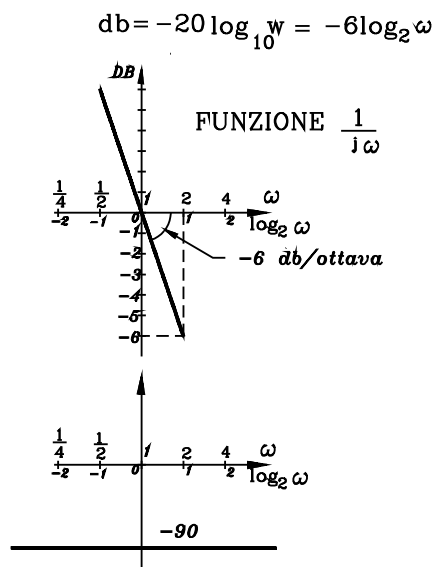
Il modulo in dB espresso in ottave:

$$db = 20 \cdot \log_{10} \omega = 20 \cdot 0.3 \log_2 \omega$$

$$db = 6 \cdot \log_2 \omega \quad (3.8.28)$$

Il diagramma che rappresenta il modulo, in dB, della funzione " $j\omega$ " al variare della pulsazione ω , riportata in ottave sull'asse delle ascisse, è una retta passante per l'origine con inclinazione 6db/ottava. L'inclinazione della retta è tale che per ogni unità logaritmica il modulo aumenta di 6db.

La fase della funzione " $j\omega$ " è costantemente $\beta = 90^\circ$ per qualsiasi valore di ω .



3.8.5.4 Rappresentazione della funzione $\frac{1}{j\omega}$

fig.3.75

Il modulo della finzione $\frac{1}{j\omega}$ è:

$$\left| \frac{1}{j\omega} \right| = \frac{1}{\omega}$$

Il modulo in "db", espresso secondo il logaritmo in base 2, risulta:

$$db = 20 \cdot \log_{10} \left(\frac{1}{\omega} \right) = -20 \cdot \log_{10} \omega = 20 \cdot 0.3 \cdot \log_2 \omega$$

$$db = -6 \cdot \log_2 \omega \quad (3.8.29)$$

Il diagramma che rappresenta il modulo, in dB, della funzione " $\frac{1}{j\omega}$ " al variare della pulsazione ω , riportata in ottave sull'asse delle ascisse, è una retta passante per l'origine con inclinazione $-6\text{dB} / \text{ottava}$. L'inclinazione della retta è tale che per ogni unità logaritmica il modulo diminuisce di 6db.

La fase della funzione " $\frac{1}{j\omega}$ " è costantemente $\beta = -90^\circ$ per qualsiasi valore di ω .

Rappresentazione della funzione $j\omega\tau + 1$

Il modulo della funzione $j\omega\tau + 1$ è:

$$|j\omega\tau + 1| = \sqrt{(\omega\tau)^2 + 1}$$

Il modulo in dB, espresso secondo il logaritmo in base 2, risulta:

$$db = 20 \cdot \log_{10} \sqrt{(\omega\tau)^2 + 1} = 20 \cdot 0.3 \cdot \log_2 \sqrt{(\omega\tau)^2 + 1}$$

$$db = 6 \cdot \log_2 \sqrt{(\omega\tau)^2 + 1} \quad (3.8.30)$$

Per un primo studio della stabilità di un sistema, non interessa la rappresentazione esatta della funzione che dà il modulo in dB, ma il suo andamento generico in funzione della pulsazione ω nell'intervallo $0^+ \div +\infty$.

Così di una funzione un po' complessa si rappresentano gli asintoti che detta funzione ammette per $\omega \rightarrow 0^+$ e per $\omega \rightarrow +\infty$.

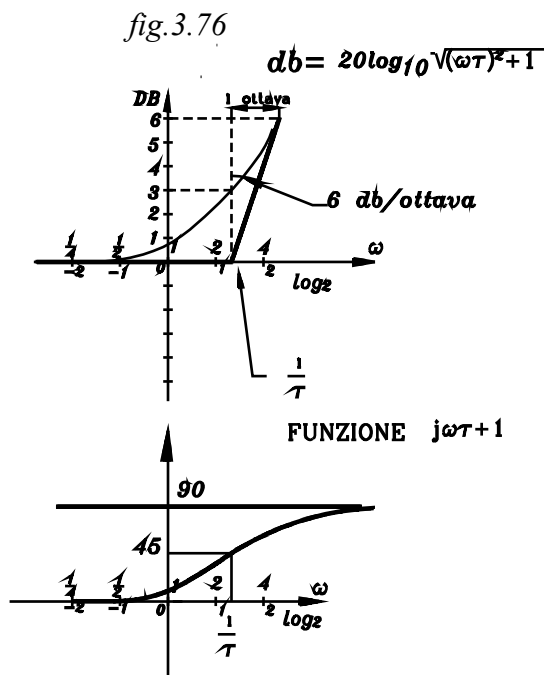
Per rappresentare una funzione del modulo in dB, al variare di ω , del tipo descritto dalla espressione (3.8.30), conviene procedere nella seguente maniera:

- 1- Si determina la retta asintotica della funzione per $\omega \rightarrow 0^+$.
- 2- Si determina la retta asintotica della funzione per $\omega \rightarrow +\infty$.
- 3- Si determina il punto di incontro delle due rette asintotiche uguagliando le loro espressioni in funzione di ω .

- 4- La curva che rappresenta il modulo in funzione di ω in scala logaritmica, praticamente coincide con gli asintoti quando ci si discosta di poche ottave dal punto di incontro delle rette asintotiche.

In tal modo, per la rappresentazione della curva, basta determinare pochi punti di essa, (se occorre), in prossimità del punto di incontro con le rette asintotiche e farla poi coincidere con queste ultime.

Si segua il procedimento indicato nei 4 punti.



Retta asintotica per $\omega \rightarrow 0^+$

Si effettui il limite per $\omega \rightarrow 0^+$:

$$db = \lim_{\omega \rightarrow 0} \sqrt{(\omega\tau)^2 + 1} = 6 \cdot \log_2 1 = 0$$

Quando si considerano valori molto piccoli di ω la curva, che rappresenta il modulo in dB, assume valori sempre più vicini a zero, essa tende alla retta:

$$db = 0 \quad (3.8.31)$$

L'asintoto per $\omega \rightarrow 0^+$ è la retta coincidente con l'asse delle ascisse.

Retta asintotica per $\omega \rightarrow +\infty$

Senza dover ricorrere ai procedimenti rigorosi dettati dall'analisi matematica nella determinazione degli asintoti di una funzione, si effettui un ragionamento intuitivo.

Si vuole studiare a cosa tende l'espressione (3.8.30):

$$db = 6 \cdot \log_2 \sqrt{(\omega\tau)^2 + 1} \quad (3.8.30)$$

per $\omega \rightarrow +\infty$

Quando si danno ad ω valori elevati è evidente che nella relazione (3.8.30) si può trascurare 1 rispetto al termine $(\omega\tau)^2$; per cui, è intuitivo che all'aumentare di ω il modulo tende alla espressione:

$$db = 6 \cdot \log_2 \sqrt{(\omega\tau)^2} = 6 \cdot \log_2(\omega\tau)$$

$$db = 6 \cdot \log_2 \omega\tau = 6 \cdot \log_2 \omega + 6 \cdot \log_2 \tau \quad (3.8.32)$$

L'asintoto è una retta, non passante per l'origine inclinata di $6db/ottava$. L'inclinazione della retta è tale che per ogni unità logaritmica il modulo aumenta di $6db$.

Il punto di incontro tra i due asintoti si ottiene uguagliando l'equazione delle due rette (3.8.31), (3.8.32):

$$0 = 6 \cdot \log_2(\omega\tau) \quad \log_2(\omega\tau) = 0 \quad \text{da cui} \\ \omega\tau = 1$$

Le due rette asintotiche si incontrano in:

$$\omega = \frac{1}{\tau} \quad (3.8.33)$$

NB

Il punto d'incontro $\frac{1}{\tau}$ tra gli asintoti si troverà sulle ottave positive se $\tau < 1$: infatti, in tal caso $\frac{1}{\tau} > 1$ e il logaritmo è positivo. In caso contrario detto punto di incontro si presenterà sulle ottave negative

Per disegnare la curva basta determinare alcuni punti nell'intorno di $\omega = \frac{1}{\tau}$.

Nel punto di incontro dei due asintoti la curva assume il valore :

$$db = 6 \cdot \log_2 \sqrt{\left(\frac{1}{\tau} \cdot \tau\right)^2 + 1} = 6 \cdot \frac{1}{2} \log_2 2 = 3$$

Angolo di fase

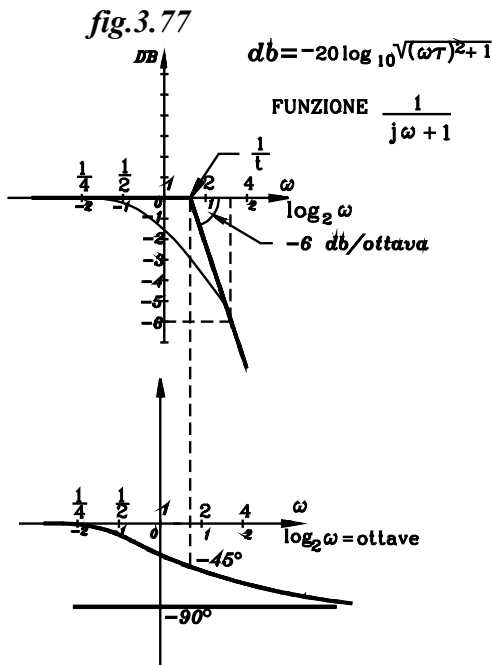
L'angolo di fase della funzione $j\omega\tau + 1$ si ottiene dalla espressione:

$$\beta = \text{arctg}(\omega \cdot \tau)$$

per $\omega \rightarrow 0^+ \beta \rightarrow 0$

per $\omega \rightarrow +\infty \beta \rightarrow +90^\circ$

Rappresentazione della funzione $\frac{1}{j\omega\tau + 1} = (j\omega\tau + 1)^{-1}$



Il modulo della funzione $\frac{1}{j\omega\tau + 1}$ è:

$$\left| \frac{1}{j\omega\tau + 1} \right| = \frac{1}{\sqrt{(\omega\tau)^2 + 1}}$$

Il modulo in dB, espresso secondo il logaritmo in base 2, risulta:

$$db = 10 \cdot \log_{10} \left| \frac{1}{j\omega\tau + 1} \right| = 20 \cdot \log_{10} \frac{2}{\sqrt{(j\omega\tau)^2 + 1}}$$

$$dB = -20 \cdot \log_{10} \sqrt{(\omega\tau)^2 + 1} =$$

$$db = -6 \cdot \log_2 \sqrt{(\omega\tau)^2 + 1} \quad (3.8.34)$$

Si ha così la stessa espressione della (3.8.30) con segno opposto.

Il diagramma si ottiene effettuando sul precedente un ribaltamento di 180° rispetto all'asse delle ascisse.

Per $\omega \rightarrow 0^+$ la retta asintotica risulta ancora l'asse delle ascisse, con equazione:

$$db = 0 \quad (3.8.35)$$

Per $\omega \rightarrow +\infty$, ripetendo lo stesso ragionamento, si ottiene che l'asintoto è la retta non passante per l'origine di equazione:

$$db = -6 \log_2 \omega \tau = 6 \cdot \log_2 \omega + 6 \cdot \log_2 \tau \quad (3.8.36)$$

Che risulta simmetrica della (3.8.32) rispetto all'asse delle ascisse

I due asintoti si incontrano in

$$\omega = \frac{1}{\tau}$$

L'angolo di fase delle funzione $\frac{1}{j\omega\tau + 1}$ è dato dalla differenza tra la fase del numeratore e quella del denominatore. Essendo "1" un numero reale con fase zero, la fase del rapporto è uguale alla fase del denominatore cambiata di segno.

$$\beta = -\arctg(\omega \cdot \tau)$$

$$\text{per } \omega \rightarrow 0^+ \quad \beta \rightarrow 0$$

$$\text{per } \omega \rightarrow +\infty \quad \beta \rightarrow -90^\circ$$

Rappresentazione della funzione $\left| (j\omega\tau)^2 + j\omega \cdot 2\sigma\tau + 1 \right|^{-1}$

L'espressione entro parentesi può essere o al numeratore (*esponente positivo*) o al denominatore (*esponente negativo*). Come per i precedenti espressioni, determinata la rappresentazione del modulo e della fase per un tipo di esponente, per quello opposto i grafici sono simmetrici rispetto all'asse delle ascisse.

Si consideri così il caso che l'espressione si trovi al denominatore:

$$\left| (j\omega\tau)^2 + j\omega \cdot 2\sigma\tau + 1 \right|^{-1} = \frac{1}{(j\omega\tau)^2 + j\omega \cdot 2\sigma\tau + 1} = \frac{1}{1 - (\omega\tau)^2 + j\omega \cdot 2\sigma\tau}$$

Modulo della funzione

$$\left| \frac{1}{(j\omega\tau)^2 + j\omega \cdot 2\sigma\tau + 1} \right| = \frac{1}{\sqrt{[1 - (\omega\tau)^2]^2 + (\omega \cdot 2\sigma\tau)^2}}$$

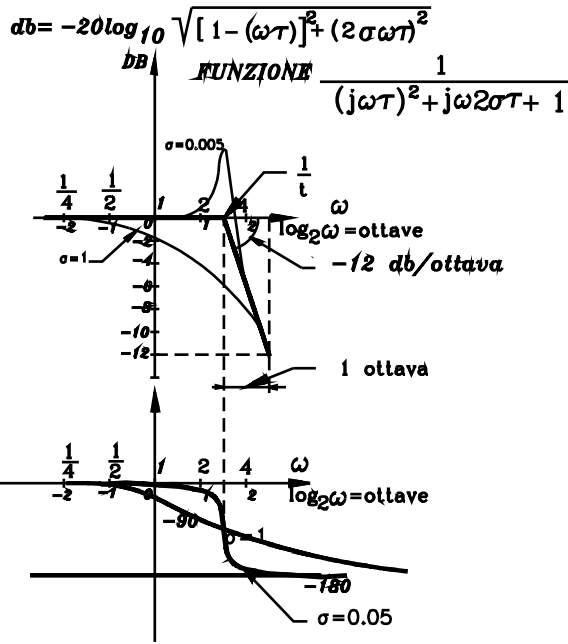
L'espressione in "db" del modulo:

$$db = 20 \cdot \log_{10} \frac{1}{\sqrt{[1 - (\omega\tau)^2]^2 + (\omega \cdot 2\sigma\tau)^2}} = -20 \cdot \log_{10} \sqrt{[1 - (\omega\tau)^2]^2 + (\omega \cdot 2\sigma\tau)^2}$$

trasformando il logaritmo da base 10 a base 2

$$db = -6 \cdot \log_2 \sqrt{[1 - (\omega\tau)^2]^2 + (\omega \cdot 2\sigma\tau)^2} \quad (3.8.37)$$

fig.3.78



L'asintoto per $\omega \rightarrow 0^+$ risulta ancora l'asse delle ascisse:

$$db = -6 \cdot \log_2 \sqrt{1}$$

$$db = 0 \quad (3.8.38)$$

Occorre osservare che sviluppando l'espressione sotto radice, compare il termine:

$$[1 - (\omega\tau)^2]^2$$

che risulta prevalente rispetto agli altri con esponenti più piccoli, i quali si possono

trascurare quando $\omega \rightarrow +\infty$.

Per ω elevati l'espressione (3.8.37) tende all'asintoto:

$$db = -6 \cdot \log_2 \sqrt{(\omega\tau)^4} = -6 \cdot \log_2 (\omega\tau)^2$$

$$db = -12 \cdot \log_2 (\omega\tau) = -12 \cdot \log_2 \omega - 12 \cdot \log_2 \tau \quad (3.8.39)$$

L'asintoto della funzione per $\omega \rightarrow +\infty$ è una retta non passante per l'origine con inclinazione $-12dB / ottava$. L'inclinazione della retta è tale che per ogni unità logaritmica il modulo diminuisce di 12 db.

Il punto d'incontro dei due asintoti si ottiene uguagliando le equazioni delle due rette (3.8.38), (3.8.39):

$$0 = -12 \cdot \log_2 (\omega\tau) \quad \omega\tau = 1$$

Da cui si ottiene ancora:

$$\omega = \frac{1}{\tau} \quad (3.8.40)$$

Nell'intorno del punto di incontro $\omega = \frac{1}{\tau}$ degli asintoti, il grafico della funzione si può scostare notevolmente dalle rette asintotiche (nel caso precedente il massimo scostamento risultava di 3db). L'andamento della funzione dipende dal coefficiente di smorzamento σ .

Per $\omega = \frac{1}{\tau}$ e $\sigma = 1$, sostituendo nella espressione (3.8.37) del modulo si ottiene:

$$db = -6 \cdot \log_2 \sqrt{\left[1 - \left(\frac{1}{\tau} \cdot \tau\right)^2\right]^2 + \left(\frac{1}{\tau} \cdot 2 \cdot \tau\right)^2} = -6 \cdot \log_2 \sqrt{4} = -6$$

$$db = -6$$

Quando σ diminuisce, nel punto $\omega = \frac{1}{\tau}$, il valore del modulo aumenta fino a che per $\sigma \rightarrow 0$ il modulo $\rightarrow +\infty$

Infatti sostituendo $\omega = \frac{1}{\tau}$ e $\sigma \rightarrow 0$ si ottiene:

$$db = -6 \cdot \log_2 \sqrt{\left[1 - \left(\frac{1}{\tau} \cdot \tau\right)^2\right]^2 + \left(\frac{1}{\tau} \cdot 2 \cdot 0 \cdot \tau\right)^2} = -6 \cdot \log_2 \sqrt{4} = 6 \cdot \log_2 \sqrt{0^+} \rightarrow +\infty$$

Nella figura sono riportati l'andamento dei grafici per due valori di σ .

Fase della funzione

$$\beta = -\operatorname{arctg} \frac{2\sigma\omega\tau}{1 - (\omega\tau)^2}$$

per $\omega \rightarrow 0$ risulta $\beta \rightarrow 0$

per $\omega \rightarrow \frac{1}{\tau}$ risulta $\beta = \lim_{\omega \rightarrow \frac{1}{\tau}} -\operatorname{arctg} \frac{2 \cdot \sigma \cdot \tau}{1 - \left(\frac{1}{\tau} \cdot \tau\right)^2} \rightarrow -90^\circ$

per $\omega \rightarrow \infty$ risulta $\beta = -180^\circ$

Per effettuare il grafico del modulo e della fase di una funzione di trasferta nel piano logaritmico, si effettuano, separatamente, i grafici dei singoli fattori posti al numeratore e al denominatore del rapporto che esprime detta funzione di trasferta. Poi, al variare di ω , si sommano algebricamente le ordinate dei singoli grafici: con segno positivo i fattori posti al numeratore e segno negativo quelli al denominatore.

Per un primo studio della stabilità basta rappresentare gli asintoti dei singoli grafici.

3.8.6 CRITERIO DI STABILITÀ NELLA RAPPRESENTAZIONE LOGARITMICA CRITERIO DI BODE

Si considera il caso usuale nel quale il denominatore $D(s)$ della funzione di trasferta a catena aperta $KG(s)$, uguagliato a zero non ammetta soluzioni con parti reali positive.

In tale ipotesi, come si è detto, occorre ricercare il valore dell'angolo di fase quando il modulo della funzione di trasferta risulta uguale all'unità $|KG(j\omega)| = 1$.

- 1- Se in corrispondenza di ω per il quale il modulo $|KG(j\omega)| = 1$, l'angolo di fase risulta algebricamente maggiore di -180° : $\beta > -180^\circ$ (in valore assoluto minore di 180°), allora il sistema risulta stabile.

- 2- In caso contrario, se quando $|KG(j\omega)| = 1$ l'angolo di fase risulta algebricamente minore di -180° : $\beta < -180^\circ$ (in valore assoluto maggiore di 180°), allora il sistema risulta instabile.

Nella rappresentazione logaritmica il modulo viene calcolato in decibel:

$$db = 20 \cdot \log_{10}|KG(j\omega)| = 6 \cdot \log_2|KG(j\omega)|$$

Per cui, quando $|KG(j\omega)| = 1$ il logaritmo ha valore zero

$$dB = 20 \cdot \log_{10} 1 = 6 \log_2 1 = 0$$

Ne viene che quando $|KG(j\omega)| = 1$ il valore in decibel del modulo è zero: $db=0$. Nella rappresentazione logaritmica della funzione di trasferta, si avrà che il valore del modulo in decibel è nullo quando la curva interseca l'asse delle ascisse.

Si conclude, che occorre andare a ricercare il valore di ω per il quale la curva, che rappresenta la funzione di trasferta a catena aperta nel piano doppio logaritmico, incontra l'asse delle ascisse. Allora, se per quel valore di ω , l'angolo di fase risulta maggiore di -180° (minore di 180° in valore assoluto: $|\beta| < 180^\circ$) allora il sistema è stabile, altrimenti è instabile.

Un sistema ha stabilità assoluta, quando la funzione di trasferta $KG(j\omega)$ a catena aperta presenta un angolo di fase maggiore di -180° (minore di 180° in valore assoluto), per il valore di ω con il quale la curva, rappresentante $KG(j\omega)$ nel piano doppio logaritmico, incontra l'asse delle ascisse.

In pratica per verificare la stabilità assoluta di un sistema occorre effettuare il seguente procedimento:

- 1- Si determina la funzione di trasferta a catena aperta $KG(s)$.
- 2- Si verifica che il denominatore di $KG(s)$ uguagliato a zero non ammetta soluzioni con parte reale positiva.
- 3- Si sostituisce $j\omega$ alla variabile s nella funzione di trasferta a catena aperta $KG(s)$ e si determina l'espressione del modulo e dell'angolo di fase della funzione $KG(j\omega)$.
- 4- Si decompongono il numeratore e il denominatore nei binomi caratteristici.
- 5- Si tracciano i diagrammi di Bode dei singoli fattori.
- 6- Si sommano per ogni ω le ordinate dei diagrammi di Bode relativi ai singoli fattori, ottenendo il diagramma di Bode relativo alla funzione di trasferta $KG(j\omega)$.
- 7- Si determina il valore di ω per il quale la curva di Bode incontra l'asse delle ascisse.
- 8- In corrispondenza al valore di ω con il quale la curva incontra l'asse delle ascisse si rileva l'angolo di fase della funzione $KG(j\omega)$.

9- Se detto angolo di fase è maggiore di -180° (minore di 180° in valore assoluto) allora il sistema è stabile, altrimenti è instabile.

3.8.6.1 Margine di stabilità

Si definisce margine di fase o margine di stabilità, la differenza tra l'angolo di fase β della funzione $KG(j\omega)$ per il valore di ω che rende il suo modulo unitario, e -180° .

$$\text{Margine di fase} = \beta - (-180)$$

Così, supponendo che quando $|KG(j\omega)| = 1$ risulti $\beta = -140^\circ$ il margine di fase risulta:

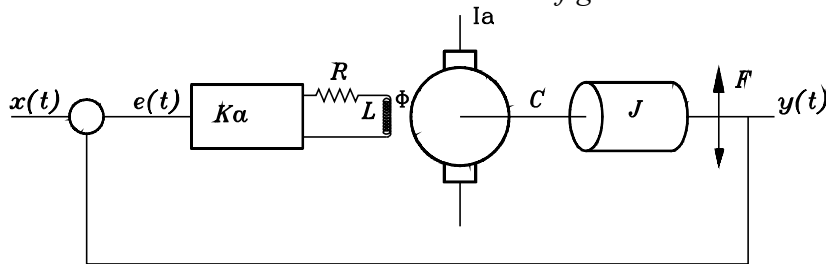
$$\text{Margine di fase} = -140 - (-180) = 180 - 140 = 40^\circ$$

Esempio

Si consideri ancora il controllo sulla eccitazione di un motore in continua alimentato a corrente costante.

La funzione di trasferta è stata già determinata. Essa è data dalla espressione (3.8.20).

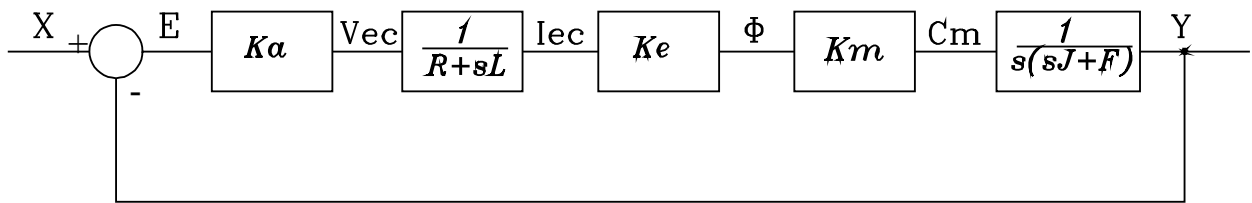
fig.3.65



- $J=0.16 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$
- $F=0.8 \text{ Nms}$
- $Ka=40$
- $Ke=0.004 \text{ wb/A}$
- $Km=160 \text{ Nm/wb}$
- $R=1 \Omega$
- $L=0.1 \text{ H}$

FUNZIONI DI TRASFERTA

fig.3.66



$$|KG(j\omega)| \quad (3.8.41)$$

Dove:

$$\tau_e = \frac{L}{R} \quad (3.8.42)$$

$$\tau_m = \frac{J}{F} \quad (3.8.43)$$

$$K = \frac{Ka \cdot Ke \cdot Km}{R \cdot F} \quad (3.8.44)$$

Sostituendo i valori si ha:

$$\tau_e = \frac{L}{R} = \frac{0.1}{1} = 0.1 \text{ s} \quad \tau_m = \frac{J}{F} = \frac{0.16}{0.8} = 0.2 \text{ s}$$

$$K = \frac{Ka \cdot Ke \cdot Km}{R \cdot F} = \frac{40 \cdot 0.004 \cdot 160}{1 \cdot 0.8} = 32$$

$$KG(s) = \frac{32}{s \cdot (s \cdot 0.1 + 1) \cdot (s \cdot 0.2 + 1)}$$

Si sostituisce $j\omega$ alla variabile s :

$$KG(j\omega) = \frac{32}{j\omega \cdot (j\omega \cdot 0.1 + 1) \cdot (j\omega \cdot 0.2 + 1)}$$

Modulo

$$|KG(j\omega)| = \frac{32}{\omega \cdot \sqrt{(\omega \cdot 0.2)^2 + 1} \cdot \sqrt{(\omega \cdot 0.1)^2 + 1}}$$

Calcolando il modulo in dB ed esprimendo le funzioni di ω in ottave, si ha:

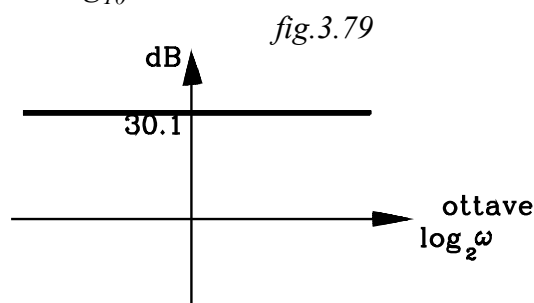
$$dB = 20 \cdot \log_{10} 32 - 6 \cdot \log_2 \omega - 6 \cdot \log_2 \sqrt{(\omega \cdot 0.2)^2 + 1} - 6 \cdot \log_2 \sqrt{(\omega \cdot 0.1)^2 + 1} \quad (3.8.45)$$

Angolo di fase

$$\beta = -90 - \arctg(\omega \cdot 0.2) - \arctg(\omega \cdot 0.1) \quad (3.8.46)$$

Si effettui il diagramma di *Bode* di ciascun termine esprime il modulo, facendolo coincidere, in prima approssimazione, con i tratti asintotici.

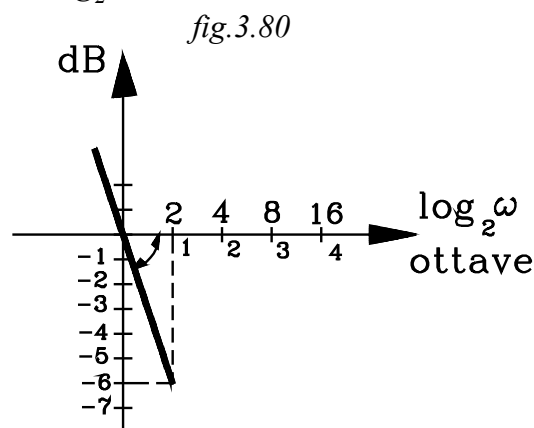
$$20 \cdot \log_{10} 32 = 30.1$$



Il primo termine dell'espressione che fornisce il modulo in dB è una costante al variare di ω :

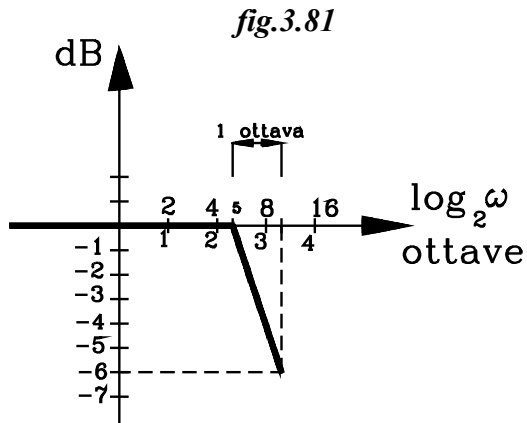
$$20 \cdot \log_{10} 32 = 30.1 = \text{Costante}$$

$$-6 \cdot \log_2 \omega$$



Il secondo termine della espressione che fornisce il modulo in dB al variare di ω è una retta passante per l'origine e inclinata in modo da diminuire di 6 dB/ottava .

$$-6 \cdot \log_2 \sqrt{(\omega \cdot 0.2)^2 + 1}$$



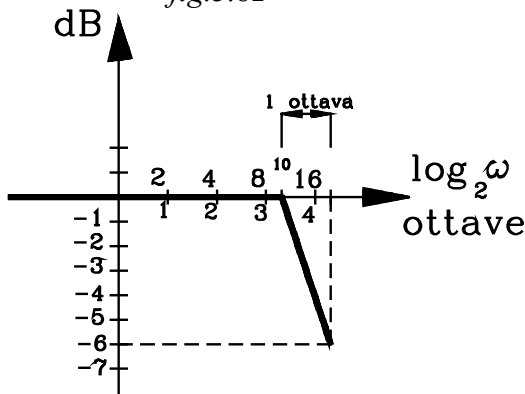
Per una prima rappresentazione sommaria si rappresentano gli asintoti per $\omega \rightarrow 0$ e per $\omega \rightarrow \infty$.

Il primo asintoto per $\omega \rightarrow 0$ è la retta coincidente con l'asse delle ascisse, il secondo $\omega \rightarrow \infty$ è la retta inclinata di -6 dB/ottava.

Il punto d'incontro dei due asintoti si ha per $\omega = \frac{1}{0.2} = 5$

$$-6 \cdot \log_2 \sqrt{(\omega \cdot 0.1)^2 + 1}$$

fig.3.82



Per una prima rappresentazione sommaria si rappresentano gli asintoti per $\omega \rightarrow 0$ e per $\omega \rightarrow \infty$.

Il primo asintoto per $\omega \rightarrow 0$ è la retta coincidente con l'asse delle ascisse, il secondo $\omega \rightarrow \infty$ è la retta inclinata di -6 dB/ottava.

Il punto d'incontro dei due asintoti si ha per $\omega = \frac{1}{0.1} = 10$

Diagramma di Bode del modulo $|KG(j\omega)|$

Occorre effettuare la somma delle ordinate dei diagrammi dei singoli termini della espressione (3.8.45).

Si parta da $\omega = 1$. Considerando solamente gli asintoti, sommando le ordinate dei grafici effettuati, per $\omega = 1$ si ha solamente l'ordinata corrispondente alla costante $20 \cdot \log_{10} 32 \approx 30$.

Per $\omega > 1$, fino ad $\omega = \frac{1}{\tau_m} = \frac{1}{0.2} = 5$ alla costante 30 viene sottratto il termine $-6 \cdot \log_2 \omega$ rappresentato da una retta inclinata di -6 dB/ottava (*inclinata in modo da diminuire di 6db per ogni ottava*). gli altri due termini per $\omega < 5$ sono rappresentati praticamente con asintoti coincidenti con l'asse delle ascisse: e quindi non danno alcun contributo alla somma. Vicino al valore $\omega = 5$ la curva si discosta dagli asintoti: risulta più bassa di 3 dB per $\omega = 5$.

Dopo il valore $\omega = \frac{1}{\tau_m} = \frac{1}{0.2} = 5$ si fa risentire il contributo del terzo termine:

$$-6 \cdot \log_2 \sqrt{(\omega \cdot 0.2)^2 + 1}$$

Considerando solamente gli asintoti, dopo $\omega = \frac{1}{0.2} = 5$, alla retta asintotica del secondo termine della (58), inclinata di -6 dB/ottava, viene sommata l'altra retta asintotica del terzo termine anch'essa inclinata di -6 dB/ottava. Si ottiene una retta inclinata di:

$$-6 \text{ dB/ottava} - 6 \text{ dB/ottava} = -12 \text{ dB/ottava}$$

(In pratica, a partire da $\omega = 5$ si traccia una retta che per ogni ottava scende di 12db)

La retta somma dei primi tre termini coincidenti con gli asintoti, inclinata di $-12\text{dB}/\text{ottava}$, si fa procedere fino ad $\omega = \frac{1}{\tau_e} = \frac{1}{0.1} = 10$ oltre il quale occorre sommare anche l'asintoto del quarto termine:

$$-6 \cdot \log_2 \sqrt{(\omega \cdot 0.1)^2 + 1}$$

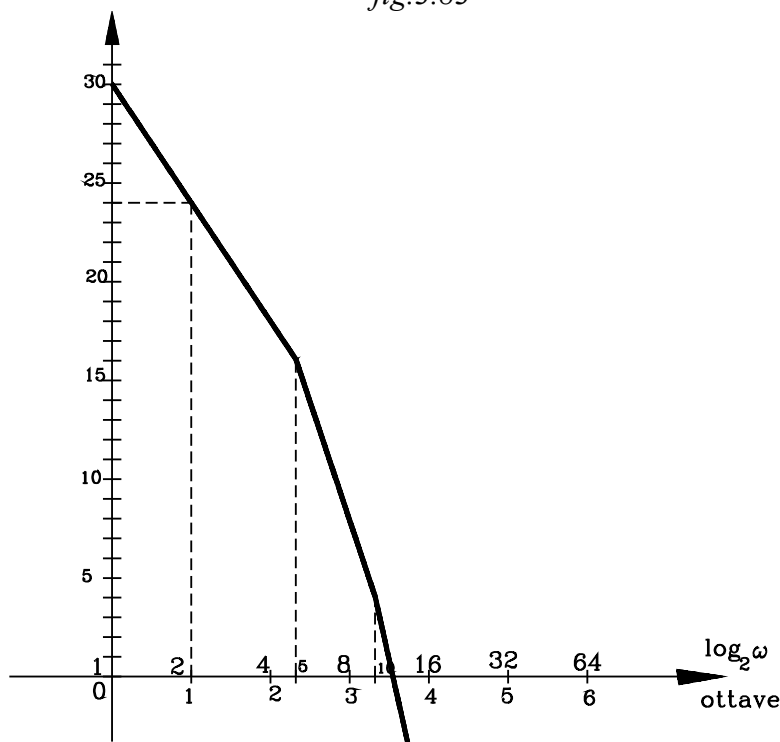
anch'esso inclinato di $-6\text{dB}/\text{ottava}$.

Dopo $\omega = 10$ la retta asintotica risultante dalla somma dei quattro termini è una retta inclinata di:

$$-6\text{db}/\text{ottava} - 6\text{db}/\text{ottava} - 6\text{db}/\text{ottava} = -18\text{dB}/\text{ottava}$$

(A partire da $\omega = 10$ si traccia una retta che per ogni ottava scende di 18db)

fig.3.83



Tracciata la curva di Bode, rappresentata approssimativamente dagli asintoti, relativa al modulo della funzione di trasferta $KG(j\omega)$ si determina il punto di intersezione con l'asse delle ascisse.

Dal diagramma tracciato si nota che le curve asintotiche intersecano l'asse delle ascisse per ω poco superiore a 10 . Occorre però osservare che per $\omega = 10$ la curva effettiva risulta più bassa dei tratti asintotici.

Approssimativamente si può ritenere che l'intersezione della curva con l'asse delle ascisse sia nell'intorno del valore $\omega = 10$.

Infatti sostituendo $\omega = 10$ nella espressione di $|KG(j\omega)|$ si ha :

$$|KG(j\omega)| = \frac{32}{10 \cdot \sqrt{(10 \cdot 0.2)^2 + 1} \cdot \sqrt{(10 \cdot 0.1)^2 + 1}} \cong 1$$

E quindi:

$$\text{db} \cong 0$$

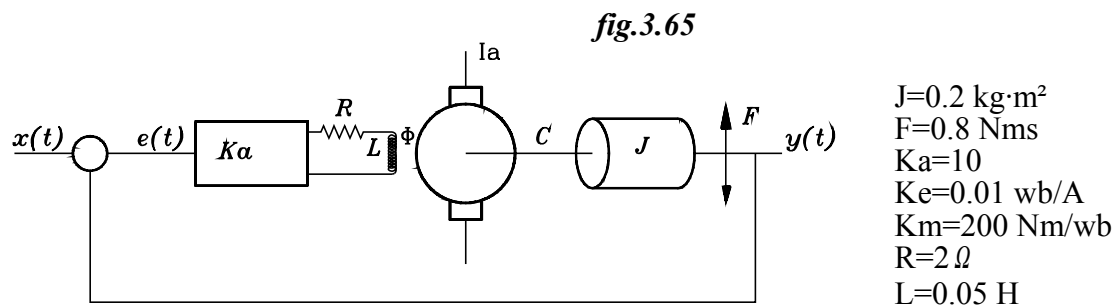
Si verifica ora l'angolo di fase per il valore di $\omega = 10$ per il quale la curva interseca l'asse delle ascisse; per il quale cioè $\text{db}=0$ e quindi il modulo $|KG(j\omega)| = 1$

Sostituendo $\omega = 10$ nella (3.8.46) si ha:

$$\beta = -90 - \arctg 10 \cdot 0.2 - \arctg 10 \cdot 0.1 = -198.4^\circ$$

Risultando $\beta = -198.4^\circ < -180^\circ$ ($198.4 > 180$) il sistema risulta instabile.

Si controllino con *Bode* i due sistemi la cui stabilità è stata verificata con *Nyquist*.



Si è già determinata la funzione di trasferta $KG(j\omega)$

$$KG(s) = \frac{12,5}{j\omega \cdot (j\omega \cdot 0.025 + 1) \cdot (j\omega \cdot 0.25 + 1)}$$

Modulo

$$|KG(j\omega)| = \frac{12,5}{\omega \cdot \sqrt{(\omega \cdot 0.025)^2 + 1} \cdot \sqrt{(\omega \cdot 0.25)^2 + 1}}$$

In decibel:

$$\text{dB} = 20 \cdot \log_{10} 12,5 - 6 \cdot \log_2 \omega - 6 \cdot \log_2 \sqrt{(\omega \cdot 0.25)^2 + 1} - 6 \cdot \log_2 \sqrt{(\omega \cdot 0.025)^2 + 1}$$

Si procede alla stessa maniera dell'esercizio precedente.

Il primo termine è una costante:

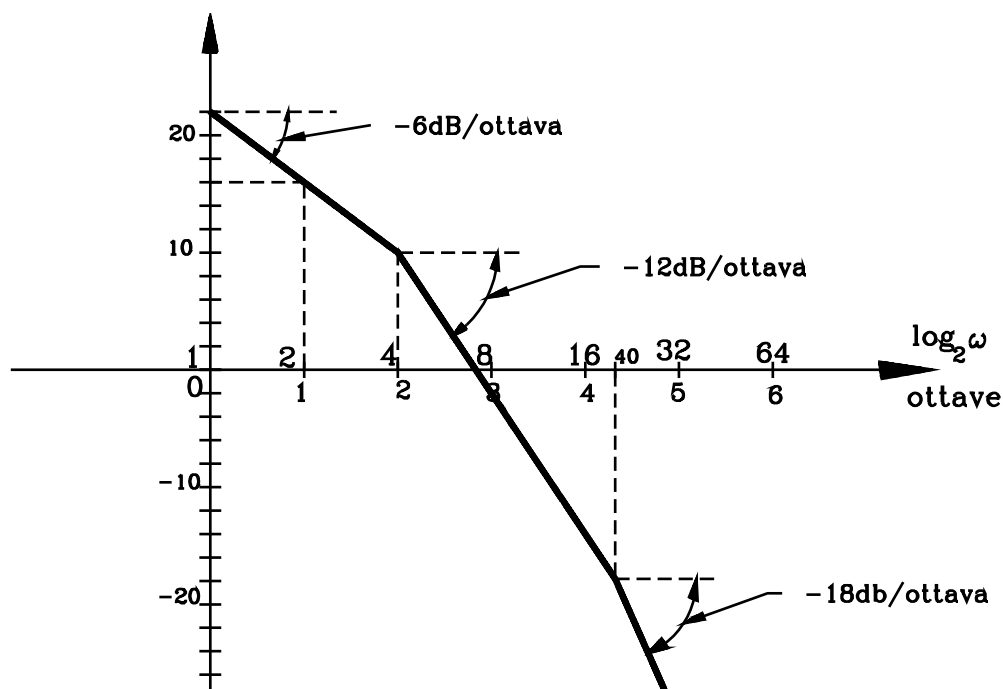
$$20 \cdot \log_{10} 12,5 = 21,83$$

Gli asintoti del termine $-6 \cdot \log_2 \sqrt{(\omega \cdot 0.25)^2 + 1}$ si incontrano in $\omega = \frac{1}{0.25} = 4$

Gli asintoti del termine $-6 \cdot \log_2 \sqrt{(\omega \cdot 0.025)^2 + 1}$ si incontrano in:

$$\omega = \frac{1}{0.025} = 40$$

fig.3.84



Partendo da $\omega = 1$ si hanno tre tratti il primo inclinato di -6dB/ottava fino a $\omega = 4$, un secondo inclinato di $-6\text{dB/ottava} - 6\text{dB/ottava} = -12\text{dB/ottava}$ fino a $\omega = 40$, il terzo tratto è inclinato di -18dB/ottava .

I tratti asintotici della curva di Bode intersecano l'asse delle ascisse nell'intorno di $\omega = 7$, considerando che la curva reale è poco al disotto dell'asintoto si può ritenere che essa interseca l'asse delle ascisse per $\omega = 6.7$.

L'angolo di fase per $\omega = 6.7$ risulta:

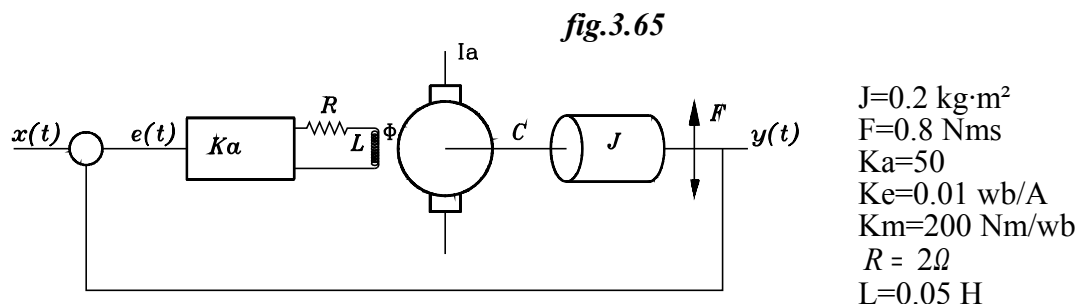
$$\beta = -90 - \arctg(\omega \cdot 0.25) - \arctg(\omega \cdot 0.025)$$

$$\beta = -90 - \arctg 6.7 \cdot 0.25 - \arctg 6.7 \cdot 0.025 = -159^\circ$$

Essendo $\beta = -159^\circ > -180^\circ$ ($159 < 180$) il sistema è stabile.

Il margine di fase è $180^\circ - 159^\circ = 21^\circ$

Si consideri il sistema.



Il sistema ha gli stessi parametri del precedente salvo l'amplificazione $K_a = 50$.

La funzione di trasferta è già stata determinata e risulta:

$$KG(s) = \frac{62,6}{j\omega \cdot (j\omega \cdot 0.025 + 1) \cdot (j\omega \cdot 0.25 + 1)}$$

Modulo

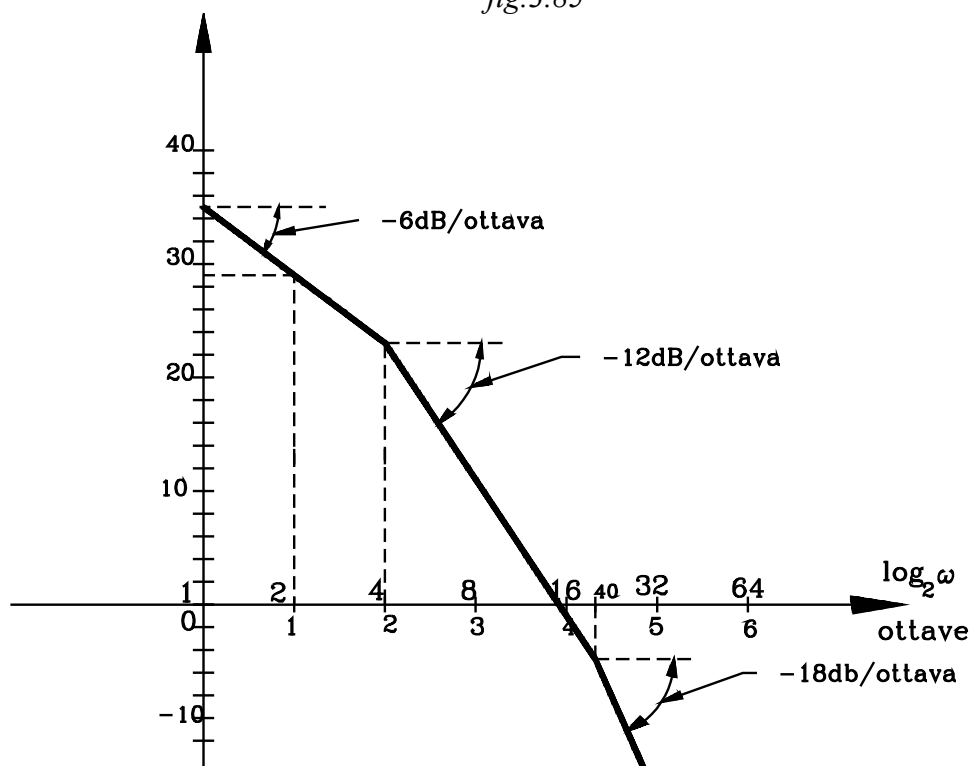
$$|KG(j\omega)| = \frac{62}{\omega \cdot \sqrt{(\omega \cdot 0.025)^2 + 1} \cdot \sqrt{(\omega \cdot 0.25)^2 + 1}}$$

In decibel:

$$dB = 20 \cdot \log_{10} 62.5 - 6 \cdot \log_2 \omega - 6 \cdot \log_2 \sqrt{(\omega \cdot 0.25)^2 + 1} - 6 \cdot \log_2 \sqrt{(\omega \cdot 0.025)^2 + 1}$$

Si procede alla stessa maniera dell'esercizio precedente.

fig.3.85



Il primo termine è una costante:

$$20 \cdot \log_{10} 62.5 = 35.93$$

Il diagramma di Bode relativo al modulo della funzione di trasferimento è identico al precedente solamente che per $\omega = 1$ la costante risulta $20 \cdot \log_{10} 62.5 = 35.93$ invece di 21.93.

I tratti asintotici della curva di Bode intersecano l'asse delle ascisse nell'intorno di $\omega = 15$.
L'angolo di fase risulta $\varphi = -185 < -180$.

Il sistema è instabile

Occorre notare che a parità di tutti gli altri parametri, rispetto al caso precedente, l'aumento della amplificazione, ha determinato la instabilità del sistema.

Il diagramma di Bode, rispetto al caso precedente, ha gli asintoti con le stesse inclinazioni, che si incontrano per gli stessi valori di ω ma è spostato verso l'alto.

3.9 TIPI DI SISTEMI

I sistemi si possono suddividere a seconda dell'errore che si ha a regime nel controllo di, posizione, di velocità, di accelerazione. Si distinguono tre tipi:

-Tipo 0

È un sistema nel quale anche nel controllo di posizione si ha un errore finito.

-Tipo 1

In tale sistema, a regime, è nullo l'errore nel controllo di posizione, mentre è finito in quello di velocità.

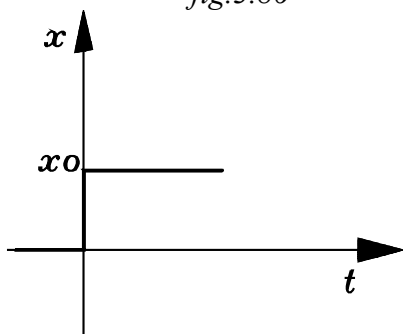
-Tipo 2

In questo sistema l'errore è nullo sia nel controllo di posizione che in quello di velocità, mentre è finito in quello di accelerazione.

Nei capitoli iniziali si sono studiate le risposte a diversi segnali di ingresso campioni.

I segnali di riferimento sono:

fig.3.86

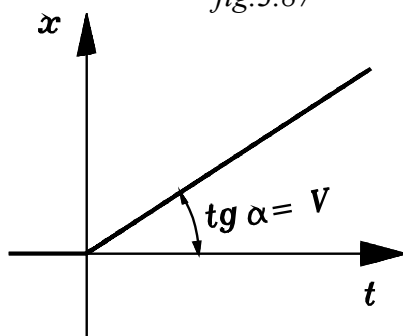


Ingresso a gradino.

Si ha quando si applica un segnale costante da un istante iniziale in poi.

$$x(t) = x_0 \quad (3.9.0)$$

fig.3.87



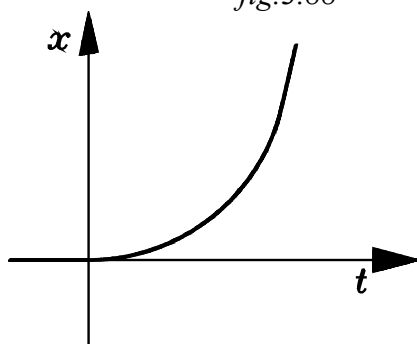
Ingresso a rampa lineare

Si ha quando in ingresso si applica da un certo istante in poi un segnale proporzionale al tempo.

La velocità di applicazione del segnale è costante.

$$x(t) = v \cdot t \quad (3.9.1)$$

fig.3.88



Ingresso a rampa parabolica

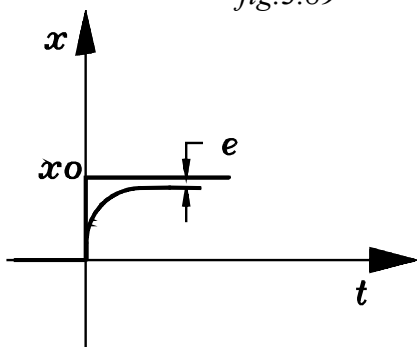
Si ha quando da un certo istante in poi viene applicato un segnale la cui velocità aumenta costantemente nel tempo: *accelerazione costante*.

$$x(t) = \frac{1}{2} a \cdot t^2 + v_0 \cdot t \quad (3.9.2)$$

La risposta del sistema ai suddetti segnali di ingresso è diversa a seconda del tipo di sistema.

Tipo 0

fig.3.89



In un sistema di questo tipo, con un ingresso a gradino, si ha a regime un errore finito diverso da zero.

L'errore è tanto minore quanto maggiore è l'amplificazione della catena di controllo aperta.

$$e = x - r$$

$$r = Hy \text{ dove } y = Ge \text{ e } r = HGe$$

risulta

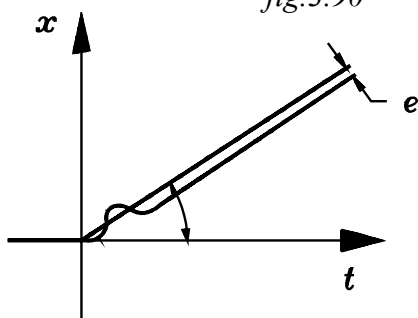
$$e = x - HGe \quad \text{dacui} \quad e + HGe = x$$

$$e \cdot (1 + HG) = x$$

$$e = \frac{x}{1 + HG} \quad (3.9.3)$$

Tipo 1

fig.3.90

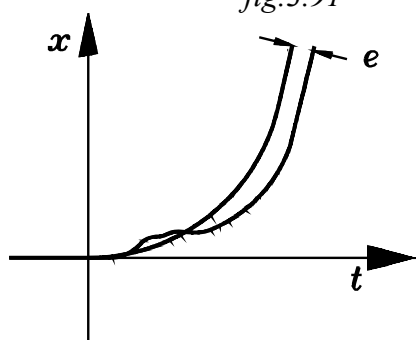


In questo tipo con ingresso a gradino si ha, a regime, errore nullo.

Con ingresso a rampa lineare si ha un errore finito, che diminuisce all'aumentare della amplificazione della catena di controllo aperta.

Tipo 2

fig.3.91



In questo tipo di controllo si ha errore nullo sia, al gradino di posizione che alla rampa lineare.

Si ha un errore finito all'ingresso a rampa parabolica con errore che diminuisce all'aumentare dell'amplificazione della catena di controllo aperta.

3.10 DISTURBI

In una catena chiusa un disturbo che si ha nell'uscita, attraverso il ramo di retroazione viene riportato al blocco differenziale che elabora un nuovo segnale di errore il quale comanderà il motore; per cui, a regime tale disturbo viene eliminato.

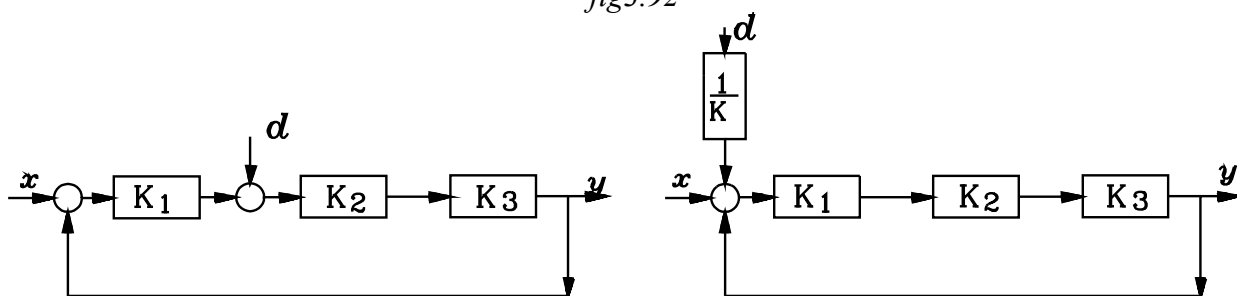
Viceversa, un disturbo che si ha all'ingresso della catena di controllo a catena chiusa non può essere in alcun modo modificato: esso si presenta come un altro ingresso che va in uscita

Consideriamo ora un disturbo in un blocco interno della catena.

Supponiamo che il KG della catena aperta sia formato da più blocchi moltiplicatori:

$$KG = K_1 \cdot K_2 \cdot K_3$$

fig3.92



Il disturbo d avvenga tra K_1 e K_2 .

Tale evenienza è equivalente a porre tra K_1 e K_2 un blocco sommatore che, in quel punto, sommi il disturbo " d ".

Per l'equivalenza dei blocchi si può riportare il disturbo a monte: all'ingresso della catena.

Per l'equivalenza ciò corrisponde a sommare all'ingresso della catena un segnale pari al disturbo " d " diviso il prodotto delle amplificazioni dei blocchi moltiplicatori esistenti tra l'ingresso e il disturbo. Nel caso considerato il disturbo è equivalente ad un segnale di ingresso:

$$x_d = \frac{d}{K_1}$$

Tale segnale dovuto al disturbo non può essere eliminato

Come si può osservare:

- 1- Più il disturbo si presenta verso l'uscita della catena e minore è il suo effetto: lo sarà tanto meno quanto più sono i blocchi moltiplicatori a monte.
- 2- L'effetto del disturbo diminuisce all'aumentare del fattore di amplificazione che è a monte del disturbo.
- 3- In una catena di controllo occorre porre attenzione che non vi siano disturbi all'inizio della catena.

Da quanto detto, in una catena di controllo si dovrebbe avere un fattore di amplificazione G a catena aperta elevato.

Questo per due motivi:

- a) Avere un errore molto piccolo, specialmente nei sistemi tipo 0

$$e = \frac{x}{1 + HG}$$

- b) Diminuire l'effetto dei disturbi che si hanno verso l'uscita che possono essere attenuati secondo il rapporto di amplificazione dei blocchi amplificatori a monte del disturbo.

I disturbi in uscita possono essere dovuti al trasduttore.

I disturbi nella catena possono essere dovuti al cattivo funzionamento dell'elettronica di comando a cinematismi intermedi.

I disturbi, all'ingresso, possono essere dovuti al cattivo funzionamento del potenziometro che da il segnale di riferimento. *Su questi la catena di controllo non ha alcun effetto.*

Per quanto sopra detto, in un progetto di una catena chiusa, occorrerebbe avere un elevato fattore di amplificazione per diminuire l'errore e attenuare i disturbi.

Però aumentando il K della funzione di trasferta $KG(s)$, aumenta il fattore di retroazione e quindi più facilmente si possono presentare instabilità.

Considerando infatti la catena di controllo di posizione proporzionale studiata del II ordine, il parametro σ diminuisce all'aumentare di K .

$$\sigma = \frac{f}{2\sqrt{JK}}$$

Con $\sigma < 0.7$ si hanno delle oscillazioni inaccettabili.

DIVERSI TIPI DI CONTROLLO

In un *controllo proporzionale* l'errore a regime non può essere nullo; infatti il sistema è comandato dall'errore stesso e quando questo è prossimo ad annullarsi, il segnale non ha un livello sufficiente per comandare il raggiungimento dell'obiettivo finale.

Così in un controllo proporzionale di posizione quando l'errore è prossimo a zero non riesce a comandare il raggiungimento della posizione finale: si ha un errore e positivo.

Ricordiamo che l'errore in un controllo di posizione unitario è:

$$\begin{aligned} E(s) &= X(s) - Y(s) & \text{dove} & & Y(s) &= E(s) \cdot KG(s) \\ E(s) &= X(s) - E(s) \cdot KG(s) & & & & \text{da cui:} \end{aligned}$$

$$E(s) = \frac{X(s)}{1 + KG(s)} \quad (3.10.1)$$

Per avere piccoli errori a regime occorre impiegare un alto fattore di amplificazione K .

Come si è osservato, però, all'aumentare di K aumenta l'instabilità del sistema dovuta alle energie accumulate dalle masse inerziali che tendono ad instaurare un regime transitorio oscillante.

Infatti con alti valori di K si ha un brusco ed elevato segnale di retroazione, determinante il nuovo errore che va a pilotare l'uscita e il movimento delle masse inerziali che accumulano energia.

Tale energia può essere restituita determinando un regime transitorio di oscillazioni inaccettabili.

Per frenare le oscillazioni, se le masse sono elevate, occorre aumentare il parametro f . Ciò si può ottenere con sistemi frenanti che però disperdono energia.

Un controllo di posizione proporzionale, semplice nella sua costituzione, non risponde alle esigenze di un buon funzionamento.

Per un buon funzionamento occorre:

- 1- *Avere un minimo errore a regime.*
- 2- *Che sia minimo il tempo di assestamento: risposta rapida.*
- 3- *Ridurre le oscillazioni ad un valore accettabile $1 < \sigma < 0.7$.*

3.11 CONTROLLO PROPORZIONALE INTEGRATO

Come si è detto, a regime, nel controllo proporzionale, l'errore non può essere nullo; in quanto ad esso è proporzionale la coppia che comanda il sistema. Quando l'errore si avvicina allo zero ad esso vi tenderà anche la coppia, che non avrà valori sufficienti per condurre il sistema nella posizione finale.

Affinché, a regime, si possa avere errore nullo, occorre elaborare un altro segnale il quale ricordi l'istruzione impartita all'ingresso e piloti il sistema a raggiungere la posizione finale comandata, *anche dopo che il segnale di errore si è annullato.*

Occorre aggiungere alla coppia motrice, proporzionale al segnale di errore, una coppia L che conduca il sistema nella posizione finale quando sta annullandosi il segnale di errore.

Considerando il controllo sulla tensione di alimentazione di un motore in C.C. la coppia motrice, come si è rilevato, è data da:

$$C_m = K e - f_1 \cdot y' \quad (3.11.1)$$

Si deve aggiungere una coppia L_{in} che renda diversa da zero la coppia motrice anche quando $e=0$.

$$C_m = K \cdot e - f_1 \cdot y' + L_{in} \quad (3.11.2)$$

La coppia L_{in} viene elaborata nel tempo nel quale l'errore "e" risulta diverso da zero.

Dal punto di vista energetico occorre accumulare energia nel tempo nel quale il segnale di errore "e", che comanda il sistema, è diverso da zero, in modo che tale energia possa essere restituita nella fase finale e consentire il pilotaggio nella posizione voluta con errore nullo.

Occorre utilizzare un circuito integratore, ottenuto con amplificatori operazionali, con sistemi digitali o via software.

Supponiamo che, istante iniziale t_1 , la posizione $y_1(t_1)$ sia diversa dalla posizione $x_1(t_1)$ comandata. Viene elaborato un segnale di errore $e_1(t_1)$ che tende a portare l'uscita $y_1(t_1)$ al valore di ingresso $x_1(t_1)$

Il segnale di errore è una funzione del tempo, esso varia e tende a portare il segnale di uscita al valore di quello di ingresso.

In un piccolo intervallo t_1 la $e_1(t_1)$ si può ritenere costante.

Elaboriamo un nuovo segnale ottenuto moltiplicando $e_1(t_1)$ per l'incremento Δt_1 del tempo e dividendo il risultato per un tempo costante T_{in} , detto intervallo di integrazione.

si ottiene:

$$\frac{e_1(t_1) \cdot \Delta t_1}{T_{in}}$$

Tale segnale viene *memorizzato dal sistema integratore*, amplificato secondo un fattore N e sommato al segnale $Ke_I(t)$ che determina la coppia motrice.

L'operazione si ripeta nei successivi istanti di tempo. Nel generico tempo t_i la coppia motrice sarà:

$$C_m(t) = K \cdot e(t_i) + \frac{N}{T_{in}} \sum_{i=1}^n e(t_i) \cdot \Delta t_i - f_I \cdot y'$$

Considerando incrementi dt infinitesimi la sommatoria si sostituisce con l'integrale. In un generico istante t la coppia motrice sarà data da:

$$C_m(t) = K \cdot e(t) + \frac{N}{T_{in}} \int e(t) \cdot dt - f_I \cdot y' \quad (3.11.4)$$

Si pone:

$$K_{in} = \frac{N}{T_{in}} \quad (3.11.5)$$

$$C_m(t) = K \cdot e(t) + K_{in} \int e(t) \cdot dt - f_I \cdot y' \quad (3.11.6)$$

La coppia motrice è equilibrata da quella meccanica dovuta all'inerzia e all'attrito:

$$J \cdot y'' + f_2 \cdot y' = K \cdot e(t) + K_{in} \int e(t) \cdot dt - f_I \cdot y'$$

Ponendo al primo membro tutte le operazioni sulla uscita y e al secondo quelle sul segnale di errore:

$$J \cdot y'' + f_2 \cdot y' + f_I \cdot y' = K \cdot e(t) + K_{in} \int e(t) \cdot dt$$

$$J \cdot y'' + (f_I + f_2) \cdot y' = K \cdot e(t) + K_{in} \int e(t) \cdot dt$$

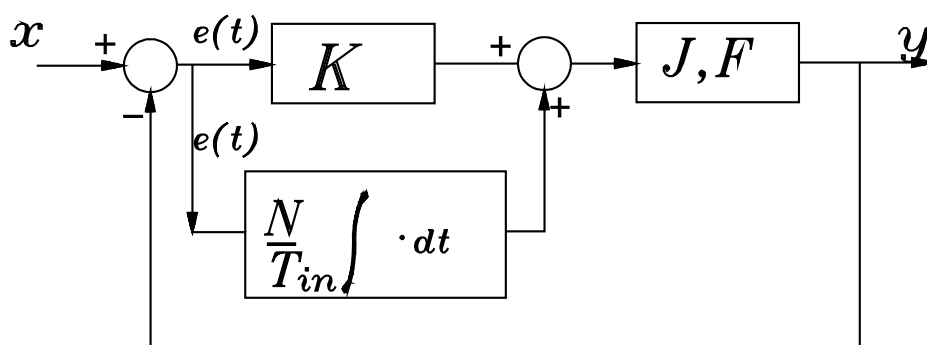
Si pone:

$$f_I + f_2 = F \quad (3.11.7)$$

$$J \cdot y'' + F \cdot y' = K \cdot e(t) + K_{in} \int e(t) \cdot dt \quad (3.11.8)$$

$$J \cdot y'' + F \cdot y' = K \cdot e(t) + \frac{N}{T_{in}} \int e(t) \cdot dt \quad (3.11.9)$$

fig.3.93



Nello schema a blocchi la somma di $K \cdot e(t)$ e del termine integrale è rappresentata da due blocchi moltiplicatori in parallelo, in serie all'uscita dove sono rappresentati i due parametri J, F .
Il parametro $F=f_1+f_2$ è comprensivo del fattore frenante del motore e dell'effetto di attrito.

Con l'introduzione del segnale integrale, memorizzato dal sistema, finché l'errore è diverso da zero aumenta il termine integrale; dall'istante nel quale $e(t)=0$ in poi, rimane il segnale integrale accumulato, il quale pilota il sistema, fino a portarlo nella posizione finale.

Nel sistema di posizione studiato si tratta di aggiungere nella catena di controllo un elemento atto a fornire una segnale proporzionale all'integrale dell'errore $e(t)$ secondo un fattore di proporzionalità :

$$K_{in} = \frac{N}{T_{in}}$$

Il fattore di proporzionalità K_{in} dipende da tempo di integrazione T_{in} : al diminuire di questo aumenta la costante K_{in} di integrazione.

Si vuole ora dimostrare che a regime l'errore risulta nullo.

Esprimiamo tutti i termini dell'equazione differenziale (a) rispetto al segnale di errore $e(t)$:

$$\begin{aligned} e(t) &= x(t) - y(t) && \text{da cui:} \\ y(t) &= x(t) - e(t) \end{aligned}$$

Sostituendo nella (3.11.8):

$$J \cdot [x''(t) - e''(t)] + F \cdot [x'(t) - e'(t)] = K \cdot e(t) + K_{in} \cdot \int e(t) \cdot dt$$

Raccogliendo il segnale di errore al I membro:

$$J \cdot e''(t) + F \cdot e'(t) + K \cdot e(t) + K_{in} \cdot \int e(t) \cdot dt = J \cdot x''(t) + F \cdot x'(t)$$

Supponiamo che il comando $x(t)$ all'ingresso sia uno spostamento con legge del moto uniforme:

In tal caso l'accelerazione è nulla: $x''=a=0$

La velocità angolare è costante: $x'=\omega=\text{costante}$

A regime, quando la slitta ha raggiunto la posizione finale, l'errore non varia più nel tempo: se vi è errore esso rimane costante: $e(t)=\text{costante}$. Quando ciò avviene le derivate prima e seconda dell'errore costante sono nulle. Sostituendo nell'equazione differenziale si ha:

$$K \cdot e(t) + K_{in} \int e(t) \cdot dt = F \cdot \omega$$

Ora a regime, essendo il secondo membro una costante lo dovrà essere anche il primo. Ma ciò avviene solo quando l'errore si annulla, altrimenti, rimanendo un valore dell'errore diverso da zero nel tempo, l'integrale continuerebbe ad aumentare.

Quindi, come si è detto, quando il segnale di errore è nullo, rimane il segnale memorizzato nel blocco integratore che pilota il sistema nella posizione finale comandata.

L'introduzione del segnale integrale modifica lo smorzamento del sistema e ciò dipende dal parametro K_{in} .

$$K_{in} = \frac{N}{T_{in}}$$

Se il tempo di integrazione T_{in} è lungo, allora K_{in} è piccolo e occorre un tempo troppo elevato per raggiungere la posizione di regime con errore nullo.

Se invece il tempo di integrazione T_{in} è breve, K_{in} è elevato, si ha una rapida integrazione una risposta brusca che può portare il sistema in regime di oscillazione.

Un controllo proporzionale integrale innalza di una unità il tipo di sistema: un sistema di tipo 0 al gradino di posizione (con errore a regime) diviene di tipo 1 (errore nullo).

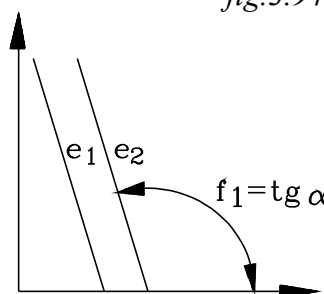
3.12 CONTROLLO PROPORZIONALE DERIVATO PD

Il controllo **PI** (*proporzionale integrato*) può eliminare l'errore a regime, ma, specialmente per piccoli tempi di integrazione T_{in} ed elevata costante N (*brusche risposte*), può generare delle instabilità, con oscillazioni inaccettabili.

Per stabilizzare il sistema occorre introdurre mezzi frenanti; questi però assorbono potenza, abbassando il rendimento.

Come si è visto nel sistema di controllo del motore sulla tensione di alimentazione, con eccitazione (*flusso*) costante (parag 3.7.3) si ottiene una coppia con caratteristica discendente, che diminuisce all'aumentare della velocità angolare.

fig. 3.94



$$C_m = K \cdot e(t) - f_1 \cdot y'(t) \quad (3.12.1)$$

" f_1 " è il fattore frenante dato dalla inclinazione della caratteristica discendente.

C_m equilibra la coppia meccanica dovuta all'inerzia (*momento d'inerzia J*) e all'attrito (*coefficiente di attrito viscoso f_2*):

$$J \cdot y''(t) + f_2 \cdot y'(t) = K \cdot e(t) - f_1 \cdot y'(t)$$

Raccogliendo al primo membro le operazioni sull'uscita $y(t)$ si ha:

$$J \cdot y''(t) + (f_1 + f_2) \cdot y'(t) = K \cdot e(t) \quad (3.12.2)$$

La somma $f_1 + f_2$ rappresenta il fattore frenante del sistema dovuto sia all'attrito che alla caratteristica discendente della coppia.

La somma $f = f_1 + f_2$ determina il coefficiente di smorzamento σ :

$$\sigma = \frac{f_1 + f_2}{2 \cdot \sqrt{JK}}$$

Si vuole aumentare il fattore il fattore frenante , e quindi il coefficiente di smorzamento, senza però assorbimento di energia.

Prendendo in esame l'espressione della coppia motrice (3.12.1) l'effetto frenante è dato dal coefficiente f_1 che moltiplica la derivata prima del segnale di uscita y' .

Si avrà un aumento dell'effetto frenante sul motore se al segnale di comando $K \cdot e(t)$, che determina la coppia motrice, si sottrae un segnale proporzionale alla derivata dell'uscita: $L \cdot y'$.

$$C_m = K \cdot e(t) - f_1 \cdot y'(t) - L \cdot y'$$

$$C_m = K \cdot e(t) - (f_1 + L) \cdot y'(t) \quad (3.12.3)$$

Come si nota il coefficiente L si somma al fattore frenante f_1 .
Uguagliando la coppia motrice con la meccanica:

$$J \cdot y''(t) + f_2 \cdot y'(t) = K \cdot e(t) - (f_1 + L) \cdot y'(t)$$

Nell'equazione differenziale la L si somma a $f_1 + f_2$:

$$J \cdot y''(t) + (f_1 + f_2 + L) \cdot y'(t) = K \cdot e(t) \quad (3.12.4)$$

Il coefficiente di smorzamento è dato da:

$$\sigma = \frac{f_1 + f_2 + L}{2 \cdot \sqrt{JK}}$$

In tal modo il coefficiente di smorzamento risulta maggiore di quello ottenuto nel controllo proporzionale.

Si indichi con F la somma dei coefficienti frenanti " $f_1 + f_2$ " che si ha nel controllo proporzionale :

$$F = f_1 + f_2$$

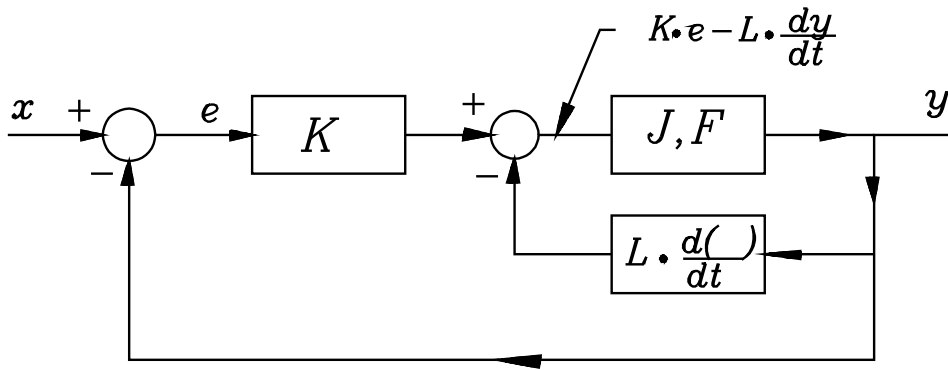
L'equazione differenziale (3.12.4) si può scrivere nella forma:

$$J \cdot y''(t) + (f_1 + f_2) \cdot y'(t) = K \cdot e(t) - Ly'(t) \quad (3.12.5)$$

Nello schema a blocchi si riporta il segnale $Ly'(t)$ proporzionale alla derivata del segnale di uscita in un blocco sottrattore, dopo il blocco K , come riportato in *fig. 3.95*.

Il segnale che determina la coppia motrice è data da " $K \cdot e(t) - Ly'(t)$ " ed è bilanciata dalla coppia meccanica e dall'effetto frenante del motore.

fig.3.95



Si vuole Dimostrare ora che, se al segnale di errore, che determina la coppia motrice, si somma un segnale proporzionale alla derivata dell'errore stesso ,ciò equivale ad aumentare il coefficiente di smorzamento: è come se si fosse aumentato il coefficiente di attrito viscoso, senza però introdurre un elemento dispersivo di potenza.

$$C_m = K \cdot e(t) - f_1 \cdot y'(t) + L \cdot e'(t)$$

Equilibrando la C_m con la coppia meccanica:

$$K \cdot e(t) - f_1 \cdot y'(t) + L \cdot e'(t) = J \cdot y''(t) + f_2 \cdot y'(t)$$

Si può porre nella forma:

$$K \cdot e(t) + L \cdot e'(t) = J \cdot y''(t) + f_2 \cdot y'(t) + f_1 \cdot y'(t)$$

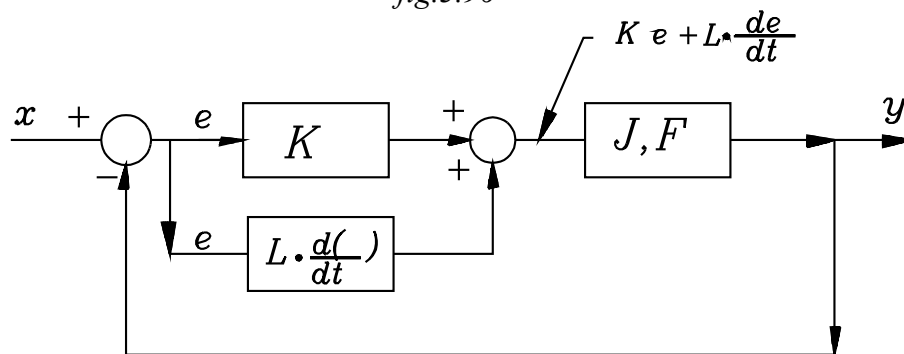
$$K \cdot e(t) + L \cdot e'(t) = J \cdot y''(t) + (f_1 + f_2) \cdot y'(t)$$

Ponendo:

$$f_1 + f_2 = F$$

$$K \cdot e(t) + L \cdot e'(t) = J \cdot y''(t) + F \cdot y'(t)$$

fig.3.96



Si può così considerare il sistema a blocchi equivalente di figura, nel quale, al blocco K , che fornisce in uscita il segnale proporzionale al segnale di errore ($K \cdot e(t)$), viene posto in parallelo un blocco L , che determina il segnale proporzionale alla derivata dell'errore.

Nell'equazione differenziale si sostituisca:

$$y = x - e$$

(è sottinteso che siano funzione di t)

Si ha:

$$K \cdot e + L \cdot e' = J \cdot (x'' - e'') + F \cdot (x' - e')$$

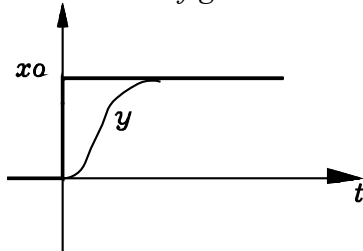
$$J \cdot e'' + (F + L) \cdot e' + K \cdot e = J \cdot x'' + F \cdot x' \quad (3.12.6)$$

Il transitorio si ottiene uguagliando a zero il secondo membro.
Dalla espressione si ricava un fattore di smorzamento:

$$\sigma = \frac{F + L}{2 \cdot \sqrt{JK}} = \frac{f_1 + f_2 + L}{2 \cdot \sqrt{JK}} \quad (3.12.7)$$

In modo intuitivo l'effetto frenante del segnale, proporzionale alla derivata dell'errore, si può capire studiando la risposta reale che un sistema di controllo proporzionale fornisce ad un segnale di ingresso a gradino:

fig.3.97



Nella figura il gradino è un ingresso istantaneo x_0 ; mentre la risposta reale ha un ritardo iniziale, quindi si ha una accelerazione, si raggiunge un massimo di velocità, alla quale segue una decelerazione.

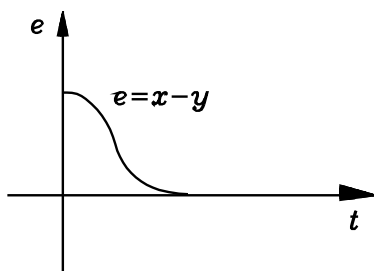
Consideriamo la differenza tra il segnale di riferimento x_0 e il segnale istantaneo di risposta y .

La differenza:

$$x_0 - y = e$$

fornisce il segnale di errore.

Fig. 3.98

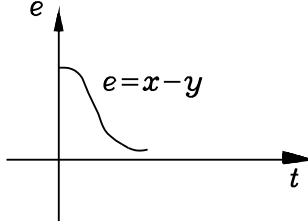


Come si nota il segnale di errore, parte da un valore max, decresce prima lentamente, subito dopo velocemente e tende a zero per valori positivi.

L'errore rimane sempre positivo: non è in grado di frenare l'uscita.

Occorre elaborare un segnale di errore che risulti positivo ed elevato nell'istante iniziale, ma che inverta il segno nell'ultima fase di assestamento.

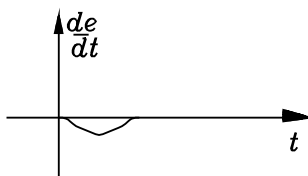
fig.3.99



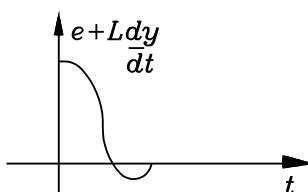
Consideriamo di nuovo il segnale di errore.

Effettuiamo la derivata di tale segnale. Riportiamo al disotto del grafico dell'errore $e(t)$ l'andamento della sua derivata.

Per far ciò basta seguire l'andamento delle tangenti alla curva $e(t)$.



Come si può osservare, inizialmente l'inclinazione della curva $e(t)$ è nulla, quindi sale in valore negativo, inverte l'andamento in corrispondenza del flesso, quindi si porta a zero.



La derivata di $e(t)$ risulta sempre negativa. Sommando algebricamente al segnale di errore un segnale proporzionale alla sua derivata, si può ottenere il segnale desiderato, con valore negativo alla fine dell'assestamento.

3.13 CONTROLLO PID - proporzionale integrato derivato

Con il controllo derivato viene aumentata l'azione frenante, senza introdurre elementi passivi che disperdono energia. Con il controllo derivato si può scongiurare, così, l'instaurarsi di oscillazioni inaccettabili.

Occorre notare che la costante L introdotta deve avere la dimensione di un tempo.

Nell'esempio di controllo considerato nel paragrafo precedente, l'espressione aggiunta alla coppia

$$L \cdot \frac{de}{dt}$$

deve avere la dimensione di una tensione (V): come l'espressione $A \cdot e$ alla quale va a sommarsi; mentre de/dt ha la dimensione di V/T :

$$\left[\frac{de}{dt} \right] = \frac{V}{T} \quad \text{mentre}$$

$$[L] \cdot \left[\frac{de}{dt} \right] = V \quad \text{sostituendo la precedente:}$$

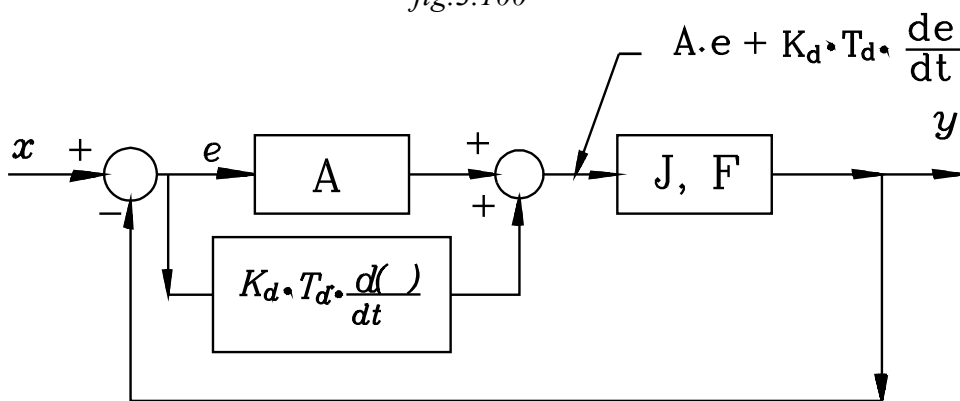
$$[L] \cdot \frac{V}{T} = V \quad \text{da cui}$$

$$[L] = T$$

Si può così porre la costante L nella forma:

$$L = k_d \cdot T_d$$

fig.3.100



Dove T_d viene detta costante di tempo di derivazione e K_d coefficiente di amplificazione del blocco derivatore.

All'uscita del blocco sommatore si ha l'espressione :

$$A \cdot e(t) + K_d T_d \cdot \frac{de(t)}{dt}$$

Dove con A si è indicato il guadagno totale del sistema a catena aperta.

La coppia in uscita sarà equilibrata da quella meccanica:

$$J \cdot y''(t) + F \cdot y'(t) = A \cdot e(t) + K_d T_d \cdot \frac{de(t)}{dt}$$

Il controllo *PD* (*proporzionale derivato*) aumenta la possibilità di avere un errore a regime. Infatti nell'ultima fase, quando il segnale di errore che pilota il sistema risulta piccolo, viene sommata alla coppia motrice un contributo negativo che frena e ostacola il raggiungimento dell'obiettivo finale.

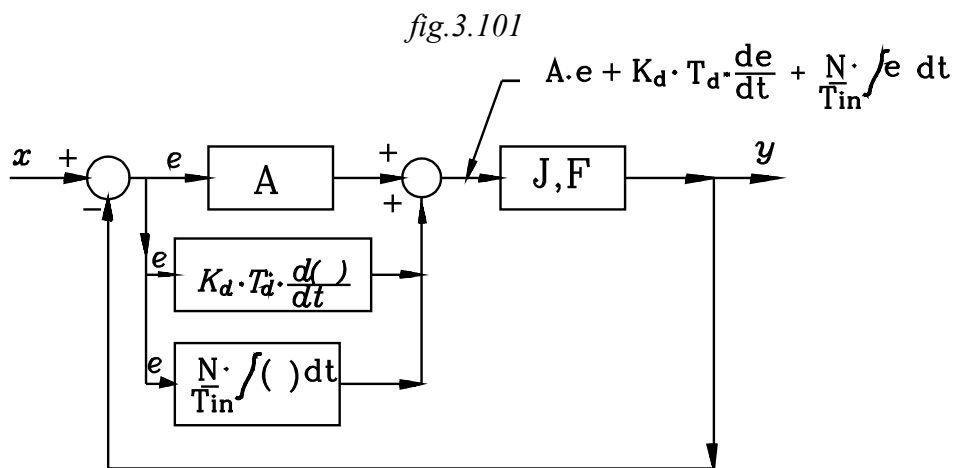
Il controllo PD migliora la stabilità del sistema con un'azione frenante; si oppone all'instaurazione di oscillazioni inaccettabili, ma, non elimina l'errore a regime, il quale, in valore assoluto, è sempre maggiore di quello che si ha nel controllo P (proporzionale, senza derivazione).

Nel controllo *PI* integrale, viceversa, come si è detto, attraverso il blocco integrale, con accumulo di energia, si può ottenere, a regime un errore nullo.

Il contributo integrale memorizza nel tempo gli stati precedenti alla condizione corrispondente ad $e=0$, per cui può pilotare il sistema nella posizione finale anche dopo che l'errore si è annullato.

Da quanto detto è evidente che per ottimizzare le esigenze richieste in un controllo, in pratica, ci troviamo nella necessità di soddisfare esigenze che possono essere anche contrastanti tra loro:

- 1- *Eliminare l'errore a regime.*
- 2- *Eliminare oscillazioni inaccettabili.*
- 3- *Minimizzare il tempo di assestamento.*



Il controllo che può ottimizzare dette esigenze è il controllo misto proporzionale integrale derivato

Nella figura è riportato il sistema a blocchi del *PID*.

Nel blocco sommatore si ottiene il segnale:

$$A \cdot e(t) + K_d T_d \cdot \frac{de(t)}{dt} + \frac{N}{T_{in}} \cdot \int e(t) \cdot dt \quad (3.13.1)$$

L'espressione può essere normalizzata rispetto al guadagno A .

Si ponga:

$$\frac{N}{T_{in}} = \frac{A}{T_{inn}} \quad \text{e} \quad K_d \cdot T_d = A \cdot T_{dn}$$

Dove:

T_{inn} È la costante di tempo integrale normalizzata: $T_{inn} = \frac{A \cdot T_{in}}{N}$

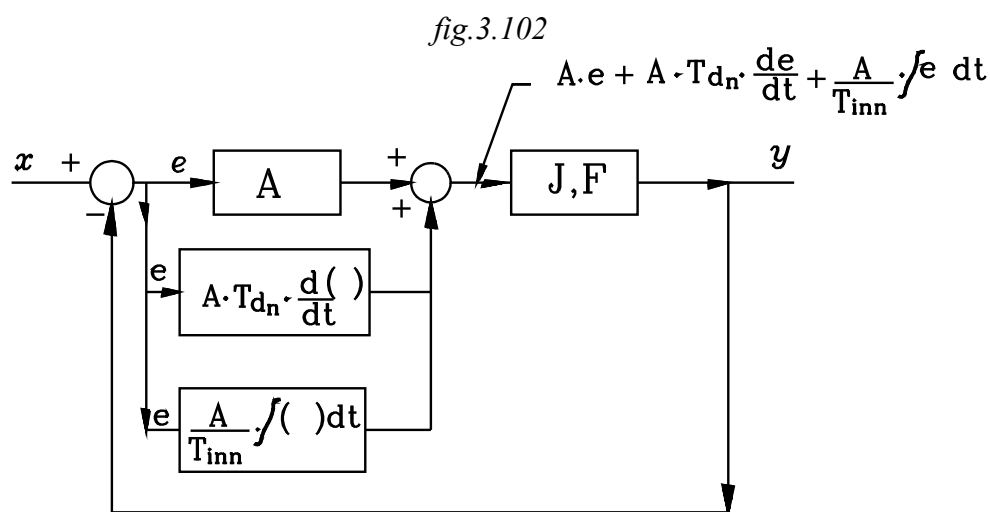
T_{dn} È la costante di tempo derivata normalizzata: $T_{dn} = \frac{K_d \cdot T_d}{A}$

L'espressione della coppia motrice del controllo proporzionale derivato diviene:

$$A \cdot e(t) + A \cdot T_{dn} \cdot \frac{de(t)}{dt} + \frac{A}{T_{inn}} \cdot \int e(t) \cdot dt \quad (3.13.2)$$

La coppia motrice equilibrerà quella resistente:

$$J \cdot y''(t) + F \cdot y'(t) = A \cdot e(t) + A \cdot T_{dn} \cdot \frac{de(t)}{dt} + \frac{A}{T_{inn}} \cdot \int e(t) \cdot dt \quad (3.13.3)$$



Nella espressione è:

$A \cdot e(t)$ Coppia proporzionale all'errore.

$\frac{A}{T_{inn}} \cdot \int e(t) \cdot dt$ Coppia proporzionale all'integrale dell'errore.

$A \cdot T_{dn} \cdot \frac{e(t)}{dt}$ coppia proporzionale alla derivata dell'errore.

I parametri che intervengono nel controllo e che occorre ottimizzare sono:

A : *Fattore di guadagno*

All'aumentare del guadagno del sistema diminuisce l'errore ma aumenta l'instabilità. Guadagni troppo bassi, viceversa possono impedire l'eliminazione dell'errore a regime.

T_{inn} : *Costante di tempo integrale*

La costante di tempo si trova al denominatore.

Valori bassi di T_{inn} danno una risposta rapida, con diminuzione del tempo di assestamento, veloce eliminazione dell'errore, ma possono indurre instabilità (oscillazioni).

Valori alti di T_{inn} determinano un aumento del tempo di integrazione con risposta lenta che può contrastare l'eliminazione dell'errore.

T_{dn} : *costante di tempo di derivazione*

La costante di tempo T_{dn} si trova al numeratore.

Valori alti di T_{dn} aumentano l'azione frenante, con impedimento delle oscillazioni, ma tendono ad aumentare l'errore a regime.

Valori bassi di T_{dn} non determinano un'azione frenante sufficiente ad eliminare oscillazioni inaccettabili.

La risposta del sistema che soddisfi alle richieste di un errore nullo a regime, una risposta pronta, minimo tempo di assestamento, senza l'instaurazione di oscillazioni inaccettabili dipende da un'oculata scelta dei parametri A , T_{inn} , T_{dn} .

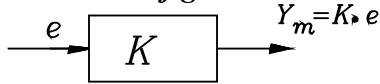
Funzione di trasferta del controllo P - PD - PI -PID

Per spiegare i vari tipi di controlli si è preso come esempio il controllo sulla alimentazione di un motore in corrente continua, in modo da riferirsi ad un modello concreto. È evidente, che i concetti ricavati in questo caso particolare, si possono estendere, in generale, al controllo di un altro qualsiasi attuatore.

Si vuole porre in evidenza la funzione di trasferta riferita al solo controllo, senza l'attuatore (*il motore nel caso considerato*).

3.14.1 Controllo proporzionale

fig.3.104



In questo tipo di controllo il segnale di uscita che è inviato all'attuatore è proporzionale al segnale di errore:

$$y_m = K \cdot e$$

Dalla trasformata di Laplace si ha:

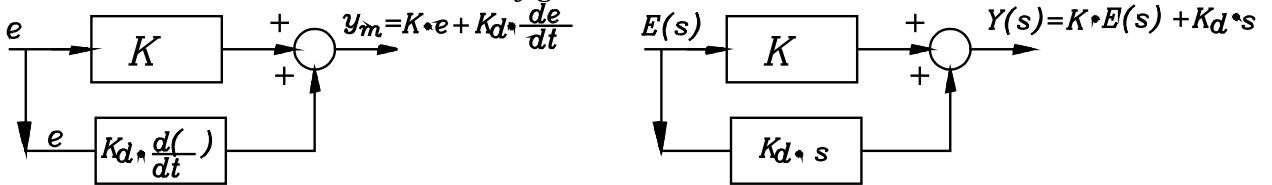
$$Y_m(s) = K \cdot E(s) \quad \text{da cui:}$$

$$KG(s) = \frac{Y_m(s)}{E(s)}$$

$$KG(s) = K \quad 3.14.1$$

3.14.2 Controllo PD: proporzionale derivato

fig.3.105



Il segnale che viene inviato all'attuatore è la somma di quello proporzionale all'errore e quello proporzionale alla derivata prima dell'errore:

$$y_m = K \cdot e + K_d \cdot \frac{de}{dt}$$

Applicando la trasformata di Laplace, e considerando sempre nulli i valori delle funzioni e delle derivate nelle condizioni iniziali si ha:

$$Y_m(s) = K \cdot E(s) + s \cdot K_d \cdot E(s) \quad \text{da cui si ha:}$$

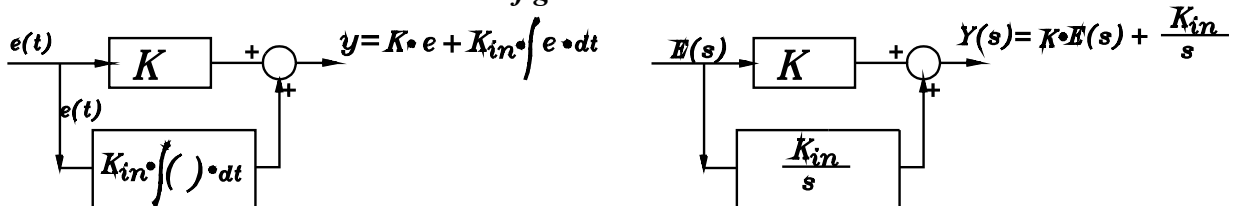
$$KG_{pd}(s) = \frac{Y_m(s)}{E(s)} = K + s \cdot K_d \quad \text{raccolgendo } K:$$

$$KG_{pd}(s) = K \cdot \left(s \cdot \frac{K_d}{K} + 1 \right) \quad \text{ponendo } \frac{K_d}{K} = \tau_d$$

$$KG_{pd}(s) = K \cdot (s \cdot \tau_d + 1) \quad 3.14.2$$

3.14.3 Controllo PI: proporzionale integrale

fig.3.106



Il segnale che viene inviato all'attuatore è la somma di quello proporzionale all'errore e quello proporzionale all'integrale dell'errore:

$$y_m = K \cdot e + K_{in} \cdot \int e \cdot dt$$

Applicando la trasformata di Laplace con le stesse ipotesi de punto precedente:

$$Y_m(s) = K \cdot E(s) + \frac{K_{in} \cdot E(s)}{s} \quad \text{da cui si ha:}$$

$$KG_{pi}(s) = \frac{Y_m(s)}{E(s)} = K + \frac{K_{in}}{s} \quad \text{raccolgendo } K:$$

$$KG_{pi}(s) = K \cdot \left(1 + \frac{K_{in}}{K} \cdot \frac{1}{s}\right) \quad \text{ponendo } \frac{K}{K_i} = \tau_{in}$$

$$KG_{pi}(s) = K \cdot \left(1 + \frac{1}{\tau_{in} \cdot s}\right)$$

$$KG_{pi}(s) = K \cdot \left(1 + \frac{1}{\tau_{in} \cdot s}\right) \quad 3.14.3$$

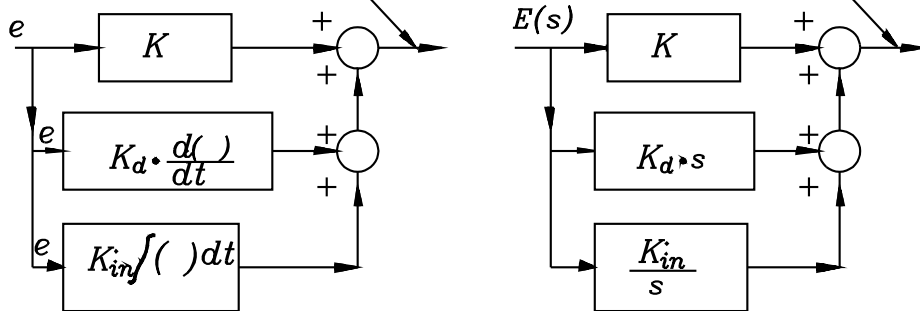
3.14.4 Controllo PID: proporzionale integrale e derivato

All'attuatore viene fatta pervenire la somma di tre segnali: uno proporzionale all'errore, un altro proporzionale alla derivata dell'errore ed il terzo proporzionale all'integrale dell'errore.

fig.3.107

$$y = K \cdot e + K_d \cdot \frac{de}{dt} + K_{in} \cdot \int e \cdot dt$$

$$Y(s) = K \cdot E(s) + K_d \cdot s \cdot E(s) + \frac{K_{in}}{s} \cdot E(s)$$



$$y_m = K \cdot e + K_d \cdot \frac{de}{dt} + K_{in} \cdot \int e \cdot dt$$

Applicando la trasformata di Laplace:

$$Y_m(s) = K \cdot E(s) + K_d \cdot E(s) + \frac{K_{in} \cdot E(s)}{s} \quad \text{da cui si ha:}$$

$$KG_{pid}(s) = \frac{Y_m(s)}{E(s)} = K + K_d \cdot s + \frac{K_{in}}{s} \quad \text{raccolgendo } K:$$

$$KG_i(s) = K \cdot \left(1 + \frac{K_d}{K} \cdot s + \frac{K_{in}}{K} \cdot \frac{1}{s}\right) \quad \text{ponendo: } \frac{K}{K_i} = \tau_{in} \quad \frac{K_d}{K} = \tau_d$$

$$KG_{pid}(s) = K \cdot \left(1 + \tau_d \cdot s + \frac{1}{\tau_{in} \cdot s}\right) \quad (3.14.4)$$

3.15 Influenza delle azioni derivatrice e integrale sulla stabilità del sistema

Si consideri la risposta del controllo **PD - PI** in regime sinusoidale.

3.15.1 Influenza dell'azione PD - Anticipo di fase

Per studiare il sistema in regime sinusoidale si sostituisce $j\omega$ alla variabile s .

Si supponga di introdurre nella catena chiusa un controllo proporzionale derivato **PD**.

Nella funzione di trasferta a catena aperta viene introdotto il blocco moltiplicativo:

$$(s \cdot \tau_d + 1)$$

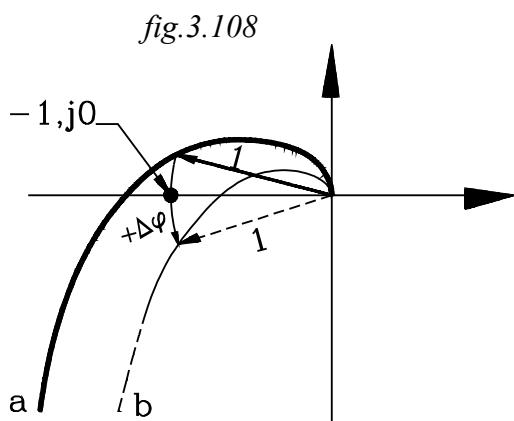
che, in regime sinusoidale, compare nella forma:

$$(j\omega \cdot \tau_d + 1)$$

Tale blocco moltiplicativo, introdotto nella funzione di trasferta $KG(j\omega)$ a catena aperta del controllo a catena chiusa, determina un *anticipo di fase*. Ricordiamo infatti che nella moltiplicazione di numeri complessi si ha, come risultato, la moltiplicazione dei moduli e la somma delle anomalie (*fasi*).

L'anticipo di fase introdotto dal controllo **PD** è:

$$\Delta\varphi = + \operatorname{arctg}(\omega \cdot \tau_d)$$



Per poter rendersi conto dell'influenza che il controllo **PD** ha sulla stabilità del sistema, si supponga che con il semplice controllo proporzionale la funzione di trasferta totale $KG(j\omega)$ a catena aperta del sistema (compreso l'attuatore) presenti un diagramma polare di Nyquist, (curva *a*) che contorni il punto $(-1, j0)$ e quindi risulti instabile.

Si consideri così il vettore unitario. Questo ha una fase minore di -180° (maggiore di 180° in valore assoluto). Con l'introduzione del controllo proporzionale derivato, **PD**, il vettore unitario subisce un anticipo di fase $+\Delta\varphi$ e questo può essere tale da allontanare il diagramma polare dal punto $(-1, j0)$ tanto da non più contornarlo e risultare il sistema stabile: *curva b*.

Il controllo PD è a favore della stabilità del sistema

3.15.1 Influenza dell'azione PI - Ritardo di fase

Si studi ancora il sistema in regime sinusoidale e si supponga di introdurre nella catena chiusa un controllo proporzionale integrato **PI**.

Nella funzione di trasferta a catena aperta viene introdotto il blocco moltiplicativo:

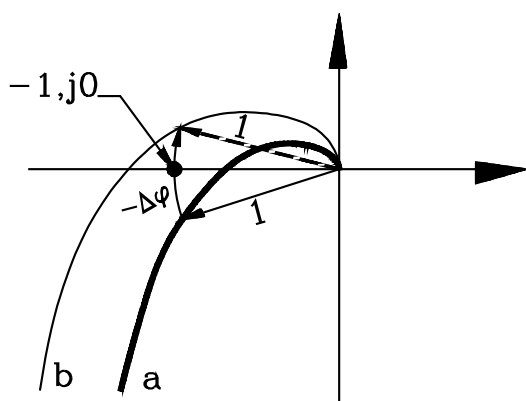
$$\left(1 + \frac{1}{\tau_{in} \cdot s}\right)$$

che, in regime sinusoidale, compare nella forma:

$$\left(1 + \frac{1}{\tau_{in} \cdot j\omega}\right) = \left(1 - j \frac{1}{\tau_{in} \cdot \omega}\right)$$

Tale blocco moltiplicativo, introdotto nella funzione di trasferimento $KG(j\omega)$ a catena aperta del controllo a catena chiusa, determina *il ritardo di fase*:

$$\Delta\varphi = -\arctg\left(\frac{1}{\omega \cdot \tau_{in}}\right)$$



Si supponga ora che con il semplice controllo proporzionale la funzione di trasferimento totale $KG(j\omega)$ a catena aperta del sistema (compreso l'attuatore) presenti un diagramma polare di Nyquist, (curva *a*) che non contorni il punto $(-1, j0)$ e quindi il sistema risulti stabile.

In tal caso il vettore unitario ha una fase maggiore di -180° (minore di 180° in valore assoluto). Con l'introduzione del controllo proporzionale derivato, **PI**, il vettore unitario subisce un ritardo di fase $-\Delta\varphi$ e questo può

essere tale da avvicinare il diagramma polare dal punto $(-1, j0)$ tanto da sorpassarlo e contornarlo, risultando così il sistema instabile: *curva b*.

Il controllo PI è a sfavore della stabilità del sistema.

3.16 Errore a regime nei sistemi P, PD, PI, PID

L'errore di una catena chiusa con funzione di trasferimento a catena aperta $KG(s)$ è dato dalla espressione:

$$E(s) = \frac{1}{1 + KG(s)} \cdot X(s)$$

Ove, per semplicità, si è considerata unitaria la funzione di trasferimento di retroazione $H(s)$.

Per determinare l'errore a regime per $t \rightarrow \infty$, si utilizza il teorema del valore finale:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot F(s)$$

L'errore a regime sarà quindi ottenuto effettuando il limite:

$$e = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot E(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{1 + KG(s)} \cdot X(s)$$

3.16.1 Controllo proporzionale

La funzione di trasferimento a catena aperta è:

$$KG(s) = K$$

Si introduca all'ingresso della catena un segnale a gradino:

$$x(t) = x_0 \quad \text{La trasformata risulta:}$$

$$X(s) = \frac{x_0}{s}$$

L'espressione dell'errore è:

$$E(s) = \frac{1}{1+K} \cdot \frac{x_0}{s}$$

L'errore a regime risulta:

$$e = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot E(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{1+K} \cdot \frac{x_0}{s} \quad e = \frac{x_0}{1+K}$$

Il controllo proporzionale presenta un errore diverso da zero nella risposta ad un segnale a gradino.

Il controllo proporzionale è di *Tipo 0*.

3.16.1 Controllo proporzionale derivato - PD

La funzione di trasferta a catena aperta è:

$$KG_{pd}(s) = K \cdot (s \cdot \tau_d + 1)$$

Si introduca all'ingresso della catena un segnale a gradino:

$$x(t) = x_0 \quad \text{La trasformata risulta:}$$

$$X(s) = \frac{x_0}{s}$$

L'espressione dell'errore è:

$$E(s) = \frac{1}{1+K(s \cdot \tau_d + 1)} \cdot \frac{x_0}{s}$$

L'errore a regime risulta:

$$e = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot E(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{1+K(s \cdot \tau_d + 1)} \cdot \frac{x_0}{s} \quad e = \frac{x_0}{1+K}$$

Il controllo proporzionale derivato **PD** presenta un errore diverso da zero nella risposta ad un segnale a gradino.

Il controllo proporzionale è di *Tipo 0*.

3.16.1 Controllo proporzionale Integrato - PI

La funzione di trasferta a catena aperta è:

$$KG_{pi}(s) = K \cdot \left(1 + \frac{1}{\tau_{in} \cdot s}\right) = K \cdot \frac{\tau_{in} \cdot s + 1}{\tau_{in} \cdot s}$$

Si introduca all'ingresso della catena un segnale a gradino:

$$x(t) = x_0 \quad \text{La trasformata risulta:}$$

$$X(s) = \frac{x_0}{s}$$

L'espressione dell'errore è:

$$E(s) = \frac{1}{1+K \cdot \frac{\tau_{in} \cdot s + 1}{\tau_{in} \cdot s}} \cdot \frac{x_0}{s} = \frac{\tau_{in} \cdot s}{\tau_{in} \cdot s + K(\tau_{in} \cdot s + 1)} \cdot \frac{x_0}{s} = \frac{\tau_{in}}{\tau_{in} \cdot s + K(\tau_{in} \cdot s + 1)} \cdot x_0$$

L'errore a regime risulta:

$$e = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot E(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{\tau_{in}}{\tau_{in} \cdot s + K(\tau_{in} \cdot s + 1)} \cdot x_0 \quad e = 0$$

Il controllo proporzionale integrato presenta un errore nullo nella risposta ad un segnale a gradino.

Il controllo proporzionale è di *Tipo 1*.

Si osservi che, in una catena chiusa di controllo, l'errore a regime, nella risposta ad un segnale a gradino, risulta nullo quando nella funzione di trasferta a catena aperta vi è al denominatore il fattore "s" (presenta un polo nell'origine). Il sistema è di Tipo 1

Così, l'errore a regime, nella risposta ad una rampa lineare di una catena chiusa di controllo, risulta nullo, quando al denominatore della funzione di trasferta a catena aperta compare come fattore " s^2 " (gradino di velocità). Il sistema è di Tipo 2

Se al denominatore della funzione di trasferta a catena aperta compare il fattore " s^3 ", il controllo a catena chiusa presenta errore a regime nullo, nella risposta ad un segnale a rampa parabolica (gradino di accelerazione). Il sistema è di Tipo 3.



Avanti...

[clic qui per proseguire](#)

Indietro...

[clic qui per precedente](#)

Indietro...

[clic qui per la pagina iniziale](#)