*Cilc per tutti gli appunti* (AUTOMAZIONE – TRATTAMENTI TERMICI ACCIAIO – SCIENZA delle COSTRUZIONI…)

**e-mail per suggerimenti**

## SISTEMI DI COMANDO

Qualsiasi meccanismo per poter funzionare ed effettuare dei movimenti necessita di un comando.

Con un comando si vuole che, immesso in un particolare dispositivo di controllo un segnale di ingresso, questo venga elaborato in modo da ottenere un segnale di uscita capace di fare evolvere il sistema comandato verso lo stato finale desiderato.

Il comando si presenta come un insieme di azioni mediante le quali, immessi i segnali di ingresso, "variabili di INPUT", indicanti un ordine o lo stato del processo da controllare, vengono elaborati, secondo regole prestabilite, segnali di uscita "variabili di OUTPUT" che vanno a comandare detto processo, per condurlo nello stato finale desiderato.

Occorre quindi, distinguere in un comando tre passi fondamentali:

1- Immettere il segnale di ingresso. Questo rappresenta l'ordine del comando, il segnale di riferimento da elaborare per condurre il sistema comandato nelle condizioni finali desiderate.
I segnali di ingresso possono altresì dare delle informazioni sullo stato attuale del sistema, necessarie affinché questo, nel confronto con il segnale di riferimento comandato, possa raggiungere l'obiettivo desiderato.

2- Elaborare le informazioni contenute nei segnali di ingresso secondo un programma prestabilito.

3- Ottenere in uscita i segnali di attuazione del comando che realizzino gli obiettivi che si vogliono ottenere.

Il sistema viene rappresentato nel suo complesso da un blocco, *come una scatola chiusa*, nella quale vengono indicati, da una parte i segnali di ingressi *I* e dall'altra quelli di uscita *O*.

*fig3.1*

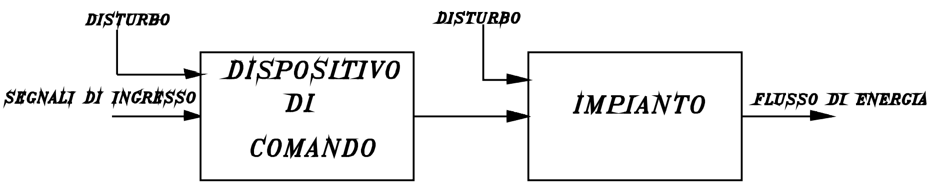

Indichiamo con $x_i$ le variabili di ingresso e con $y_i$ quelle di uscita.
Occorre determinare la funzione :

$$y_i=f(x_i)$$

Si ha uno svolgimento di azioni e di flusso di energia che conduce dagli ingressi *I* alle uscite *O* attraverso successivi componenti che costituiscono la catena di comando.

Il sistema di comando si presenta nella sua accezione più semplice come un sistema a catena aperta

*fig3.2*



Le variabili di ingresso immesse vengono trasformate: viene elaborato il segnale di uscita che influenza il flusso di energia che determina il comando.

Con tale sistema a catena aperta non si è mai sicuri che la grandezza comandata corrisponda a quella voluta .
Infatti un eventuale disturbo nell'impianto influenza direttamente l'uscita, senza possibilità di correzione.

## 3.1 EQUAZIONE DI RISPOSTA NEL TEMPO

Le equazioni rispetto al tempo delle variabili di uscita dipendono sia dalla catena di elementi sia dalla natura delle variabile di ingresso.

Il legame avviene attraverso una equazione differenziale.
Riferiamoci a modelli semplici per capire il comportamento.

### 3.1.1 Equazione differenziale del primo ordine.

Consideriamo un comando meccanico di posizione. Un elemento meccanico deve subire uno spostamento y per effetto di un segnale di ingresso *x(t)* , corrispondente ad una forza *x(t)=f(t)*.

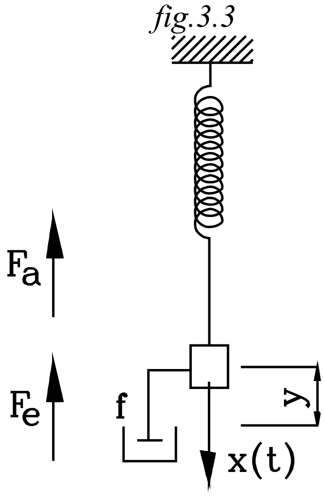
Facciamo per ora l'ipotesi che la massa dell'elemento meccanico sia trascurabile.

Il sistema di comando meccanico viene ipotizzato non perfettamente rigido ma deformabile, con una deformazione di tipo elastico, nel quale la forza di reazione sia proporzionale alla deformazione *y* stessa:

$$\textit{forza elastica } F_e = k \cdot y$$

Nella figura *fig.3.3* il modello è rappresentato da una molla fissata ad una estremità ad un corpo rigido fisso e recante all'altra estremità il corpo di massa trascurabile sul quale agisce la forza *x(t). Il sistema è visto dall'alto: il corpo è appoggiato sul piano del foglio del disegno.*

*fig.3.3*




Il moto avvenga con una velocità *v* data dalla derivata dello spostamento *y* rispetto al tempo:

$$v = \frac{dy}{dt} = y' \quad (3.1)$$

Durante il movimento si ipotizza una resistenza di attrito di tipo viscoso proporzionale alla velocità, dato dal velo d'olio, :

$$\text{Re}\,sistenza\,d'attrito = F_a = f \cdot \frac{dy}{dt} = f \cdot y' \quad (3.1.2)$$

Il sistema è schematizzato con una massa nulla (trascurabile) collegata ad una molla che, nel suo movimento, trova una resistenza di attrito di tipo viscoso *( velo d'olio su di una slitta )*.

Se *x(t)=f(t)* è la forza esterna che determina lo spostamento, trascurando la forza d'inerzia, si ha il seguente equilibrio della forze:

$$F_a + F_e = x(t)$$

$$f \cdot y' + k \cdot y = x(t) \qquad (3.1.3)$$

È una equazione differenziale del primo ordine.

Ora se la forza esterna è nulla: *x(t)=0*, le forze in gioco sono solamente quella elastica e l'attrito. In tal caso, se la molla nelle condizioni iniziali è deformata, allora il sistema si muove per effetto delle forze interne al sistema: si ha, come si dice, la risposta libera del sistema.
Come è intuitivo, al passare del tempo l'attrito smorza il movimento. La risposta del sistema per *x(t)=0* viene detta anche *risposta transitoria*.

La risposta transitoria del sistema si ottiene uguagliando a zero l'equazione differenziale.

Si ottiene l'equazione:

$$f \cdot y' + k \cdot y = 0 \qquad (3.1.4)$$

detta *equazione omogenea associata.*

La risposta transitoria, *detta anche risposta generale*, dipende solamente dalla costituzione fisica del sistema e non dalla variabile di ingresso *x(t)*; per così dire è una risposta involontaria che reca disturbo al comando.

Dalla variabile di ingresso *x(t)* dipende invece la particolare risposta forzata del sistema, che determina, ultimato il transitorio, la risposta y desiderata.

*Occorre però ribadire che l'uscita sarà influenzata da eventuali disturbi che si presentano come particolari ingressi.*

La risposta del sistema ad un segnale di comando x(t) sarà la somma della risposta generale (transitorio) più la risposta particolare, forzata, dovuta alla variabile di ingresso x(t).

#### 3.1.1.1 Soluzione dell'equazione omogenea associata

Si supponga che la molla, nelle condizioni iniziali, sia deformata elasticamente e la sua l'estremità sia spostata di $y_0$ rispetto alla posizione nella quale la tensione è nulla. È evidente che la tensione della molla determina un moto del sistema fino a che l'estremità della molla si porta nella posizione di tensione nulla.
L'equazione differenziale da risolvere è:

$$f \cdot y' + k \cdot y = 0 \qquad (3.1.5)$$

*(Si rimanda al corso di matematica la spiegazione delle soluzioni delle equazioni differenziali. Qui si richiamano brevemente i metodi pratici di soluzione)*

All'equazione omogenea (3.1.5) si associa l'equazione caratteristica, nella quale al posto della derivata prima *y'* si pone la variabile fittizia *z* elevata alla prima potenza e la posto di *y* si pone la variabile *z* elevata alla zero potenza $z^0=1$:

$$f \cdot z + k = 0$$

La cui soluzione è:

$$z = -\frac{k}{f}$$

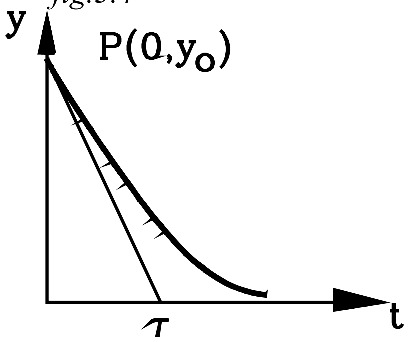
Si dimostra che la soluzione dell'equazione omogenea (3.1.5) è data dalla espressione:

$$\boxed{y = A \cdot e^{-\frac{k}{f}t}} \qquad (3.1.6)$$

Si pone:

$\frac{f}{k} = \tau$ detta costante di tempo. Sarà $\frac{k}{f} = \frac{1}{\tau}$

*fig.3.4*




Per cui la risposta transitoria può essere posta nella forma:

$$y = A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad (3.17)$$

La costante $A$ dipende dalle condizioni al contorno: ossia dalle condizioni iniziali.

Si è supposto che nelle condizioni iniziali la molla sia deformata di $y_0$.

Imponiamo così che:

$$per \quad t = 0 \qquad sia \qquad y = y_o$$

$$y_o = A \cdot e^0 \;\Rightarrow\; A = y_o$$

La risposta libera del sistema alle condizioni iniziali imposte risulta:

$$y = y_o \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad (3.1.8)$$

Si può notare che:

$$per \quad t = 0 \quad risulta \quad y = y_o \cdot e^0 = y_o$$

$$per \quad t \to \infty \quad risulta \quad y = y_o \cdot e^{-\infty} = 0$$

Alla costante τ si è dato il nome di costante di tempo.

Se tracciamo la tangente al punto $P$ di coordinate $(0,y_O)$, detta tangente incontra l'asse delle ascisse $t$ nel punto di ascissa $\tau$.

Dalla equazione trovata sembrerebbe che la molla, inizialmente deformata, torni nella sua posizione finale in un tempo infinito: $per \;\; t \to \infty \quad y \to 0$

In pratica il transitorio si estingue quando trascorre un tempo pari a 4÷5 volte la costante di tempo.

| |
|---|
| L'equazione generale (3.1.5) dà la risposta nel tempo del transitorio. La costante A dipende dalle condizioni iniziali. |

L'equazione (31.8) esprime lo spostamento dell'estremo della molla, inizialmente deformata e che, liberamente, priva di forze esterne impresse, si porta nella condizione finale nella quale la tensione risulta nulla.

### 3.1.1.2 Risposta del sistema ad una forza impressa

Si vuole ora, invece, determinare il movimento dell'estremo della molla quando, ad un certo istante, partendo da determinate condizioni iniziali, si applica a detta estremità una forza $f(t) = x(t)$.

L'equazione differenziale si presenta ora nella forma completa, data dall'equilibrio delle forze

$$f \cdot y' + k \cdot y = x(t) \qquad (3.1.9)$$

La soluzione dell'equazione differenziale (3.1.9), che rappresenta il moto del sistema, di risposta alla forza $f(t) = x(t)$ impressa, *è la somma di due termini:*

*Risposta Transitoria* Rappresenta il moto libero del sistema, dipendente dalle condizioni iniziali.

Si ottiene ponendo x(t)=0 e risolvendo l'equazione omogenea.

Nel caso considerato, di equazione omogenea del primo ordine, la soluzione è del tipo:

$$y = A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

*Risposta forzata* Rappresenta la risposta ad un segnale impresso *x(t) (una forza sulla molla nel caso considerato)* che si ha a regime, quando si è estinto il transitorio.

Esso si ottiene ricercando una soluzione particolare *y(t)*, che soddisfi alla equazione differenziale (3.1.9).

È intuitivo che la soluzione particolare *y(t)* da ricercare sarà della stessa natura del segnale impresso *x(t)*: se *x(t)* è un gradino o una rampa lo sarà anche *y(t).*

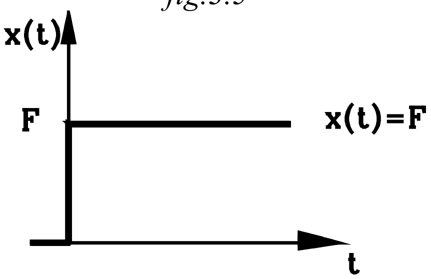
Nello studio del comando dei sistemi risultano interessanti le risposte a segnali tipo, quali i segnali a gradino, a rampa, a rampa parabolica, sinusoidali.

### 3.1.1.3 Risposta ad una funzione a gradino

Supponiamo che da un certo istante in poi venga applicato al sistema un ingresso costante, che rimanga invariato nel tempo *(una forza costante F all'estremità della molla nel caso considerato):*

*x(t)=F*

*fig.3.5*




È intuitivo che il sistema non raggiunge istantaneamente la posizione finale; ciò è dovuto alla reazione della molla e all'attrito che determinano la risposta transitoria.

L'equazione differenziale completa da risolvere risulta:

$$f \cdot y' + k \cdot y = F \qquad (3.1.10)$$

La soluzione del transitorio è già stata determinata nella sua espressione generale, uguagliando a zero la equazione differenziale:

$$f \cdot y' + k \cdot y = 0$$

Essa dà come risposta transitoria:

$$y = A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad (3.1.11)$$

$$con \quad \tau = \frac{f}{k}$$

Occorre porre attenzione che la costante *"A"* venga determinata, imponendo le condizioni iniziali dopo aver sommato alla espressione del transitorio (3.1.11) la soluzione particolare.

Si ricerca ora una soluzione particolare *y(t)* che soddisfi l'equazione differenziale completa (3.1.10).

Ora se l'ingresso è un gradino, del tipo *"x(t)=F=Cost."*, sarà anche la soluzione particolare *y(t),* che rappresenta la risposta a regime, un gradino del tipo:

$$y = h \qquad (3.1.12)$$

Occorre determinare *"h"* in modo che la (3.1.12) soddisfi l'equazione differenziale completa. Si sostituisca la (3.1.12) nella (3.1.10). Si ottiene:

$$f \cdot h' + k \cdot h = F \qquad \text{con} \quad h' = 0 \quad \textit{(derivata di una costante)}$$

per cui:

$$k \cdot h = F \qquad \textit{da cui} \qquad h = \frac{F}{k}$$

Quindi la soluzione particolare, che rappresenta la risposta a regime, quando si è estinto il transitorio, risulta:

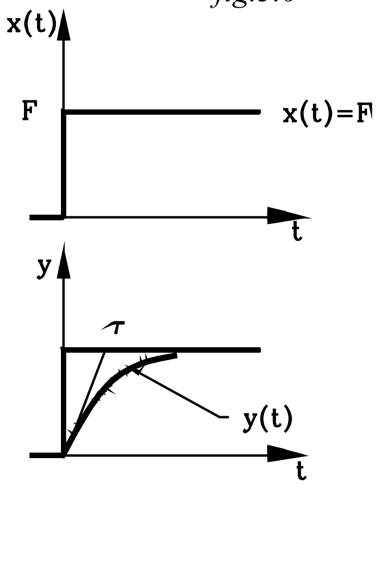
$$y = \frac{F}{k} \qquad (3.13)$$

La risposta totale è la somma del transitorio più la soluzione particolare: la somma cioè delle due espressioni (3.1.11) e (3.1.13).

$$\boxed{y = A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{F}{k}} \qquad (3.1.14)$$

Occorre ora determinare la costante "*A*" imponendo le condizioni iniziali.

*fig.3.6*




Si supponga che nelle condizioni iniziali la molla sia scarica. Il sistema sia a riposo.

*per t=0 y=0*

Sostituendo nella soluzione totale (3.1.14) si ha:

$$0 = A \cdot e^{0} + \frac{F}{k} \qquad \textit{da cui} \qquad A = -\frac{F}{k}$$

La risposta al gradino sarà quindi:

$$y = -\frac{F}{k} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{F}{k}$$

$$y = \frac{F}{k} \cdot \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

Come si può osservare:

$$per \quad t = 0 \qquad y = 0$$

$$per \quad t \to \infty \qquad y = \frac{F}{k}$$

La risposta ad una rampa viene riportata negli esercizi.

## 3.2 RICHIAMI SULLE FUNZIONI SINUSOIDALI

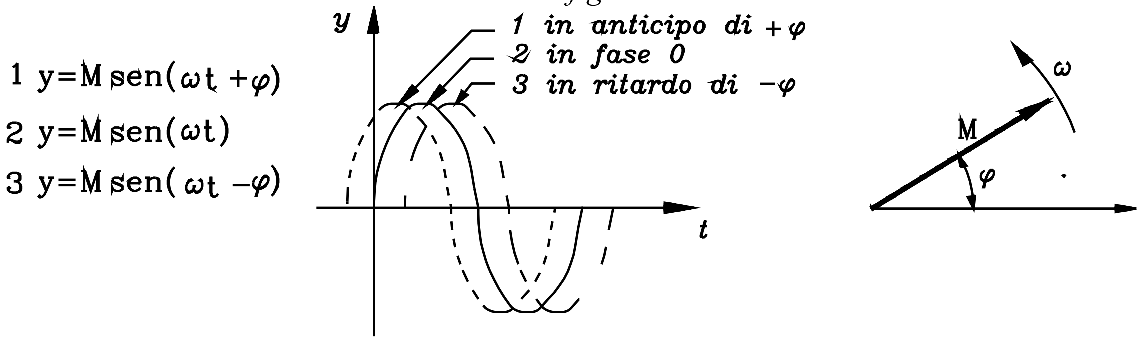
Lo studio delle funzioni sinusoidali è stato affrontato nel programma di elettrotecnica. Qui vengono richiamate alcune proprietà che interesseranno la trattazione dei comandi.

Una funzione sinusoidale è del tipo:

$$y = M \cdot sen(\omega\, t + \varphi) \qquad (3.2.1)$$

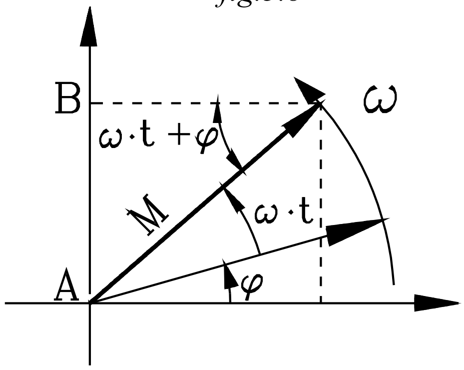
Dove, come noto, $M$ è l'ampiezza di oscillazione *(valore max)*, $\omega$ è la pulsazione, $\varphi$ è l'angolo di fase iniziale.

*fig.3.7*




La funzione sinusoidale viene posta in corrispondenza biunivoca con un vettore rotante, avente modulo $M$ , che ruota con velocità angolare $\omega$, e che nell'istante iniziale *( t=0)* è inclinato di $\varphi$_ rispetto al semiasse orizzontale di riferimento.

*fig.3.8*




Partendo dalla posizione iniziale, nel tempo t il vettore avrà ruotato di $\omega \cdot t$.

Se, durante la rotazione, si proietta il vettore sul semiasse ortogonale a quello di riferimento, la proiezione $AB$ risulta:

$$AB = M \cdot sen(\omega\, t + \varphi) = y \qquad (3.2.2)$$

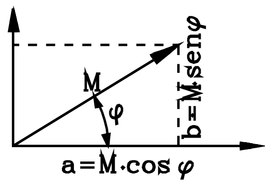
coincidente con la funzione sinusoidale.

Per rappresentare una funzione sinusoidale basta tracciare il vettore ruotante nella posizione iniziale (per t=0).

Nasce così una corrispondenza biunivoca tra vettore e grandezza sinusoidale.

***fig.3.9***

**Alla grandezza sinusoidale $y=M\,sen(\omega t+\varphi)$ corrisponde** $\Longrightarrow$




Ma un vettore può essere posto in corrispondenza biunivoca con un numero complesso; nel quale, la parte reale rappresenta la componente del vettore sul semiasse orizzontale *( dei numeri reali)* la parte immaginaria è la componente del vettore sul semiasse ortogonale *(dei numeri immaginari).*

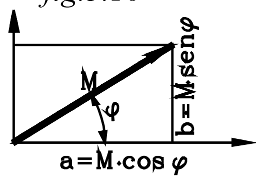
Ne viene che, per la proprietà transitiva, ad una grandezza sinusoidale corrisponde biunivocamente un numero complesso.

Così data la funzione sinusoidale:

$$y = M \cdot sen(\omega t + \varphi)$$

*fig.3.10*

**ad essa corrisponde il vettore** $\Longrightarrow$




e a tale vettore corrisponde il numero complesso $\Rightarrow$ $\dot{Y} = a + jb = M\cos\varphi + jM\,sen\varphi$

(3.2.3)

*Esempio*

*Data la grandezza sinusoidale*

$$y = 50 \cdot sen\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right) \quad \textit{sarà}$$

$$a = 50 \cdot cos60^\circ = 25 \qquad b = 50 \cdot sen60^\circ = 43.3$$

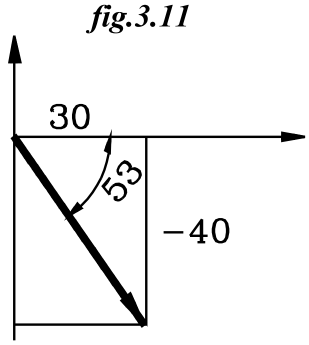
$$\dot{Y} = 25 + j43.3$$

*Viceversa*

*Dato un numero complesso:*

$$\dot{Y} = 30 - j40$$

***fig.3.11***




*Dal vettore si ottiene:*

$$tag\varphi = -\frac{40}{30} \; dacui \; \varphi = -53^\circ$$

$$M = \sqrt{30^2 + 40^2} = 50$$

*La funzione sinusoidale, corrispondente al numero complesso sarà:*

$$y = 50 \cdot sen\left(\omega t - 53 \cdot \frac{\pi}{180}\right)$$

*L'angolo $\varphi$ va posto in radianti*

### 3.2.1 Espressione esponenziale di una grandezza sinusoidale

Ricordiamo dall'analisi che, dato un numero reale x risulta:

$$e^x = \lim_{n \to \infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

dato un numero complesso $z = a + jb$ si pone come definizione:

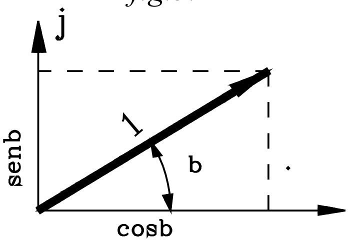
$$e^z = \lim_{n \to \infty}\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$$

Si dimostra che risulta:

$$e^z = e^{a+jb} = \lim_{n \to \infty}\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^a \cdot (\cos b + j\, sen\, b)$$

$$e^{a+jb} = e^a \cdot e^{jb} = e^a \cdot (\cos b + j\, sen\, b)$$ ne viene quindi che:

*fig.3.12*




$$e^{jb} = \cos b + j\, sen\, b \qquad (3.2.4)$$

*(formula di Eulero)*

$e^{jb}$ corrisponde biunivocamente ad un vettore di modulo:

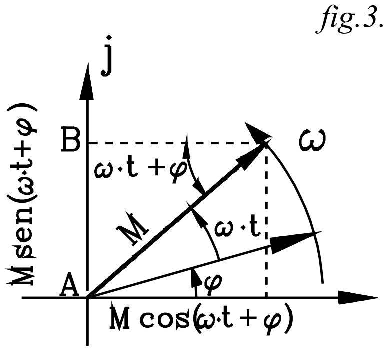
$$\left|e^{jb}\right| = \sqrt{\cos^2 b + sen^2 b} = 1$$

e anomalia $\varphi = b$

Consideriamo ora il vettore che corrisponde biunivocamente alla grandezza sinusoidale:

$$y = M \cdot sen(\omega t + \varphi)$$

*fig.3.13*




come un vettore ruotante nel piano complesso con velocità angolare ω.

Nella posizione iniziale *(per t=0)* il vettore, indicante la grandezza sinusoidale, viene rappresentato inclinato di $\varphi$ rispetto al semiasse dei numeri reali; dopo un tempo t, detto vettore avrà ruotato dell'angolo $\omega t$

Consideriamo così le componenti del vettore sui due assi. Tali componenti determinano il numero complesso:

$$\dot{Y} = M \cdot \cos(\omega t + \varphi) + jM \cdot sen(\omega t + \varphi)$$

$$\dot{Y} = M \cdot [\cos(\omega t + \varphi) + j\, sen(\omega t + \varphi)]$$

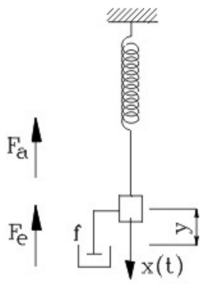
Per la formula di *Eulero* (3.2.4) il vettore ruotante, e quindi la grandezza sinusoidale, può essere rappresentata dalla espressione:

$$\boxed{\dot{Y} = M \cdot e^{j(\omega t + \varphi)}} \qquad (3.2.5)$$

### 3.2.2 Risposta ad una funzione sinusoidale

La rappresentazione simbolica (3.2.5*)* della grandezza sinusoidale torna utile nella determinazione della risposta del sistema ad un ingresso sinusoidale.

Per una migliore comprensione del procedimento ci si riferisce ad un esempio pratico




***Esempio***
***fig3.14***

***Ingresso*** $x(t) = 70 \cdot sen(\omega t)$

***frequenza*** $f_r = 5\ Hz$

***pulsazione*** $\omega = 2 \cdot \pi \cdot f_r = 31.4\ s^{-1}$

***attrito*** $f = 20\ Ns/m$

***molla*** ***k=5000 N/m***

***massa trascurabile***

*Condizioni iniziali: Per t =0 y=0*

*equz. diff.* $20y' + 5000y = 70 \cdot sen(\omega t)$

*Poniamo la sinusoide in forma esponenziale:*

$$x(t) = 70 \cdot e^{j(\omega t)} = 70 \cdot e^{j(31.4t)}$$

*l'equazione diff. si scriverà:*

$$20y' + 5000y = 70 \cdot e^{j(31,4 \cdot t)} \qquad (3.2.6)$$

*il transitorio è dato dalla equazione uguagliata a zero*

$$20y' + 5000y = 0$$

*la soluzione generale sarà:*

$$20 \cdot z + 5000 = 0$$

$$y = A \cdot e^{-250 \cdot t}$$

*risulta* $\tau = \dfrac{f}{k} = \dfrac{1}{250}$

*Soluzione particolare :*

*Essendo l'ingresso sinusoidale, si può prevedere che in uscita, a regime, vi sia una risposta di tipo sinusoidale, con la stessa frequenza, ma fase e ampiezza diverse.*

$y = M \cdot sen(\omega t + \beta)$ *in forma esponenziale:*

$y = M \cdot e^{j(\omega t + \beta)}$

*derivata prima:*

$$y'=jM\cdot 31,4\cdot e^{j(31,4\cdot t+\beta)}$$

*sostituendo nella* (3.2.6) *si ha:*

$$j20\cdot M\cdot 31,4\cdot e^{j(31,4\cdot t+\beta)} + 5000\cdot M\cdot e^{j(31,4\cdot t+\beta)} = 70\cdot e^{j(31,4\cdot t)}$$

$$j20\cdot M\cdot 31,4\cdot e^{j(31,4\cdot t)}\cdot e^{j\beta} + 5000\cdot M\cdot e^{j(31,4\cdot t)}\cdot e^{j\beta} = 70\cdot e^{j(31,4\cdot t)}$$

*semplificando si ha:*

$$j20\cdot M\cdot 31,4\cdot e^{j\beta} + 5000\cdot M\cdot e^{j\beta} = 70$$

$$M\cdot e^{j\beta}\cdot(j628 + 5000) = 70$$

*da cui si ha:*

$$M\cdot e^{j\beta} = \frac{70}{5000 + j628}$$

*Uguagliando i moduli e la fase del primo con il secondo membro si ha:*

*uguaglianza moduli:*

$$M = \frac{70}{\sqrt{5000^2 + 628^2}} = 0.0139\ m$$

*uguagliando le fasi:*

*fase del primo membro =* $\beta$
*fase del secondo membro = fase del numeratore - fase del denominatore*

$$fase\ secondo\ membro = 0 - arctag\frac{628}{5000} = -0.1256\ rad$$

*risulterà quindi:*

$$\beta = -0.1256\ rad$$

*La soluzione particolare che dà la risposta a regime è:*

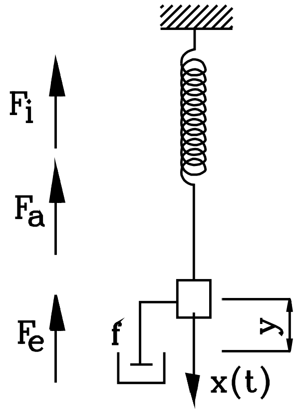
$$y=0,0139\cdot sen(31,4\cdot t - 0,1256)$$

*la soluzione totale, somma del transitorio e della risposta a regime è:*

$$y=A\cdot e^{-250t} + 0,0139\cdot sen(31,4\cdot t - 0,1256)$$

## 3.3 SISTEMI DEL II ORDINE

*fig.3.15*




Nel modello meccanico preso in esame consideriamo ora anche l'influenza della massa. In tal caso occorre tener conto della forza d'inerzia che si oppone alla variazione del moto.

Sia *x(t)* la forza applicata alla massa *m* . Detta forza imprime una accelerazione a, data dalla derivata seconda dello spostamento *y* rispetto al tempo:

$$a = \frac{d^2y}{dt^2} = y''$$

L'accelerazione determina una forza d'inerzia $F_i$:

$$F_i = -m \cdot a$$

Si ipotizza una forza di attrito viscoso proporzionale alla derivata dello spostamento rispetto al tempo:

$$F_a = f \cdot \frac{dy}{dt} = f \cdot y'$$

Dove *f* è il coefficiente di attrito viscoso

Unità di misura di *f*:

$$[f \cdot y'] = N \qquad [f] \cdot \frac{m}{s} = N \qquad \text{da cui:}$$

$$[f] = N \cdot \frac{s}{m}$$

Lo spostamento *y*, corrispondente alla deformazione della molla, provoca una forza elastica $F_e$ che è in senso opposto a detto spostamento:

$$f_e = k \cdot y$$

Dove *k* è il coefficiente elastico.

Unità di misura di *k:*

$$[k \cdot y] = N \qquad [k] \cdot m = N \qquad \text{da cui}$$

$$[k] = \frac{N}{m}$$

Dall'equilibrio delle forze si ottiene:

$$F_i + F_a + F_e - x(t) = 0$$
$$F_i + F_a + F_e = x(t)$$

Sostituendo si ottiene l'equazione differenziale del secondo ordine che regola il moto.

$$m \cdot y'' + f \cdot y' + k \cdot y = x(t) \qquad (3.3.1)$$

Ragionando alla stessa maniera adoperata per i sistemi del primo ordine, risulta evidente che, se la forza esterna *x(t)* di ingresso è nulla, allora il sistema è soggetto a forze dovute alla conformazione del sistema stesso.

Se nelle condizioni iniziali la molla è caricata, nei successivi istanti si ha il moto libero del sistema, che dipenderà: dalla deformazione della molla, dall'attrito viscoso e dall'inerzia dovuta alla massa.

Il moto libero o transitorio del sistema si otterrà sempre uguagliando a zero l'equazione differenziale. E questo corrisponde a fissare l'ingresso $x(t)=0$.

È intuitivo che, in questo caso, essendo presente una massa inerziale, la risposta libera può presentarsi in diversi modi, dipendenti dal valore relativo del coefficiente d'attrito rispetto alla massa e alla tensione della molla.

1- Se l'inerzia è prevalente rispetto all'attrito, allora può instaurarsi un regime di oscillazioni smorzate, prima che il transitorio si estingua.

2- Se è prevalente l'attrito, allora il transitorio si smorza senza oscillazioni.

3- Vi sarà un regime critico nel quale si ha il minimo coefficiente d'attrito rispetto alla massa e alla tensione della molla che permette il transitorio smorzato senza oscillazioni.

4- Facendo poi l'ipotesi teorica di attrito nullo, con deformazione iniziale della molla diversa da zero, si instaura un regime sinusoidale armonico senza smorzamento.

È evidente che tutto ciò dipende dai valori relativi dei parametri " $m$ , $f$, $k$ " che determinano diversi tipi di soluzione dell'equazione differenziale.

Si rimanda al corso di matematica la dimostrazione della soluzione dell'equazione differenziale. Qui di seguito si richiama il metodo pratico per la soluzione.

### 3.3.1 SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE DIFFERENZIALE DI II GRADO

L'equazione differenziale (3.3.1) è del tipo:

$$ay'' + by' + cy = x(t) \quad (3.3.2)$$

Per la soluzione dell'equazione differenziale si procede alla stesa maniera adottata per risolvere l'equazione differenziale del primo ordine.

1- Si determina la soluzione generale del transitorio uguagliando a zero il segnale di ingresso x(t), ottenendo così l'espressione della risposta libera del sistema.

2- Si ricerca la soluzione particolare che soddisfi l'equazione differenziale completa (3.3.2) , dipendente dal particolare segnale di ingresso. *(Tale soluzione sarà dello stesso tipo del segnale di ingresso e rappresenta la risposta a regime.*

3- Si impongono le condizioni iniziali per determinare le costanti di integrazione. Nel caso dell'equazione del secondo ordine, avendo effettuato due integrazioni successive, compaiono due costanti di integrazione *A,B;* occorrerà imporre due condizioni: una sulla posizione iniziale e una sulla velocità iniziale.

**Transitorio**

Per determinare il transitorio si procede nella seguente maniera:

1- Si uguaglia a zero il primo membro:

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad (3.3.3)$$

e si associa ad esso l'equazione caratteristica:

$$a \cdot z^2 + b \cdot z + c = 0$$

2- Si calcola il determinate dell'equazione caratteristica di 2° grado:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

e si esamina il valore ottenuto. Si distinguono 3 casi, a seconda che risulti:

$$\Delta > 0 \quad \Delta = 0 \quad \Delta < 0$$

2.1- Se $\Delta > 0$ l'equazione caratteristica ammette due soluzioni reali distinte e negative $z_1, z_2$. Le soluzioni sono negative essendo i coefficienti dell'equazione tutti positivi: si hanno due permanenze di segno.

Il transitorio è dato dalla espressione:

$$y = (A + B \cdot t) \cdot e^{z \cdot t} \quad (3..3.4)$$

Essendo $z_1, z_2$ reali e negativi la funzione esponenziale tende a zero per $t \to \infty$ : il transitorio è *sovrasmorzato*

2.2- Se $\Delta = 0$ l'equazione caratteristica ammette due soluzioni reali coincidenti e negative *(una sola soluzione)* $z_1 = z_2 = z$

Il transitorio è dato dall'espressione:

$$y = (A + B \cdot t) \cdot e^{z \cdot t} \quad (3.3.5)$$

Essendo z reale negativo la funzione esponenziale tende a zero per $t \to \infty$ : il transitorio è *smorzato critico*, in quanto si è nella condizione limite, con il minimo valore di $\Delta$ , che ammette una risposta smorzata senza oscillazioni.

2.3- Se $\Delta < 0$ l'equazione caratteristica ammette due soluzioni complesse coniugate del tipo:

$$z_{1,2} = \alpha \pm j\omega$$

Con $\alpha$ numero reale negativo. Il transitorio è dato dall'espressione:

$$\boxed{y = M \cdot e^{\alpha \cdot t}\, sen(\omega\, t + \varphi)} \quad (3.3.6)$$

Il transitorio è oscillante, comparendo nella espressione la funzione seno , inoltre risulta smorzato, essendo l'esponente $\alpha$ dell'esponenziale negativo: il transitorio è *oscillatorio smorzato*

Si riprenda in esame l'equazione differenziale (3.3.1)

$$m \cdot y'' + f \cdot y' + k \cdot y = x(t) \quad (3..3.7)$$

Prima di procedere alla soluzione dell'equazione , conviene porla in una forma canonica con l'introduzione di parametri caratteristici

Si dividano ambo i membri della equazione per la massa ***m***

$$y'' + \frac{f}{m} \cdot y' + \frac{k}{m} \cdot y = \frac{1}{m} x(t) \quad (3.3.8)$$

Per il transitorio si uguaglia a zero la *x(t):*

$$y'' + \frac{f}{m}\cdot y' + \frac{k}{m}\cdot y = 0 \quad (3.3.9)$$

Si associa alla equazione differenziale l'equazione caratteristica nella variabile $z$ . Si sostituisce:

Alla derivata seconda $y'' \rightarrow \quad z^2$

Alla derivata prima $y' \rightarrow \quad z$

Si ottiene l'equazione polinomia di 2° grado:

$$z^2 + \frac{f}{m}\cdot z + \frac{k}{m} = 0$$ le cui soluzioni sono:

$$due\ \ soluzioni \begin{cases} z_1 = \dfrac{-\dfrac{f}{m} - \sqrt{\left(\dfrac{f}{m}\right)^2 - 4\cdot\dfrac{k}{m}}}{2} \\ z_1 = \dfrac{-\dfrac{f}{m} + \sqrt{\left(\dfrac{f}{m}\right)^2 - 4\cdot\dfrac{k}{m}}}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} z_1 = -\dfrac{f}{2m} - \sqrt{\left(\dfrac{f}{2m}\right)^2 - \cdot\dfrac{k}{m}} \\ z_1 = -\dfrac{f}{2m} + \sqrt{\left(\dfrac{f}{2m}\right)^2 - \cdot\dfrac{k}{m}} \end{cases}$$

Si introducono i seguenti parametri che interesseranno lo studio dei comandi, i cui valori caratterizzeranno il comportamento del sistema, specialmente nei confronti del tipo di transitorio, dall'esame del quale si può accertare la stabilità o meno del sistema.

$$\frac{f}{2m} = \alpha \quad (3.3.10)$$

$$\frac{k}{m} = \omega^2{}_0 \quad (3.3.11)$$

Si dà nome di fattore di smorzamento $\sigma$ al rapporto:

$$\frac{\alpha}{\omega_0} = \sigma \quad (3.3.12)$$

Dalle (3.3.10), (3.3.12) si ottiene:

$$\frac{f}{m} = 2\alpha \qquad \alpha = \sigma\cdot\omega_0 \qquad \text{per cui} \qquad \frac{f}{m} = 2\sigma\omega_0 \quad (3.3.13)$$

Dalla *(3.23)* si ottiene:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (3.3.14)$$

Sostituendo nella *(3.28)* le espressioni di $\alpha$ , $\omega_0$ Il fattore di smorzamento si esprime rispetto ai parametri del sistema:

$$\sigma = \frac{f}{2\sqrt{k \cdot m}} \quad (3.3.15)$$

Sostituendo nell'equazione *(3.21)* i coefficienti $\frac{f}{m}$ e $\frac{k}{m}$ ,rispettivamente, con le espressioni *(3.25), (3.23)* si ottiene l'equazione differenziale del sistema tipizzata:

$$y'' + 2\sigma\omega_0 \cdot y' + \omega_0^2 = \frac{1}{m} \cdot x(t) \quad (2.3.16)$$

### 3.3.2 Risposta transitoria

Nei sistemi caratterizzati da una equazione del secondo ordine si considererà sempre, nelle trattazioni teoriche, l'equazione differenziale caratteristica posta nella forma tipizzata (3.3.16).

Il transitorio si ottiene ponendo a zero il secondo membro:

$$y'' + 2\sigma\omega_0 \cdot y' + \omega_0^2 = 0 \quad (3.3.17)$$

L'equazione caratteristica associata è:

$$z^2 + 2\sigma\omega_0 \cdot z + \omega_0^2 = 0$$

Si tratta di una equazione di *2°* grado. Come noto l'equazione ammette due soluzioni che dipendono dal valore del discriminante $\Delta$ :

$$\frac{\Delta}{4} = (\sigma\omega_0)^2 - \omega_0^2$$

$$\frac{\Delta}{4} = \omega_0^2 \cdot (\sigma^2 - 1) \quad (3.3.18)$$

**1° caso:** $\Delta > 0$

Si ha quando:

$$\frac{\Delta}{4} = \omega_0^2 \cdot (\sigma^2 - 1) > 0$$

Implica che:

$\sigma^2 - 1 > 0$ Considerando la soluzione positiva, risulta:

$$\sigma > 1$$

In tal caso si ottengono due soluzioni reali e distinte:

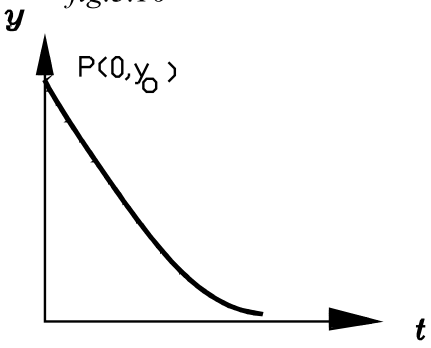
$$\begin{cases} z_1 = -\sigma\omega_0 - \omega_0 \cdot \sqrt{\sigma^2 - 1} \\ z_1 = -\sigma\omega_0 + \omega_0 \cdot \sqrt{\sigma^2 - 1} \end{cases} \quad (3.3.19)$$

Si dimostra che la soluzione dell'equazione differenziale che esprime il transitorio è dato da:

$$\boxed{y = A \cdot e^{z_1 \cdot t} + B \cdot e^{z_2 \cdot t}} \quad (3.3.20)$$

Con *A,B* costanti di integrazione da determinare imponendo le condizioni iniziali.

*fig.3.16*




L'equazione di 2° presenta due permanenze di segno, quindi per il teorema di Cartesio le due soluzioni $z_1, z_2$ sono entrambi negative; indicandole con:

$$\begin{cases} z_1 = -\omega_0\sigma - \omega_0\sqrt{\sigma^2 - 1} = -a \\ \end{cases}$$

L'espressione (3.3.20) si presenta nella forma:

$$y = A \cdot e^{-at} + B \cdot e^{-bt}$$

che rappresenta una equazione esponenziale nella quale per $t \to \infty \quad y \to 0$

Il transitorio si smorza al passare del tempo senza oscillazioni

| |
|---|
| Quando il coefficiente di smorzamento σ risulta maggiore dell'unità: $\sigma = \dfrac{f}{2\sqrt{k \cdot m}} > 1$ il transitorio risulta smorzato |

In tal caso l'attrito prevale sull'inerzia e l'elasticità della molla.

A parità di attrito, con l'aumentare della massa m e del coefficiente $k$ $(m \cdot k)$ si arriva ad una condizione limite per la quale risulta $\sigma=1$ . Si ha così il secondo caso.

**2° caso: $\Delta=0$**

Si ha quando:

$$\frac{\Delta}{4} = \omega_0^2 \cdot \left(\sigma^2 - 1\right) = 0$$

Implica che:

$\sigma^2 - 1 = 0$ Considerando la soluzione positiva, risulta:

$$\sigma = 1$$

Essendo il determinante nullo, le due soluzioni sono reali coincidenti e negative. Sostituendo nelle espressioni (3.3.19) delle soluzioni il valore $\sigma = 1$ , si ottiene:

$$z_1 = z_2 = z = -\omega_0$$

Si dimostra *(si rimanda al corso di matematica)* che nel caso di soluzione con molteplicità 2 l'integrale dell'equazione differenziale risulta:

$$y = (A + B \cdot t) \cdot e^{z \cdot t} \quad (3.33.21)$$

Nel caso in esame, sostituendo il valore dell'unica soluzione **z** si ha:

$$y = (A + B \cdot t) \cdot e^{-\omega_0 \cdot t} \quad (3.3.22)$$

Con *A,B* costanti di integrazione da determinare imponendo le condizioni iniziali.
L'espressione ottenuta è un'equazione esponenziale smorzata.
L'andamento viene detto smorzato critico, in quanto per un ulteriore aumento della massa inerziale o della costante elastica della molla *si instaurano nel sistema delle oscillazioni*.

Quando il coefficiente di smorzamento σ risulta uguale all'unità:

$$\sigma = \frac{f}{2\sqrt{k \cdot m}} = 1$$

il transitorio risulta smorzato critico.

Partendo dalla condizione di smorzamento critico, se si aumenta ulteriormente o la massa *m* o la costante elastica *k*, il coefficiente di smorzamento σ risulta inferiore all'unità: si ha così il terzo caso.

**3° caso: Δ<0**
Si ha quando:

$$\frac{\Delta}{4} = \omega_0^2 \cdot \left(\sigma^2 - 1\right) < 0$$

Implica che:

$\sigma^2 - 1 < 0$ Considerando la soluzione positiva, risulta :

$$\sigma < 1$$

In questo caso, essendo il determinante negativo, le soluzioni dell'equazione caratteristica di 2° grado sono complesse e coniugate.
Le soluzioni sono:

$$\begin{cases} z_1 = -\sigma\omega_0 - \omega_0 \cdot \sqrt{\sigma^2 - 1} \\ z_1 = -\sigma\omega_0 + \omega_0 \cdot \sqrt{\sigma^2 - 1} \end{cases}$$

Entro la radice si ponga in evidenza -1

$$\begin{cases} z_1 = -\sigma\omega_0 - \omega_0\sqrt{-1\cdot\left(1-\sigma^2\right)} \\ z_2 = -\sigma\omega_0 + \omega_0\sqrt{-1\cdot\left(1-\sigma^2\right)} \end{cases} \qquad \begin{cases} z_1 = -\sigma\omega_0 - \sqrt{-1}\cdot\omega_0\sqrt{\left(1-\sigma^2\right)} \\ z_2 = -\sigma\omega_0 + \sqrt{-1}\cdot\omega_0\sqrt{\left(1-\sigma^2\right)} \end{cases}$$

Si osservi che se $\sigma^2 - 1 < 0$ risulta $1 - \sigma^2 > 0$
Inoltre $\sqrt{-1} = j$ immaginario
Le soluzioni si scriveranno nella forma:

$$\begin{cases} z_1 = -\sigma\omega_0 - j\cdot\omega_0\sqrt{\left(1-\sigma^2\right)} \\ z_2 = -\sigma\omega_0 + j\cdot\omega_0\sqrt{\left(1-\sigma^2\right)} \end{cases}$$

Si pone

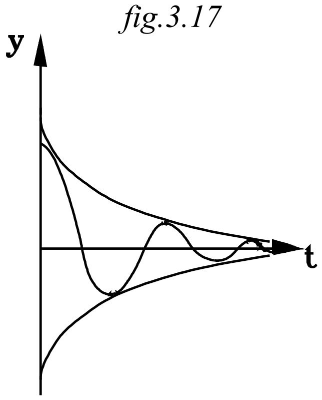
$$\sigma\,\omega_0 = \alpha \qquad \textit{parte reale}$$

$$\omega_0\sqrt{\left(1-\sigma^2\right)} = \omega \qquad \textit{coefficiente dell'immaginario}$$

Le soluzioni si presentano nella forma:

$$\begin{cases} z_1 = -\alpha - j\omega \\ z_2 = -\alpha + j\omega \end{cases}$$

*fig.3.17*




Si dimostra che, conosciuta la parte reale $-\alpha$ e il coefficiente dell'immaginario $\omega$, la soluzione generale del transitorio quando $\Delta<0$ è data dalla espressione:

$$y = M \cdot e^{-\alpha t} sen(\omega t + \varphi) \qquad (3.3.23)$$

L'esponente dell'esponenziale è negativo quindi il segnale è del tipo oscillatorio smorzato.

L'ampiezza di oscillazione $M$ e la fase $\varphi$ sono costanti di integrazione che si determinano imponendo le condizioni iniziali.

| |
|---|
| Quando il coefficiente di smorzamento $\sigma$ risulta inferiore dell'unità: $\sigma = \dfrac{f}{2\sqrt{k \cdot m}} < 1$ il transitorio risulta oscillatorio smorzato |

### 3.3.3 Soluzione particolare e risposta totale

Se al sistema è applicato un segnale di ingresso *x(t) (una forza sulla molla, nel caso considerato)*, occorre, dopo aver determinato il transitorio, ricercare la soluzione particolare che soddisfi l'equazione differenziale completa. Questa soluzione rappresenta la risposta forzata del sistema al particolare segnale di ingresso introdotto: è la risposta a regime per $t \to \infty$ se il transitorio è smorzato.

Occorre procedere alla stessa maniera operata nel caso di sistema del primo ordine:

a- Conoscendo la funzione impressa *x(t)*, si ricerca la soluzione particolare *y(t)* dello stesso tipo di quella di ingresso che soddisfi l'equazione differenziale completa:

$$a \cdot y'' + b \cdot y' + c \cdot y = x(t)$$

b- Si somma la soluzione particolare a quella del transitorio:

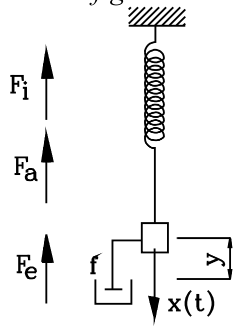
$$y = y_{transitorio} + y_{soluz.\ particolare}$$

c- Nella espressione del transitorio compaiono le costanti di integrazione *(due nei sistemi del II ordine)*. Si impongono le condizioni iniziali per determinare dette costanti.
In questo caso occorre imporre due condizioni: una sulla posizione iniziale *y(t)* occupata dal sistema nell'istante iniziale, l'altra sulla velocità *(derivata prima $y'$ )* assunta nello stesso istante.

Conviene riferirsi ad un esempio per comprendere il metodo

*Esempio*

*fig3.15*

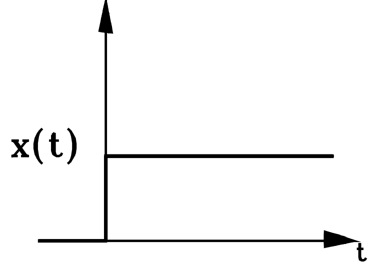



*Massa* $m=0.5\ kg$
*Attrito* $f=5\ Ns/m$
*Costante molla* $k=12\ N/m$
*Funzione di ingresso* $x(t)=3\ N$

*A partire dall'istante t=0 sulla molla viene applicata la forza* $x(t) = 3\ N$. *Si tratta di una funzione a gradino.*

*Dall'equilibrio delle forze si ricava l'equazione differenziale:*

*fig.3.18*




$$0.5 \cdot y' + 5 \cdot y'' + 12 \cdot y = 3$$

*Dividendo per 0.5 si normalizza l'equazione*

$$y'' + 10 \cdot y' + 24 y = 6 \qquad (3.3.24)$$

*Transitorio:*

*Si uguaglia a zero il primo membro dell'equazione differenziale:*

$$y' + 10 \cdot y'' + 24 \cdot y = 0$$

*Equazione caratteristica associata:*

$$z^2 + 10 \cdot z + 24 = 0$$

*Determinante:*

$$\Delta = 100 - 96 = 4 > 0$$ *si hanno due soluzioni reali e distinte*

$$\textit{soluzioni} \quad z = \frac{-10 \pm 2}{2} = \begin{cases} z_1 = -6 \\ z_2 = -4 \end{cases}$$

*Espressione del transitorio (1° caso):*

$$y = A \cdot e^{-6 \cdot t} + B \cdot e^{-4 \cdot t}$$

*Soluzione particolare:*

*Il segnale impresso x(t) è un gradino del tipo: x(t)=costante. È evidente che la risposta forzata, a regime, estinto il transitorio, sarà dello stesso tipo della x(t).*

*Si provi con una soluzione particolare del tipo:*

$$y = h \qquad (3.3.25)$$

*con h=Costante.*

*Si sostituisce la (2) nella (1) e si ottiene:*

$$0 + 0 + 24 \cdot h = 6$$ *da cui:*

$$h = \frac{6}{24} = 0.25$$

*La soluzione particolare è quindi:*

$$y = 0.25$$

*Risposta totale*

*È la somma del transitorio e della soluzione particolare:*

$$y = A \cdot e^{-6t} + B \cdot e^{-4t} + 0.25 \qquad (3.3.26)$$

*Occorre ora imporre le condizioni iniziali sulla y e sulla derivata prima* $y'$ *per determinare le costanti A,B di integrazione*

*La derivata prima della (3) è:*

$$y' = -6A \cdot e^{-6 \cdot t} - 4B \cdot e^{-4 \cdot t} \quad (3.3.27)$$

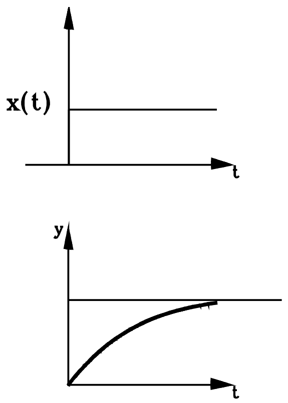
$$\begin{cases} y = A \cdot e^{-6 \cdot t} + B \cdot e^{-4 \cdot t} + 0.25 & (3.3.28) \\ y' = -6A \cdot e^{-6 \cdot t} - 4B \cdot e^{-4 \cdot t} & (3.3.29) \end{cases}$$

*Si supponga che, inizialmente, il sistema si fermo nella posizione di riposo: nell'istante iniziale la molla non sia deformata e la massa è ferma:*

$$per\ t = 0 \quad risulta \begin{cases} y = 0 \\ y' = 0 \end{cases}$$

*Sostituendo tali condizioni nelle (3) e (4) si ottiene il sistema:*

*fig.3.19*




$$\begin{cases} 0 = A + B + 0.25 \\ 0 = -6A - 4B \end{cases}$$

*Da cui risulta:*

$$\begin{cases} A = 0.5 \\ B = -0.75 \end{cases}$$

*Sostituendo nella (3) si ha la risposta totale:*

$$y = 0.5 \cdot e^{-6 \cdot t} - 0.75 \cdot e^{-4 \cdot t} + 0.25$$

## 3.4 ANALOGIE ELETTROMECCANICHE

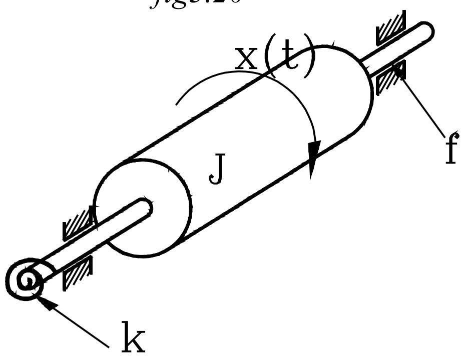
Il sistema di comando finora preso in esame si riferisce ad un modello meccanico di traslazione di una massa.

I risultati ottenuti con tale modello si possono estendere ad altri (come il rotatorio o l'elettrico), sostituendo i parametri caratteristici considerati con gli equivalenti .

| Parametro | Meccanico traslatorio | Meccanico rotatorio | Elettrico |
|---|---|---|---|
| Variabile di ingresso | x(t)=f(t)=forza | x(t)=C(t)=coppia | x(t)=e(t) generatore di tensione |
| Variabile di uscita | y(t)=spostamento | y(t)=angolo di rotazione | $y(t) = v_c(t)$ tensione ai capi della capacità |
| Derivata prima: $y'$ | velocità: $y' = v = \frac{ds}{dt}$ | Velocità angolare $y' = \omega = \frac{d\alpha}{dt}$ | $v_c'(t)$ La corrente è $i = \frac{dq}{dt} = \frac{d(C \cdot v_c)}{dt}$ $i = C \cdot v_c'(t)$ |
| Derivata seconda $y''$ | Accelerazione $y'' = a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$ | Accelerazione angolare $y'' = \dot{\omega} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\alpha}{dt^2}$ | $v_c''(t)$ |
| Coefficiente di $y'$ | f=coefficiente di attrito viscoso | f=coefficiente di attrito viscoso | R resistenza |
| Coefficiente di $y''$ | m=massa | J= momento di inerzia | L induttanza |
| Coefficiente di y | k=rigidità della molla | k=rigidità della molla | $\frac{1}{C}$ Inverso capacità |

### 3.4.1 Moto rotatorio

*fig3.20*




Il sistema è schematizzato con un rotore avente un momento d'inerzia *J*, sul quale viene applicata una coppia motrice $C_m = x(t)$.

Detto rotore è solidale a due perni, che scorrono su due supporti lubrificati, soggetti ad un attrito viscoso di coefficiente *f*, ed è trattenuto da una molla con costante elastica *k*.

Il segnale di ingresso è costituito dalla coppia motrice **x(t)**, il segnale di uscita è l'angolo di rotazione $\alpha(t)=y(t)$

L'equazione differenziale caratteristica del moto si ottiene effettuando l'equilibrio dei momenti.

La coppia motrice *x(t)* è equilibrata dai seguenti momenti:

1- *Momento dovuto all'inerzia*.
È dato dal prodotto del momento di inerzia *J* per l'accelerazione angolare $\dot{\omega}$

$$J \cdot \dot{\omega}$$

L'accelerazione angolare è la derivata seconda dell'angolo **y** rispetto al tempo

$$\dot{\omega} = y''$$

Per cui il momento dovuto all'inerzia è espresso da:

$$\boxed{J \cdot y''}$$

2- *Momento dovuto all'attrito viscoso*.
È proporzionale, secondo il coefficiente, alla velocità angolare, che è la derivata prima dell'angolo rispetto al tempo: $\omega = y'$

$$\boxed{f \cdot y'}$$

3- *Momento dovuto alla tensione della molla*.
È proporzionale, secondo la costante di elasticità *k*, alla deformazione angolare *y* della molla:

$$\boxed{k \cdot y}$$

Dall'equilibrio dei momenti si ottiene l'equazione differenziale:

$$J \cdot y'' + f \cdot y' + k \cdot y = x(t) \quad (4.1)$$

L'espressione è analoga a quella scritta per il moto traslatorio. Come riportato nella tabella della pagina precedente, al posto della massa *m* si sostituisce il momento d'inerzia ***J***. Il segnale d'ingresso *x(t)* rappresenta la coppia motrice e il segnale di uscita *y(t)* l'angolo di rotazione.

L'equazione differenziale può essere normalizzata dividendo per *J:*

$$y'' + \frac{f}{J} \cdot y' + \frac{k}{J} \cdot y = \frac{1}{J} \cdot x(t)$$

Si possono definire, anche nel moto rotatorio, gli stessi parametri caratteristici che sono stati impostati nel caso del moto traslatorio: basta sostituire al posto della massa *m* il momento di inerzia *J:*

$\boxed{\alpha = \frac{f}{2J}}$ $\boxed{\omega_0^2 = \frac{k}{J}}$ $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{J}}}$ $\boxed{\sigma = \frac{\alpha}{\omega_0}}$ $\boxed{\sigma = \frac{f}{2\sqrt{kJ}}}$

Con tali posizioni l'equazione differenziale si scriverà ancora nella forma canonica:

$$y'' + 2\sigma\omega_0 \cdot y' + \omega_0^2 \cdot y = \frac{1}{J} \cdot x(t) \quad (4.2)$$

*Unità di misura*

*Traslazione*

$$[m] \qquad [m] = kg$$

$$[f \cdot v] = N \qquad [f] \cdot \frac{m}{s} = N \qquad [f] = N \cdot \frac{s}{m}$$

$$[k \cdot y] = N \qquad [k] \cdot m = N \qquad [k] = \frac{N}{m}$$

*Rotazione*

$$[J] \qquad [J] = kg \cdot m^2$$

$$[f \cdot \omega] = Nm \qquad [f] \cdot \frac{rad}{s} = Nm \qquad [f] = Nm \cdot \frac{s}{rad}$$

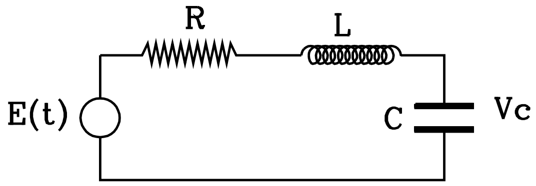
$$[k \cdot y] = Nm \qquad [k] \cdot rad = Nm \qquad [k] = \frac{Nm}{rad}$$

### 3.4.2 Modello elettrico

Il modello elettrico, da considerare equivalente ai precedenti, è costituito da un generatore di tensione, come ingresso, che alimenta una induttanza *L*, una resistenza *R* e una capacità *C***;** Il segnale di uscita è la tensione ai capi del condensatore.

La tensione ai capi del condensatore è assunta come segnale di uscita, per avere un similitudine più rispondente al modello meccanico, nel quale è stato determinata la deformazione della molla, in risposta alla forza o al momento applicato al sistema. La deformazione della molla si può paragonare alla tensione ai capi del condensatore.

*fig.3.21*




Tensione di ingresso $E(t)$
Tensione di uscita condensatore $v_c(t)$
Carica istantanea condensatore $q(t)$
Corrente istantanea $i(t)$

Dall'equilibrio delle tensioni sulla maglia si può scrivere:

$$R \cdot i + L \cdot \frac{di}{dt} + v_c = E(t)$$

$$L \cdot i' + R \cdot i + v_c = E(t) \quad (4.3)$$

Si esprima la corrente **i** rispetto alla tensione $v_c$ *(segnale di uscita)*

$$i = \frac{dq}{dt} = q'$$

Ma la carica $q$ nel condensatore è data da:

$q = C \cdot v_c$ quindi:

$i = C \cdot v_c'$ sostituendo nella (4.3):

$$LC \cdot v_c'' + RC \cdot v_c' + v_c = E(t)$$

Dividendo tutto per C, si ha l'equazione differenziale con i parametri corrispondenti al modello meccanico:

$$L \cdot v_c'' + R \cdot v_c' + \frac{1}{C} \cdot v_c = \frac{1}{LC} \cdot E(t)$$

nella quale si ha la sostituzione:

| | | |
|---|---|---|
| Massa o momento d'inerzia | $\rightarrow$ | Induttanza L |
| Resistenza di attrito viscoso | $\rightarrow$ | Resistenza R |
| Costante elastica della molla | $\rightarrow$ | Inverso capacità $\frac{1}{C}$ |

Per normalizzare l'equazione si divide per L , ottenendo:

$$v_c'' + \frac{R}{L} \cdot v_c' + \frac{1}{LC} \cdot v_c = \frac{1}{LC} \cdot E(t)$$

Con la sostituzioni anzidette si possono introdurre i parametri caratteristici:

$$\boxed{\alpha = \frac{R}{2L}} \qquad \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \qquad \boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}} \qquad \sigma = \frac{\alpha}{\omega_0} \qquad \sigma = \frac{R}{2\sqrt{\frac{1}{C} \cdot L}} \qquad \boxed{\sigma = \frac{R}{2\sqrt{L \cdot \frac{1}{C}}}}$$

Con tali posizioni si può scrivere l'equazione differenziale in forma canonica:

$$v_c'' + 2\sigma\omega_0 \cdot v_c' + \omega_0^2 \cdot v_c = \frac{1}{LC} \cdot E(t) \quad (4.4)$$

*ESERCIZI*

*Sistemi del I ordine*

***Risposta ad una rampa***

*x(t)=80·t (x misurato in N)*

*f=20 Ns/m*

*k=5000 N/m*

*massa trascurabile*

*equz. diff.* $20y' + 5000y = 80 \cdot t$ (4.5)

*Il transitorio si ottiene uguagliando a zero il primo membro:*

$$20y' + 5000y = 0$$

*L'equazione caratteristica associata è:*

$$20 \cdot z + 5000 = 0 \quad \textit{da cui}$$

$$z = -\frac{5000}{20} = -250$$

*Il transitorio è:*

$$y = A \cdot e^{-250t}$$

*Soluzione particolare:*

*proviamo con un funzione rettilinea del tipo:*

$$y = B \cdot t + C$$

*La derivata della funzione è:*

$y' = B$ *sostituendo nella* (4.5)

$$20B + 5000 \cdot (B \cdot t + C) = 80 \cdot t$$

$$5000B \cdot t + (5000C + 20B) = 80 \cdot t$$

*I due polinomi in t saranno uguali quando sono uguali i coefficienti.*
*Dall'uguaglianza di essi si ottiene il sistema:*

$$\begin{cases} 5000B = 80 \\ 5000C + 20B = 0 \end{cases} \quad \textit{da cui si ottiene}$$

*da cui si ottiene:*

$$\begin{cases} B = 0.016 \\ C = 64 \cdot 10^{-6} \end{cases}$$

*la soluzione particolare è:*

$$y = 0{,}016 \cdot t + 64 \cdot 10^{-6}$$

$$y = A \cdot e^{-250t} + 0{,}016 \cdot t + 64 \cdot 10^{-6} \quad (4.6)$$

*fig.3.22*

*Condizioni iniziali:*

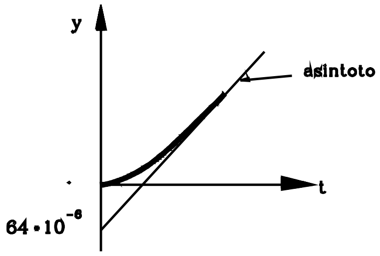
*Supponiamo che:*

$$Per\ t = 0 \quad y = 0$$

*Sostituendo nella (2) si ottiene:*

$0 = A \cdot e^{0} + 0 + 64 \cdot 10^{-6}$ *da cui :*

$A = -64 \cdot 10^{-6}$ *sostituendo nella* (4.6)




$$y = -64 \cdot 10^{-6} \cdot e^{-250t} + 0.016 \cdot t + 64 \cdot 10^{-6}$$
$$y = 64 \cdot 10^{-6} \cdot \left(1 - e^{-250 \cdot t}\right) + 0.016 \cdot t$$

*SISTEMI DEL II ORDINE*

*Risposta ad un gradino. Caso di Delta=0*

*Si Consideri un sistema rotatorio*

*x(t)=52 Nm*
*I=0,5 kgm²*
*f=20 Nms/rad*
*k=200 Nm/rad*

*Equazione differenziale:*

$$0,5 \cdot y'' + 20 \cdot y' + 200 \cdot y = 52$$

$$y'' + 40 \cdot y' + 400 \cdot y = 104 \quad (4.7)$$

*Il transitorio si ha uguagliando a zero il I membro:*

$$y'' + 40 \cdot y' + 400 \cdot y = 0$$

*Equazione caratteristica:*

$$z^2 + 40 \cdot z + 400 = 0$$

$$z^2 + 40 \cdot z + 400 = 0$$
$$\frac{\Delta}{4} = 400 - 400 = 0 \quad \Delta = 0$$

*Si ha l'unica soluzione (due soluzioni coincidenti):*

$$z = -20$$

*risposta transitoria:*

$$y = \left(A + B \cdot t\right) \cdot e^{-20 \cdot t} \quad \text{ossia}$$
$$y = A \cdot e^{-20t} + B \cdot t \cdot e^{-20t} \quad (4.8)$$

*Soluzione particolare:*

*Proviamo con*

$$y=h$$

*sostituendo nella (1) si ha:*

$$400 \cdot h = 104$$

$$h = 0,26 \text{ rad}$$

*La soluzione totale sarà:*

$$y = A \cdot e^{-20t} + B \cdot t \cdot e^{-20t} + 0.26 \quad (4.9)$$

*Per poter imporre le condizioni iniziali si effettui la derivata prima della* (4.9)

$$y' = -20A \cdot e^{-20t} + B \cdot e^{-20t} - 20B \cdot t \cdot e^{-20t} \quad (4.10)$$

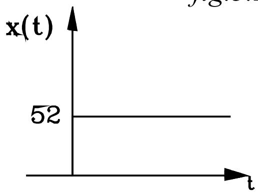
*Si hanno le due funzioni:*

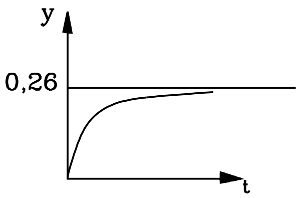
$$\begin{cases} y = A \cdot e^{-20t} + B \cdot t \cdot e^{-20t} + 0.26 & (4.11) \\ y' = -20A \cdot e^{-20t} + B \cdot e^{-20t} - 20B \cdot t \cdot e^{-20t} & (4.12) \end{cases}$$

*Si supponga che nelle condizioni iniziali il sistema si a riposo: fermo (velocità nulla) e con molla non deformata.*

$$per\,t = 0 \rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y' = 0 \end{cases}$$

*fig.3.23*




*Sostituendo nelle (3) e (4) si ha:*

$$\begin{cases} 0 = A + 0.26 \\ 0 = -20A + B \end{cases}$$ *da cui si ottiene:*

$$\begin{cases} A = -0.26 \\ B = 5.2 \end{cases}$$

*La soluzione totale sarà:*

$$y = 0.26 - 5.2t \cdot e^{-20t} - 0.26 \cdot e^{-20t}$$

*Risposta ad un gradino .Caso di Delta<0*

| | |
|---|---|
| *x(t)=260 Nm* | *momento applicato* |
| *J=0,5 kgm²* | *momento di inerzia* |
| *f=20 Nms/rad* | *attrito viscoso* |
| *k=650 Nm/rad* | *costante elastica* |

*Equaz. diff.*

$$0{,}5 \cdot y'' + 20 \cdot y' + 650 \cdot y = 260 \quad (4.13)$$

*Si normalizza dividendo per 0,5*

$$y'' + 40 \cdot y' + 1300 \cdot y = 520$$

*Transitorio*

$$y'' + 40 \cdot y' + 1300 \cdot y = 0$$

*Equazione caratteristica associata:*

$$z^2 + 40 \cdot z + 1300 = 0$$

*con la ridotta*

$$\frac{\Delta}{4} = -900$$

*Si ottengono le due soluzioni complesse coniugate*

$$z_{1,2} = -20 \pm \sqrt{-900} = -20 \pm j\sqrt{900}$$

$$z_{1,2} = -20 \pm j30$$

*La risposta transitoria sarà:*

$$y = M \cdot e^{-20t} \cdot sen(30 \cdot t + \beta)$$

*Soluzione particolare:*

*Si provi con*

$$y = h$$

*sostituendo nella (1) si ottiene*

$$0 + 0 + 1300 \cdot h = 520$$

*da cui*

$$h = 0,4 \ rad$$

*La soluzione particolare sarà quindi*

$$y = 0.4$$

*La soluzione totale è:*

$$y = 0,4 + M \cdot e^{-20t} \cdot sen(30 \cdot t + \beta) \quad (4.14)$$

*Per imporre le condizioni iniziali si effettui la derivata prima della* (4.14)*:*

$$y' = -20M \cdot e^{-20t} \cdot sen(30 \cdot t + \beta) + 30M \cdot e^{-20t} \cdot cos(30 \cdot t + \beta) \qquad (4.15)$$

*Si hanno le due funzioni*

$$\begin{cases} y = 0,4 + M \bullet e^{-20t} \bullet sen(30 \bullet t + \beta) \\ y' = -20M \cdot e^{-20t} \cdot sen(30 \cdot t + \beta) + 30M \cdot e^{-20t} \cdot \cos(30 \cdot t + \beta) \end{cases}$$

*Si supponga ancora che nelle condizioni iniziali il sistema si a riposo: fermo (velocità nulla) e con molla non deformata.*

$$per\, t = 0 \rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y' = 0 \end{cases}$$

*sostituendo nelle (2) e (3) si ha*

$$\begin{cases} 0 = 0.4 + M \cdot sen\beta & (4.16) \\ 0 = -20M \cdot sen\beta + 30M \cdot \cos\beta & (4.17) \end{cases}$$

*Dalla (5) si ha:*

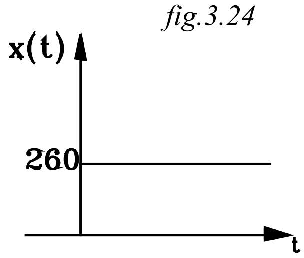
$$tag\beta = \frac{30}{20} = 1.5 \quad \textit{da cui si ottiene:}$$

$$\begin{cases} \beta_1 = 56.3^\circ \\ \beta_2 = 56.3^\circ + 180^\circ \end{cases} \qquad \begin{cases} \beta_1 = 0.983 rad \\ \beta_2 = 0.983 + \pi \ rad \end{cases}$$

*Sostituendo nella (4) si ha:*

$$\begin{cases} M_1 = -\dfrac{0.4}{sen\beta_1} = -0.481 \\ M_2 = \dfrac{0.4}{sen\beta_2} = 0.481 \end{cases}$$

*fig.3.24*

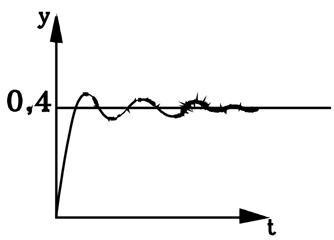



*Si otterrà*

$$y = 0{,}4 - 0{,}48 \cdot e^{-20 \cdot t} \cdot sen(30 \cdot t + 0{,}983)$$

*oppure:*

$$y = 0{,}4 + 0{,}48 \bullet e^{-20 \bullet t} \bullet sen(30 \bullet t + 0{,}983 + \pi)$$




*Ricordando che:*

$$sen(\alpha + \pi) = -sen\alpha$$

*si ottiene la stessa soluzione*

$$y = 0{,}4 - 0{,}48 \cdot e^{-20 \cdot t} \cdot sen(30 \cdot t + 0{,}983)$$

*Risposta ad una vibrazione sinusoidale - Caso di Δ<0*

| | |
|---|---|
| *x(t)=200sen(ωt)* | *momento applicato* |
| *f=5 Hz* | *frequenza* |
| *J=1 kgm²* | *momento di inerzia* |
| *f=10 Nms/rad* | *attrito viscoso* |
| *k=1625 Nm/rad* | *costante elastica* |

*Pulsazione:*

$$\omega = 2\pi \cdot f = 2\pi \cdot 5 = 31{,}4 s^{-1}$$

*Equazione differenziale*

$$y'' + 10y' + 1625y = 200sen(31{,}4t) \quad (4.18)$$

*Nel campo complesso:*

$$Y'' + 10 \cdot Y' + 1625 \cdot Y = 200e^{j31{,}4t} \quad (4.19)$$

*Transitorio:*

$$y'' + 10y' + 1625y = 0$$

*Equazione caratteristica associata:*

$$z^2 + 10z + 1625 = 0$$

*Discriminante :* $\dfrac{\Delta}{4} = -1600 < 0$

*Soluzioni:* $z_{1,2} = -5 \pm j40$

*Segnale transitorio:*

$$y = M \cdot e^{-5t} \cdot sen(40 \cdot t + \beta) \quad (4.20)$$

*Risposta forzata*

*A regime i segnale sarà sinusoidale come quello di ingresso; del tipo:*

$$y = A \cdot sen(31{,}4 \cdot t + \varphi) \quad (4.21)$$

*In forma complessa:*

$$Y = A \cdot e^{j(31{,}4 \cdot t + \varphi)} \quad (4.22)$$

*Occorre che la (4.22) soddisfi l'equazione differenziale* (4.19)

*Si effettuino le derivate prima e seconda:*

$$Y' = j31{,}4 \cdot A \cdot e^{j(31{,}4 \cdot t + \varphi)}$$

$$Y'' = -986 \cdot A \cdot e^{j(31{,}4 \cdot t + \varphi)}$$

*Sostituendo si ha:*

$$-986 \cdot A \cdot e^{j(31{,}4 \cdot t + \varphi)} + j314 \cdot A \cdot e^{j(31{,}4 \cdot t + \varphi)} + 1625 \cdot e^{j(31{,}4 \cdot t + \varphi)} = 200 \cdot e^{j(31{,}4 \cdot t)}$$

*Scomponendo gli esponenti*

$$-986 \cdot A \cdot e^{j31{,}4 \cdot t} \cdot e^{j\varphi} + j314 \cdot A \cdot e^{j31{,}4 \cdot t} \cdot e^{j\varphi} + 1625 \cdot A \cdot e^{j31{,}4 \cdot t} \cdot e^{j\varphi} = 200 \cdot e^{j(31{,}4 \cdot t)}$$

*Semplificando il fattore comune* $e^{j31{,}4 \cdot t}$ *che compare sia al primo che al secondo membro:*

$$-986 \cdot A \cdot e^{j\varphi} + j314 \cdot A \cdot e^{j\varphi} + 1625 \cdot A \cdot e^{j\varphi} = 200$$

*Ponendo in evidenza* $A \cdot e^{j\varphi}$ *:*

$$A \cdot e^{j\varphi} \cdot (-986 + j314 + 1625) = 200 \quad \textit{da cui:}$$

$$A \cdot e^{j\varphi} = \frac{200}{639 + j314} \quad (4.23)$$

*Nella* (6) *il modulo del primo membro deve essere uguale a quello del secondo così pure la fase.*

*Uguaglianza dei moduli* $\quad A = \dfrac{200}{\sqrt{639^2 + 314^2}} = 0.28 \quad m$

*Uguaglianza della fasi:* $\quad \varphi = 0 - arctg\dfrac{314}{639} = -0{,}46 \quad radianti$

*Si ottiene così la risposta forzata:*

*Risposta forzata:*

$$y = 0{,}28 \cdot sen(31{,}4 \cdot t - 0{,}46) \quad (4.24)$$

*Risposta totale:*

*È la somma del transitorio* (4.22) *più la risposta forzata* (4.24).

$$y = M \cdot e^{-5t} \cdot sen(40 \cdot t + \beta) + 0{,}28 \cdot sen(31{,}4 \cdot t - 0{,}46) \quad (4.25)$$

*Occorre ora determinare le due costanti M e* $\varphi$. *Queste si ricavano dalle condizioni iniziali.*

*Supponiamo che: per t =0 siano y=0 e y'=0*

*Si effettui la derivata della* (8)

$$y' = -5M \cdot e^{-5t} \cdot sen(40 \cdot t + \beta) + 40M \cdot e^{-5t} \cdot \cos(40 \cdot t + \beta) + 8{,}79 \cdot \cos(31{,}4 \cdot t - 0{,}46) \quad (4.26$$

*Imponendo le condizioni iniziali nella* (8) *e nella* (9) *si ha:*

$$0 = M \cdot sen\beta + 0{,}28 \cdot sen(-0{,}46) \qquad (4.27)$$

$$0 = -5M \cdot sen\beta + 40M \cdot \cos\beta + 8{,}79 \cdot \cos(-0{,}46) \qquad (4.28)$$

*Dalla* (4.27 *ottiene:*

$$M = \frac{0{,}12}{sen\beta}$$ *sostituendo nella* (4.28) s*i ha:*

$$0 = -5 \cdot \frac{0{,}12}{sen\beta} \cdot sen\beta + 40 \cdot \frac{0{,}12}{sen\beta} \cdot \cos\beta - 7{,}87$$

$$0 = -0{,}6 + \frac{4{,}8}{tg\beta} - 7{,}8$$ *da cui*

$$tg\beta = \frac{-4{,}8}{7{,}27}$$

$\beta = -0{,}6$ *radianti* *risulterà*

$$M = \frac{0{,}12}{sen(-0{,}6)} = -0{,}21$$

*La risposta totale risulta:*

$$y = -0{,}21 \cdot e^{-5t} \cdot sen(40 \cdot t - 0{,}6) + 0{,}28 \cdot sen(31{,}4 \cdot t - 0{,}46)$$

## TRASFORMATA DI LAPLACE

Come si è detto ad un sistema di comando è associata una equazione differenziale del tipo:

$$a_n \bullet y^{(n)} + a_{n-1} \bullet y^{(n-1)} + \ldots\ldots + a_2 \bullet y'' + a_1 \bullet y' + a_o \bullet y = x(t) \qquad (3.5.1)$$

La soluzione è la somma di quella risultante dalla equazione omogenea associata e la soluzione particolare.

Alla equazione omogenea si associa l'equazione caratteristica, che si presenta come un polinomio di grado *n,* nella variabile *z*, uguagliato a zero.

Si può introdurre un calcolo operazionale, mediante il quale, l'equazione differenziale nella funzione del tempo *y(t)* si traduce in un polinomio *Y(s)* della variabile complessa $s=\alpha+j\omega$.

Anche la funzione di ingresso *x(t)* viene trasformata nella funzione *X(s)* della variabile complessa *s*.

Trasformata l'equazione differenziale in una equazione polinomia di grado "*n*", nella variabile "$s=\alpha+j\omega$", con coefficienti reali, si vanno a ricercare le sue soluzioni nel campo complesso.

Ottenute le soluzioni $Y_1(s)$, $Y_2(s)$....$Y_n(s)$, si trasformano in senso inverso tali funzioni, dal campo complesso a quello reale, ottenendo le soluzioni $y_1(t)$....$y_n(t)$ cercate.

Le soluzioni che si ottengono comprendono anche le condizioni iniziali.

La trasformata di Laplace di una funzione y(t) è l'espressione:

$$Y(s) = L[y(t)] = \int_0^\infty y(t) \cdot e^{-st} \cdot dt \qquad (3.5.2)$$

Si suppone *y(t)=0 per t<0*

La trasformata inversa di Laplace è:

$$y(t) = L^{-1}[Y(s)] = \int_{\delta-\infty}^{\delta+\infty} Y(s) \cdot e^{ts} \cdot ds \qquad (3.5.3)$$

Ovviamente i due integrali debbono, essere convergenti

Nella tabella seguente vengono riportate le trasformate delle funzioni più usuali.

La tabella si può leggere nei due sensi:

1- Data la funzione *y(t)* sulla prima colonna, si trova sulla seconda, la funzione trasformata *Y(s)* corrispondente nel campo complesso.

2- Viceversa, conosciuta la funzione *Y(s)* nel campo complesso che è riportata sulla seconda colonna, si trova, sulla prima, la funzione antitrasformata *y(t)* corrispondente nel campo reale del tempo.

## TABELLA DELLE TRASFORMATE DELLE FUNZIONI PIÙ USUALI

| y(t) | Y(s) | Note |
|---|---|---|
| u(t) | 1 | funzione impulsiva |
| 1(t) | $\frac{1}{s}$ | gradino |
| $e^{-\alpha t}$ | $\frac{1}{\alpha + s}$ | funzione esponenziale |
| $sen(\omega t)$ | $\frac{\omega}{\omega^2 + s^2}$ | |
| $\cos(\omega t)$ | $\frac{s}{\omega^2 + s^2}$ | |
| $sen(\omega t+\beta)$ | $\frac{\omega \cdot \cos\beta + s \cdot sen\beta}{\omega^2 + s^2}$ | |
| $\cos(\omega t+\beta)$ | $\frac{s \cdot \cos\beta - \omega \cdot sen\beta}{\omega^2 + s^2}$ | |
| t | $\frac{1}{s^2}$ | Rampa con coefficiente unitario |
| $t \cdot e^{-\alpha t}$ | $\frac{1}{(s+\alpha)^2}$ | Molteplicità 2 *(due soluzioni coincidenti)* |
| $\frac{1}{(n-1)!} \cdot t^{n-1} \cdot e^{-\alpha t}$ | $\frac{1}{(s+\alpha)^n}$ | Molteplicità n |

### 3.5.1 PROPRIETÀ FONDAMENTALI DELLA TRASFORMATA

1- La trasformata di una costante per una funzione è uguale alla costante per la trasformata della funzione.

$$L[A \cdot y(t)] = A \cdot [y(t)] = A \cdot Y(s) \quad (3.5.4)$$

2- La trasformata della somma di funzioni è uguale alla somma delle trasformate delle singole funzioni:

$$L[y_1(t) + y_2(t)] = Y_1(s) + Y_2(s) \quad (3.5.5)$$

3- Derivata

La trasformata della derivata *y'* della funzione *y(t)* è uguale al prodotto della variabile *s* per la trasformata *Y(s)* della funzione, meno il valore che la funzione non derivata *y(t)* assume nell'istante iniziale per $t \to 0^+$
Dove $0^+$ è l'intorno a destra dello zero.

$$\boxed{L\left[\frac{dy(t)}{dt}\right] = s \cdot Y(s) - \lim_{t \to 0^+} y(t)} \quad (3.5.6)$$

Per semplicità si indica il limite: $\lim_{t \to 0^+} y(t)$ con l'espressione: $y(0^+)$

4- Derivata seconda

È data dal prodotto di ***s*** per la trasformata della derivata prima L(y') meno la funzione y' *(nella quale non è stata effettuata la derivata II)* calcolata *per* $t \to 0^+$

$$L\left[\frac{d^2y}{dt^2}\right] = \left\{s \cdot L\left[\frac{dy}{dt}\right] - \frac{dy(0^+)}{dt}\right\}$$

Avendo indicato con $\frac{dy(0^+)}{dt}$ la derivata prima calcolata *per* $t \to 0^+$
sviluppando ulteriormente la trasformata della derivata prima si ha:

$$L\left[\frac{d^2y}{dt^2}\right] = s \cdot [s \cdot Y(s) - y(0^+)] - \frac{dy(0^+)}{dt}$$

$$L\left[\frac{d^2y}{dt^2}\right] = s^2 \cdot Y(s) - s \cdot y(0^+) - \frac{dy(0^+)}{dt} \quad (3.5.7)$$

5- Integrazione

$$L\left[\int y(t) \cdot dt\right] = \frac{Y(s)}{s} + \frac{1}{s} \cdot \left[\int y(t) \cdot dt\right]_{0^+} \quad (3.5.8)$$

### 3.5.2 RISPOSTA DI UN SISTEMA DI COMANDO CON IL METODO DELLA TRASFORMATA DI LAPLACE

Il metodo per determinare la risposta di un sistema ad un segnale di comando di ingresso può essere ottenuto con l'impiego della trasformata di Laplace.
Il metodo è il seguente:

1- Studiato il sistema, stendere l'equazione differenziale.

2- Trasformare la funzione di ingresso *x(t)* nella funzione *X(s)*, adoperando la tabella delle trasformazioni.

3- Trasformare l'equazione differenziale nel campo complesso con le trasformate di Laplace, operando con le proprietà su scritte.

4- Immettere le condizioni iniziali, previste nella trasformata.

5- Ricavare algebricamente la risposta *Y(s)* come soluzione dell'equazione polinomia.

6- Antitrasformare le soluzioni trovate dal campo complesso al campo reale del tempo.

Con il metodo della trasformata, la risposta che si ottiene dal sistema di comando è totale, comprensiva del transitorio, della risposta forzata e tiene conto anche dell'imposizione delle condizioni iniziali.

Infatti, si consideri, come esempio, l'equazione differenziale normalizzata di un sistema del II ordine :

$$y'' + 2\sigma\omega_0 y' + \omega_0^2 y = x(t) \quad (3.5.9)$$

nella quale sia anche la funzione di ingresso *x(t)* normalizzata rispetto al coefficiente di *"y" (l'ingresso è stato diviso per detto coefficiente).* Si ha così la risposta ad un segnale riferito all'unità di massa *(l'unità di, momento d'inerzia)* .

Si effettui la trasformata di Laplace di tutti i termini dell'equazione differenziale.

- Trasformata della funzione di ingresso x(t):

$$L[x(t)] = X(s)$$

- Trasformata della funzione di uscita y(t):

$$L[y(t)] = Y(s)$$

Trasformando nel campo complesso l'equazione differenziale ,occorre introdurre le condizioni iniziali nelle espressioni della derivata prima e seconda

- Trasformata della derivata prima:

$$L[y'] = s \cdot Y(s) - y(0^+)$$

- Trasformata della derivata seconda:

$$L[y''] = s^2 \cdot Y(s) - s \cdot y(0^+) - y'(0^+)$$

Sostituendo nella (3.5.9)

$$s^2 \cdot Y(s) - s \cdot y(0^+) - y'(0^+) + 2\sigma\omega_0 \cdot [s \cdot Y(s) - y(0^+)] + \omega_0^2 \cdot Y(s) = X(s)$$

Sviluppando e riunendo tutte le condizioni iniziali si ha

$$s^2 \cdot Y(s) + s \cdot 2\sigma\omega_0 \cdot Y(s) + \omega_0^{\ 2} \cdot Y(s) - \left[ s \cdot y(0^+) + y'(0^+) + 2\sigma\omega_0 \cdot y(0^+) \right] = X(s) \quad (3.5.10)$$

$$s^2 \cdot Y(s) + s \cdot 2\sigma\omega_0 Y(s) + \omega_0^{\ 2} \cdot Y(s) - [Condizioni\, iniziali] = X(s)$$

da cui ricavando Y(s) si ha:

$$Y(s) = \frac{X(s)}{s^2 + 2\sigma\omega_0 \cdot s + \omega_0^{\ 2}} + \frac{[condizioni\, iniziali]}{s^2 + 2\sigma\omega_0 \cdot s + \omega_0^{\ 2}}$$

Per semplicità di trattazione si riterrà che, inizialmente, il sistema sia a riposo, con:

$$y(0^+) = 0 \quad y'(0^+) = 0$$

per cui l'espressione entro parentesi quadra nella (3.5.10) è nulla. L'equazione differenziale in tal caso si presenta nella forma di un trinomio di secondo grado avente la seguente espressione canonica

$$s^2 \cdot Y(s) + s \cdot 2\sigma\omega_0 Y(s) + \omega_0^{\ 2} \cdot Y(s) = X(s) \quad (3.5.11)$$

In questo caso la trasformata Y(s) del segnale di uscita risulta:

$$Y(s) = \frac{X(s)}{s^2 + 2\sigma\omega_0 \cdot s + \omega_0^{\ 2}} \quad (35.12)$$

| |
|---|
| Al denominatore compare l'equazione caratteristica associata all'equazione differenziale, dalla soluzione della quale dipende se il regime transitorio è smorzato o no, con o senza oscillazione. |

Nella trattazione che seguirà, si supporrà sempre, che il sistema, nelle condizioni iniziali, sia a riposo. Da tale ipotesi ne derivano le seguenti, interessanti semplificazioni.

1- Effettuare la derivata prima di una funzione nel campo reale corrisponde a moltiplicare per *"s"* la sua trasformata nel campo complesso:

$$L\left[\frac{dy(t)}{dt}\right] = s \cdot Y(s)$$

2- Effettuare la derivata seconda di una funzione nel campo reale corrisponde a moltiplicare per *"$s^2$"* la sua trasformata nel campo complesso:

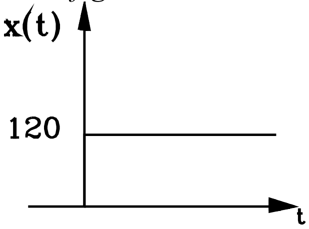
$$L\left[\frac{d^2y}{dt^2}\right] = s^2 \cdot Y(s)$$

Per capire il. metodo di risoluzione con le trasformate di Laplace conviene riferirsi ad un semplice esempio numerico.

*Esercizio*

*Su un sistema in rotazione siano noti i seguenti parametri:*

*fig.3.25*




| | |
|---|---|
| *Momento d'inerzia* | *J=0.5* $kg\,m^2$ |
| *Coefficiente di attrito* | *f=12* $Nms/rad$ |
| *Costante elastica* | *k=40 Nm/rad* |
| *funzione di ingresso* | *x(t)=120 Nm* |

*Sul sistema è applicato un momento costante di 120Nm dall'istante* $t=0^+$ *in poi.*

*Equazione differenziale:*

$$0.5\cdot y'' + 12\cdot y' + 40\cdot y = 120$$

*Si normalizza dividendo per 0.5:*

$$y'' + 24\cdot y' + 80\cdot y = 240 \qquad (3.5.13)$$

*Effettuando sulla equazione le trasformate di laplace:*

*Trasformata del gradino 120* $L[120] = L[120\cdot 1(t)] = \dfrac{120}{s}$

*Trasformata di y(t)* $L[y(t)] = Y(s)$

*Trasformata della derivata prima* $y'$ $L[y'] = s\cdot Y(s)$

*Trasformata della derivata seconda* $y''$ $L[y''(t)] = s^2\cdot Y(s)$

*Sostituendo nella (1) si ha:*

$$s^2\cdot Y(s) + 24s\cdot Y(s) + 80\cdot Y(s) = \frac{240}{s}$$

*Da cui si ricava la Y(s):*

$$Y(s) = \frac{240}{s\cdot(s^2 + 24s + 80)}$$

*Ora si scompone il denominatore* $(s^2 + 24s + 80)$

*Uguagliandolo a zero le soluzioni sono :*

$$\begin{cases} s_1 = -20 \\ s_2 = -4 \end{cases}$$

*Si ottiene:*

$$Y(s) = \frac{240}{s\cdot(s+20)\cdot(s+4)}$$

*L'espressione si può portare ad una somma di termini che si trovano nella seconda colonna della tabella delle trasformate di Laplace:*

$$Y(s) = \frac{240}{s\cdot(s+20)\cdot(s+4)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{(s+20)} + \frac{C}{(s+4)} \qquad (3.5.14)$$

*Il metodo più semplice per determinare A,B;C è il seguente:*

*Per determinare A*

*Si moltiplicano ambo i membri dell'espressione* (3.5.14) *per s e si pone poi s=0*

$$\frac{240}{s\cdot(s+20)\cdot(s+4)}\cdot s=\frac{A}{s}\cdot s+\frac{B}{(s+20)}\cdot s+\frac{C}{(s+4)}\cdot s \quad \textit{semplificando s}$$

$$\frac{240}{(s+20)\cdot(s+4)}=A+\frac{B}{(s+20)}\cdot s+\frac{C}{(s+4)}\cdot s \quad \textit{si pone s=0}$$

$$\frac{240}{(0+20)\cdot(0+4)}=A+\frac{B}{(s+20)}\cdot 0+\frac{C}{(s+4)}\cdot 0 \quad \textit{da cui}$$

$$A=\frac{240}{80}=3$$

*Si ha quindi*

$$A=\left[Y(s)\cdot s\right]_{s=0}$$

*Si ricava B*

*Si moltiplicano ambo i membri dell'espressione* (3.5.14) *per (s+20) e si pone poi s=-20*

$$\frac{240}{s\cdot(s+20)\cdot(s+4)}\cdot(s+20)=\frac{A}{s}\cdot(s+20)+\frac{B}{(s+20)}\cdot(s+20)+\frac{C}{(s+4)}\cdot(s+20)$$

*semplificando*

$$\frac{240}{s\cdot(s+4)}=\frac{A}{s}\cdot(s+20)+B+\frac{C}{(s+4)}\cdot(s+20) \quad \textit{ponendo s=-20}$$

$$\frac{240}{-20\cdot(-20+4)}=\frac{A}{s}\cdot(-20+20)+B+\frac{C}{(s+4)}\cdot(-20+20)$$

$$\frac{240}{-20\cdot(-20+4)}=0+B+0$$

$$B=\frac{3}{4}$$

*Ossia:*

$$B=\left[Y(s)\cdot(s+20)\right]_{s=-20}=\frac{3}{4}$$

*Alla stesa maniera si ricava C*

$$C=\left[Y(s)\cdot(s+4)\right]_{s=-4}=\left[\frac{240}{s\cdot(s+20)\cdot(s+4)}\cdot(s+4)\right]_{s=-4}=\frac{240}{-4\cdot(-4+20)}=-\frac{15}{4}$$

*Sostituendo si ha:*

$$Y(s)=3\cdot\frac{1}{s}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{s+20}-\frac{15}{4}\cdot\frac{1}{s+4}$$

*Leggendo ora sulla seconda colonna della tabella delle trasformate si passa dal campo complesso a quello reale.*

$\frac{1}{s}$ *si tramuta in→* *1*

$\frac{1}{s+20}$ *si tramuta in→* $e^{-20t}$

$\frac{1}{s+4}$ *si tramuta in*→ $e^{-4t}$

*La funzione y(t) di risposta totale al gradinino di momento applicato risulta:*

$$y(t) = 3 + \frac{3}{4} \cdot e^{-20t} - \frac{15}{4} \cdot e^{-4t}$$

## .6 SCHEMI FUNZIONALI

Nella trattazione dei sistemi, le varie operazioni eseguite sul flusso di energia o sui segnali di informazioni vengono rappresentate da un diagramma costituito da blocchi collegati in sequenza tra loro, costituendo un insieme al quale si dà nome di schema a blocchi.

In tali schemi, detti anche *"schemi funzionali"*, si vuole rappresentare non la struttura degli elementi componenti il sistema , ma le azione che sequenzialmente vengono compiute sul flusso dei segnali in esame .

Nello schema funzionale, in ogni blocco si pone o la descrizione della operazione che viene eseguita sul flusso o il simbolo dell'operazione matematica che viene eseguita sul segnale in transito.

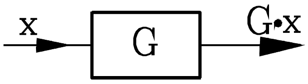
Ciò costituisce il diagramma di flusso o, schemi a blocchi.

Si possono distinguere vari tipi di blocchi.

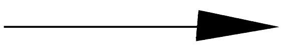
### 3.6.1 Blocchi moltiplicatori

Un blocco moltiplicatore è rappresentato da un rettangolo con una sola entrata e una sola uscita entro i quale viene indicata l'operatore moltiplicativo .

*fig.3.26*



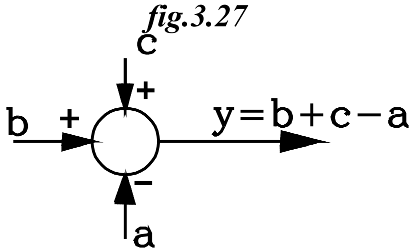

Nel blocco rappresentato in figura l'ingresso *x* viene moltiplicato per la funzione di trasferta *G* e trasformata nella uscita *y.*



Il transito tra un blocco e l'altro è rappresentato da un segmento orientato sul quale viene indicata la variabile che fluisce tra i blocchi. In figura transita la variabile *x.*

### 3.6.2 Blocchi sommatori

*fig.3.27*




Sono blocchi di forma circolare, con più ingressi e una sola uscita.

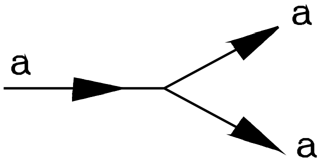
Negli ingressi si pone il segno **(+,-)** a seconda che i segnali di ingresso debbono essere sommati o sottratti per ottenere il segnale di uscita.

In figura, nell'ingresso del blocco sommatore vengono introdotti i segnali *a,b,c.* Il segnale di uscita *y* sarà:

*y=b+c-a*

### 3.6.3 Diramazioni

*fig.3.28*




Sono quei punti dove la variabile viene diramata nei vari blocchi.

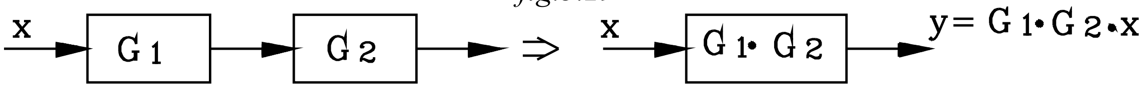
## BLOCCHI EQUIVALENTI

Due blocchi, si dicono equivalenti quando hanno le stesse variabili di entrata e di uscita *(non quelle intermedie)*.

Per l'equivalenza occorre porre in rilievo alcune regole.

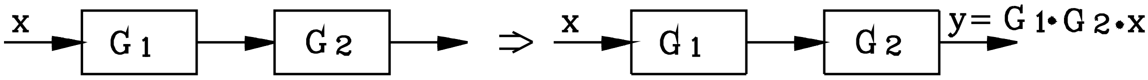
1- Più blocchi in cascata sono equivalenti ad un unico blocco avente come funzione di trasferta il prodotto delle singole funzioni.

*fig.3.29*




2- scambiando l'ordine dei blocchi in cascata si ha un sistema equivalente.

*fig.3.30*

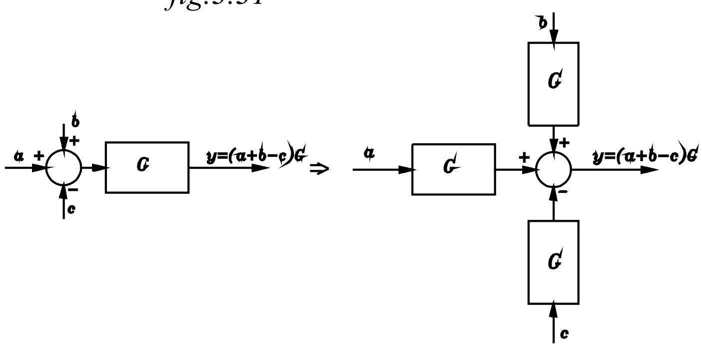



Infatti il blocco equivalente totale sarà sempre un unico blocco con funzione di trasferta pari al prodotto delle singole funzioni.

3- **Spostamento di un blocco moltiplicatore tra ingressi e uscita di un sommatore**

**Spostamento da valle a monte:**

*fig.3.31*



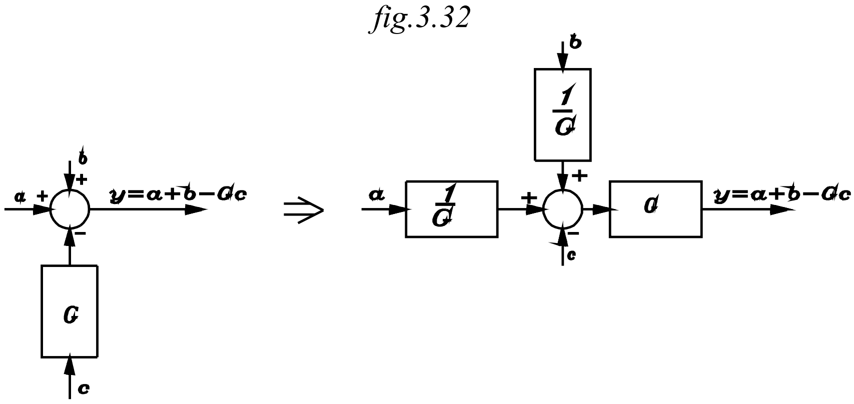

Se si sposta un blocco moltiplicatore da valle *(uscita)* a monte (*in un ingresso)* di un sommatore, allora occorre aggiungere su tutti gli altri ingressi lo stesso blocco ***G***.

Infatti *(vedi fig.)* all'uscita si ha sempre il segnale

$$y=(a-b+c)\cdot G$$

**Spostamento da monte a valle**

*fig.3.32*



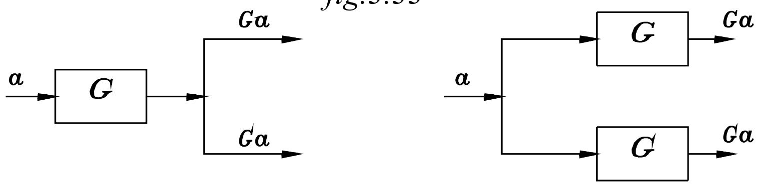
Se si sposta un blocco moltiplicatore da monte *(ingresso)* a valle *(uscita)* di un sommatore occorre aggiungere su tutti gli altri ingressi lo stesso blocco con funzione inversa *1/G*

Infatti prendendo come esempio lo schema di figura si ha in uscita la stessa funzione.

$$y=a+b-G\cdot c$$

**Spostamento blocco da monte a valle di una diramazione**

*fig.3.33*

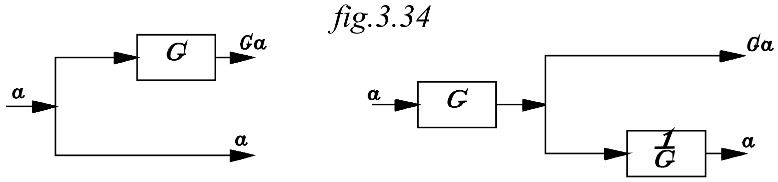



Se si sposta un blocco da monte a valle di una diramazione occorre porla su tutti i rami a valle.

Infatti su ogni ramo si avrà nei due casi equivalenti la funzione $G\cdot a$

**Spostamento di un blocco da valle a monte di una diramazione**

*fig.3.34*

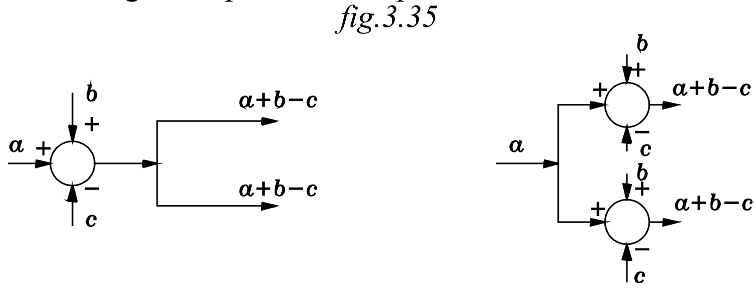



Per spostare un blocco da valle a monte di una diramazione occorre porre sulle altre diramazioni lo stesso blocco con funzione inversa *1/G*.

**Spostamento di sommatori**

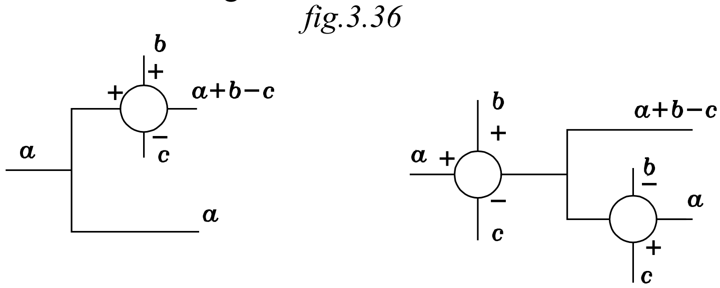
Si possono presentare i seguenti spostamenti equivalenti.

*fig.3.35*




Spostando un sommatore da monte a valle di una diramazione occorre aggiungere in ogni ramo lo stesso sommatore aventi in ingresso le stesse variabili.

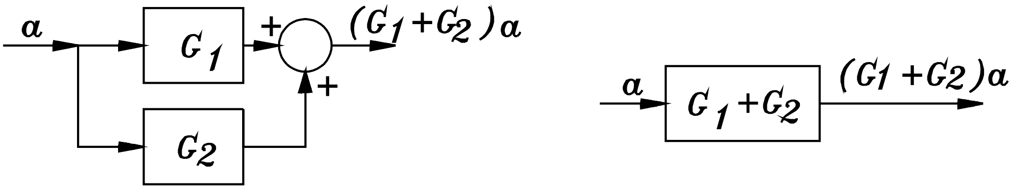
*fig.3.36*




Spostando un sommatore da valle a monte di una diramazione, occorre aggiungere su tutti gli altri rami il sommatore spostato con le variabili aventi segno opposto.

**Blocchi in parallelo**

*fig.3.37*




Più blocchi in parallelo sono equivalenti ad un unico blocco con funzione di trasferta la somma delle funzioni *a·(G1+G2).*

## 3.7 SISTEMI DI CONTROLLO A CATENA CHIUSA

Come si è detto un sistema di controllo a catena aperta non dà la sicurezza che l'attuatore esegua con precisione il comando impartito.

Così, in un comando di posizione, non vi è la sicurezza che la slitta comandata raggiunga la posizione imposta dal comando; basta pensare all'effetto dell'inerzia per capire che la posizione finale può essere diversa da quella imposta. Inoltre, un qualsiasi disturbo nella catena di controllo può falsare il valore di uscita voluto, senza possibilità di correzione.

*In un sistema di regolazione o di controllo automatico, per ottenere un efficace asservimento ad un valore controllato meglio si presta un sistema a catena chiusa.*

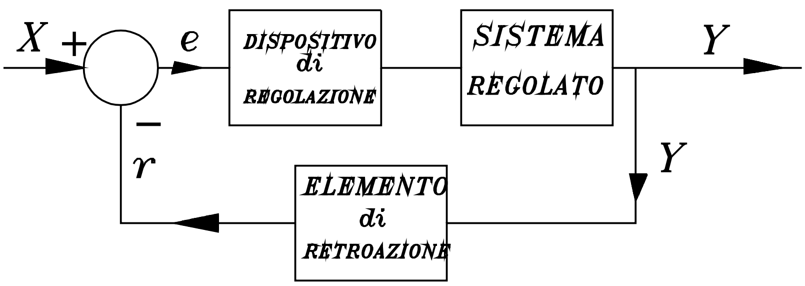
### 3.7.1 RETROAZIONE

Nello schema di figura è riportato nella forma più semplice e nei suoi elementi essenziali lo schema a blocchi di un sistema di controllo a catena chiusa.

Si debba controllare la variabile di uscita *Y.*

In ingresso viene inviato il segnale di riferimento *X ( pensiamo al comando di posizionamento di una slitta).*

*fig.3.38*




Supponiamo che l'uscita *Y* si trovi ad un valore diverso da quello voluto , corrispondente al segnale di ingresso *X*; allora il blocco di retroazione *"H"* elabora un segnale di ritorno*(o di retroazione) r* della stessa natura fisica del segnale di ingresso *X* .

Il segnale *r* di retroazione nel blocco sommatore viene sottratto al segnale di ingresso *X*, ottenendo il segnale di errore e:

$$\boxed{e = X - r} \quad (3.7.1)$$

Il segnale *r* risulta uguale a *X* solamente quando l'uscita *Y* raggiunge il valore voluto dal comando; in tal caso l'errore *"e"* è nullo.

Se il valore dell'uscita *Y* non è uguale al valore voluto dal commando, allora il segnale di retroazione *"r"* è diverso da *X,* e si ha un segnale di errore *"e"* diverso da zero.

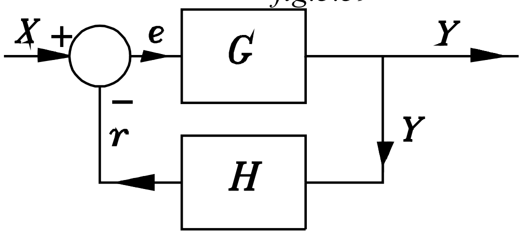
È proprio il segnale di errore *"e"* che viene inviato al dispositivo di regolazione o di controllo che comanda il sistema regolato che muterà il valore Y corrispondente all'obbiettivo prefissato.

Un trasduttore rileva tale segnale e lo rinvia all'elemento di retroazione che elabora il segnale *r* che va a sottrarsi al segnale di ingresso *X* ottenendo il nuovo segnale di errore, e così via...

Il valore di *Y* varia fino a che non raggiunge il valore voluto; in tal caso $r=X$ , l'errore $e=X-r$ è nullo e non si ha più il segnale sul dispositivo di regolazione o di controllo e la variazione dell'uscita *Y*.

**Parametri**

*fig.3.39*




Viene indicata con *G* la funzione di trasferta della catena di azione diretta *(senza anello di ritorno, a catena aperta),* comprendente tutti gli elementi del dispositivo di regolazione diretta e del sistema regolato. Essa è data dal rapporto:

$$\boxed{G = \frac{Y}{e}} \qquad (3.7.2)$$

Si definisce funzione di trasferta *H* dell'elemento di retroazione il rapporto:

$$\boxed{H = \frac{r}{Y}} \qquad (3.7.3)$$

La funzione di trasferta totale della catena chiusa *W* è data dal rapporto:

$$\boxed{W = \frac{Y}{X}} \qquad (3.7.4)$$

Si può ricavare la *W* in funzione di *G,H*

Dalla (3.7.2) si ha:

$Y = G \cdot e$ ma dalla (3.7.1) $e = X - r$ sostituendo:

$$Y = G \cdot (X - r) = G \cdot X - G \cdot r$$

dalla (3.7.3) si ha: $r = H \cdot Y$ quindi:

$$Y = G \cdot X - GH \cdot Y; \qquad Y + GH \cdot Y = G \cdot X; \qquad Y \cdot (1 + GH) = GX$$

$$\boxed{Y = \frac{G \cdot X}{1 + GH}} \qquad (3.3.7.5)$$

Si ricava così la funzione di trasferta a catena chiusa data dalla *(4)*:

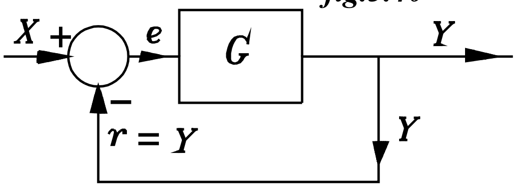
$$\boxed{W = \frac{G}{1 + H \cdot G}} \qquad (3.7.6)$$

Per *H=1* si ha la retroazione unitaria, per la quale il segnale di uscita **Y** viene riportato direttamente in ingresso.

$$r = H \cdot Y \qquad r = Y$$

Questo può avvenire se il segnale di uscita prelevato dal trasduttore è della stessa natura del segnale di ingresso ***X***

***fig.3.40***




Considerando un asservimento di posizione di una slitta, il segnale *Y* di uscita rappresenta la posizione della slitta stessa; tale segnale viene riportato in ingresso e comparato con il segnale di comando *X* di posizione . Se la posizione ottenuta *Y* non è uguale a quella comandata *X* allora viene elaborato il segnale di errore $e=Y-X$ che fa muovere la slitta fino a che l'errore risulta nullo , e ciò si ha quando la posizione *X* comandata è uguale a quella ottenuta *Y* in uscita.

In effetti, occorre fin da ora rimarcare che con il semplice sistema di retroazione descritto, nel quale vi è una semplice proporzionalità tra uscita *Y* e ingresso *X*: "$Y = W \cdot X$", non si può ottenere a regime una risposta con errore nullo.

Infatti, considerando ancora un controllo di posizione di una slitta, la coppia motrice che comanda il motore è proporzionale all'errore *"e"* . Ebbene , quando l'errore si sta annullando si annulla anche la coppia motrice del motore che muove la slitta: alla fine detta coppia motrice ha valori così piccoli da non essere sufficiente a vincere l'attrito e la slitta si fermerà prima che risulti *"e=0"*

La funzione di trasferta totale nel caso di retroazione unitaria, quando risulta $H=1$, assume l'espressione semplice

$$\boxed{W = \frac{G}{1+G}} \qquad (3.7.7)$$

E risulta:

$$Y = W \cdot X$$

$$\boxed{Y = \frac{G}{1+G} \cdot X} \qquad (3.7.8)$$

Dove *G* è la funzione di trasferta a catena aperta, dipendente da un fattore di amplificazione del segnale di errore: deve essere sicuramente $G>1$

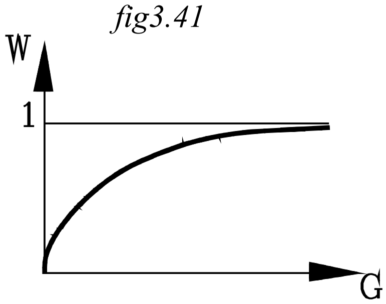
Dalla espressione *(7)* si nota che, da quanto detto risulta W<1 e quindi sarà:

$$Y = W \cdot X < X$$

Il segnale di uscita *Y* ha valore inferiore a quello di ingresso *X*; vi sarà quindi nel controllo proporzionale un errore:

$$e = X - Y > 0$$

*fig3.41*




Studiando analiticamente l'espressione della funzione unitaria di trasferta a catena chiusa (3.7.7), il valore della ***W***, parte da zero per ***G=0***, aumenta all'aumentare di *G* e tende asintoticamente ad uno per *G* tendente all'infinito:

$$\lim_{G\to\infty} \frac{G}{1+G} = 1$$

Corrispondentemente l'errore *"e"* diminuisce e tende a zero per $G \to \infty$.

Infatti, considerando sempre per semplicità la catena di controllo unitaria, l'espressione dell'errore *"e"* :

$$e = X - Y$$

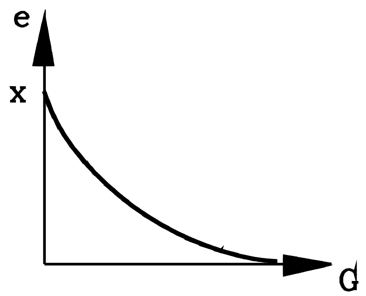
Risulta anche:

$$e = \frac{Y}{G} \quad \text{sostituendo la (3.7.9)}$$

$$e = \frac{1}{G}\cdot\frac{G}{1+G}\cdot X$$

*fig.3.42*

$$x = \frac{X}{1+G} \qquad (3.7.10)$$




Per $G=0$ in uscita la risposta è nulla: Y=0 e l'errore è massimo pari al segnale di ingresso: $e=X$

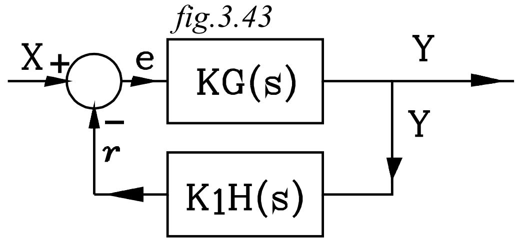
All'aumentare si $G$ diminuisce l'errore fino a tendere asintoticamente a zero per $G$ tendente all'infinito:

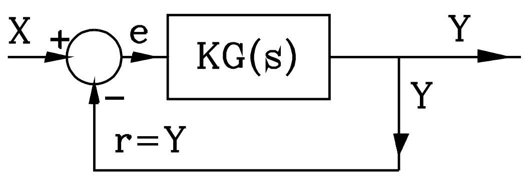
$$\lim_{G\to\infty} \frac{X}{1+G} = 0$$

### 3.7.2 OPERATORI COMPLESSI DI UNA CATENA CHIUSA

Le espressioni precedenti tra i segnali di una catena chiusa assumono un carattere di generalità, valevole cioè per qualsiasi tipo di segnale, quando si passa dal campo reale a quello complesso, ottenuto con la trasformata di Laplace.

*fig.3.43*




Il segnale di ingresso $x(t)$ si può trasformare nella $X(s)$ con le trasformate di Laplace. Le operazioni matematiche che introduce ogni blocco della catena vengono effettuate nel campo complesso attraverso le regole della trasformata. Si ottiene come uscita un segnale $Y(s)$ nel campo complesso.

Si possono definire, nel campo complesso tutti i parametri introdotti nel campo reale.

*Errore:*

$$E(s) = X(s) - R(s) \quad (3.7.11)$$

### 3.7.2.1 Funzione di trasferta a catena aperta

La funzione di trasferta a catena aperta conviene indicarla con l'espressione *KG(s)*. È data dal rapporto

$$KG(s) = \frac{Y(s)}{E(s)} \quad (3.7.12)$$

Dove *Y(s)* è la trasformata del segnale di uscita *y(t)*, ed *E(s)* è la trasformata del segnale di errore e(t) all'ingresso della catena aperta.

*KG(s)* è la funzione di trasferta a catena aperta nella quale, *K* è la costante moltiplicativa, non dipendente dalla variabile *s,* mentre *G(s)* è la parte funzione della variabile *s*.

### 3.7.2.2 Funzione di trasferta a catena chiusa

La funzione di trasferta a catena chiusa si scriverà nella forma:

$$W(s) = \frac{KG(s)}{1 + K_1H(s) \cdot KG(s)} \quad (3.7.13)$$

Dove $K_1H(s)$ è la funzione di trasferta del ramo di retroazione.

$$K_1H(s) = \frac{R(s)}{Y(s)}$$

Nel caso di retroazione unitaria si ha:

$$W(s) = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)} \quad (3.7.14)$$

L'introduzione delle trasformate di Laplace permettono di semplificare le espressioni che legano le uscite agli ingressi della catena di controllo, le quali sono regolate da equazioni integro differenziali.

Considerando sempre, per semplicità , le condizioni iniziali nulle, effettuare una derivata corrisponde nel campo complesso alla moltiplicazione per il numero complesso "$s = \alpha + j\omega$"; mentre un integrale corrisponde alla divisione per "$s = \alpha + j\omega$"

Ne viene che la relazione tra ingressi e uscite, nel campo complesso, operando con le trasformate di Laplace, si riducono ad espressioni razionali, ove compare la divisione tra due polinomi nella variabile *s*

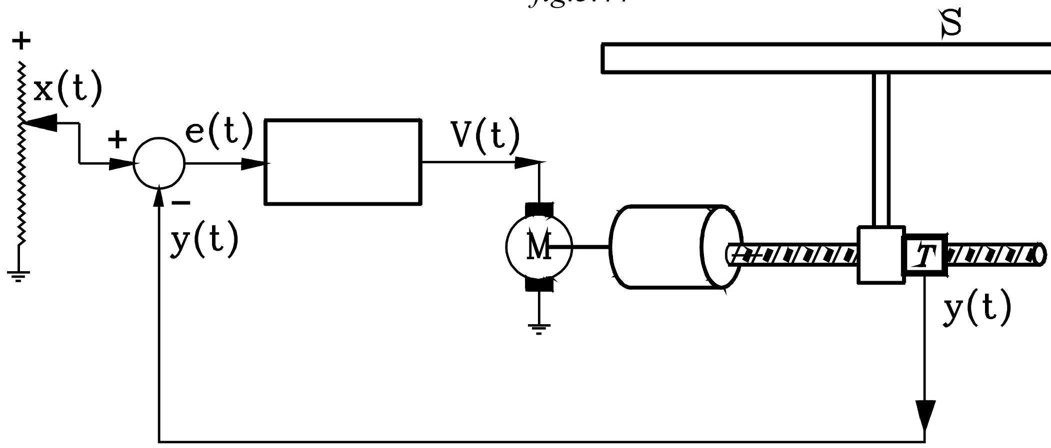
Per capire il metodo si prende come esempio il controllo di posizione a catena chiusa, con retroazione unitaria, di una slitta comandata da un motore *M*.

1. Si determinerà prima l'equazione differenziale che regola la catena aperta e, applicando le trasformate di Laplace, si troverà la relativa funzione di trasferta.

2. Successivamente si determinerà l'equazione differenziale che regola la catena chiusa e, trasformandola, la relativa funzione di trasferta.

### 3.7.3 FUNZIONI DI TRASFERTA DELLA CATENA APERTA KG(s) E DELLA CATENA CHIUSA W(s) DI UN CONTROLLO PROPORZIONALE DI POSIZIONE

*fig.3.44*




Nella figura *fig.3.44* è rappresentato schematicamente il sistema di controllo di posizione semplificato.
La slitta L è comandata dal motore *M* con eccitazione costante *(Φ=cost)* e controllo sulla tensione di ingresso *V(t)* proporzionale al segnale di errore *e(t)*

$$v(t) = A \cdot e(t) \quad (3.7.15)$$

Dove *A* è il guadagno dell'amplificatore.
Sia *y(t)* il segnale di uscitala rilevato, dovuto alla rotazione dell'albero motore, che determina la posizione della slitta.
Un trasduttore rileva il segnale di posizione angolare *y(t)* lo trasforma in segnale di tensione e lo riporta nel blocco sommatore, il quale lo sottrae al segnale di ingresso *x(t)*.
Il segnale di ingresso *x(t)* è il segnale del comando di posizione e quindi di riferimento.

La slitta viene mossa dal motore fino a che il segnale di errore e(t) non risulta nullo e la posizione della slitta risulta uguale a quella comandata.

I segnali *x(t)* e *y(t)* che vengono confrontati nel comparatore sono di tensione ma rappresentano proporzionalmente, rispettivamente: la rotazione *x(t)* comandata e che si desidera ottenere *(segnale di ingresso)* , la rotazione *y(t)* effettivamente ottenuta nel movimento in atto *(segnale di uscita)*.

Riferendoci alle rotazioni occorre effettuare l'equilibrio dei momenti.
Si Consideri prima la catena aperta che va dal segnale di errore *e(t)* nell'ingresso dell'amplificatore fino all'uscita *y(t)* dal trasduttore.

Nella figura *fig.3.45* è schematizzato il motore. Il controllo è effettuato sulla alimentazione con la tensione V variabile, mentre si suppone il flusso $\Phi$ di eccitazione costante.

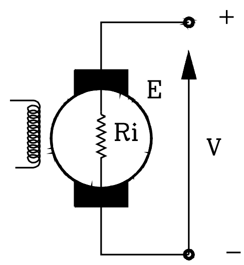
$$\Phi = Cost.$$

Si indichi con $R_i$ la resistenza interna e con *I* l'intensità di corrente che entra nel morsetto positivo. *Nella semplificazione non si considera l'effetto della induttanza di cui in realtà occorre tener conto.*

*Occorre qui anticipare le espressioni che regolano i motori in continua che saranno oggetto di studio in un apposito capitolo, nel quale si tratteranno più specificatamente gli attuatori.*

### 3.7.3.1 Forza contro elettro motrice E

***fig.3.45***




Nella rotazione del rotore si induce in esso una *f.e.m* il cui valore medio $E$ è proporzionale al flusso $\Phi$ e alla velocità angolare $\omega$

$$E = h_1 \cdot \Phi\, \omega \qquad (3.7.16)$$

### 3.7.3.1 Equilibrio della maglia

Si consideri la maglia costituita dai morsetti di ingresso sui, quali è applicata la tensione di controllo $V$, la forza contro elettro motrice $E$, la resistenza interna $R_i$. Per l'equilibrio, la tensione di ingresso $V$ è equilibrata dalla *f.c.e.m* $E$ e dalla caduta di potenziale interno "$R_i \cdot I$".

$$V = E + R_i \cdot I \qquad (3.7.17)$$

### 3.7.3.2 Potenza- coppia motrice

La potenza elettrica che viene trasformata in lavoro meccanico è data dal prodotto "$E \cdot I$" e non da "V·I", in quanto una parte di energia viene persa nella resistenza interna $R_i$. Risulta:

$$P = E \cdot I \qquad (3.7.18)$$

Tale potenza viene trasformata in potenza meccanica, la quale è data dal prodotto della coppia motrice $C_m$ per la velocità angolare $\omega$ .

$$P_m = C_m \cdot \omega$$

Uguagliando le due espressioni della potenza si ottiene:

$$C_m \cdot \omega = E \cdot I$$

Sostituendo la (3.7.16) si ha:

$$C_m \cdot \omega = h_1 \cdot \Phi\, \omega \cdot I$$

$$\boxed{C_m = h_1 \cdot \Phi \cdot I} \qquad (3.7.19)$$

Si hanno così le seguenti espressioni fondamentali riferite al motore in corrente continua:

$$\boxed{\mathit{Equazioni\ fondamentali\ del\ motore} \begin{cases} E = h_1 \cdot \Phi\, \omega & (3.7.16)\ \text{forza contro elettro - motrice} \\ V = E + R_i \cdot I & (3.7.17)\ \text{Equilibrio della maglia} \\ C_m = h_1 \cdot \Phi \cdot I & (3.7.19)\ \text{Coppia motrice} \end{cases}}$$

### 3.7.3.3 Caratteristica meccanica del motore

Dalle tre espressioni caratteristiche si può ricavare la caratteristica meccanica del motore che dà l'espressione della coppia rispetto alla velocità angolare $\omega$ *(o rispetto al n° di giri/min).*

Dalla (3.7.17) si ricava la corrente *I:*

$$I = \frac{V - E}{R_i} \quad \text{sostituendo la (3.7.16) si ha:} \quad I = \frac{V - h_1 \cdot \Phi\,\omega}{R_i} \quad ; \quad I = \frac{V}{R_i} - \frac{h_1 \cdot \Phi\,\omega}{R_i}$$

Sostituendo la *I* nella (3.7.19) si ottiene:

$$C_m = \frac{h_1 \Phi}{R_i} \cdot V - \frac{h_1^2 \cdot \Phi^2}{R_i} \cdot \omega$$

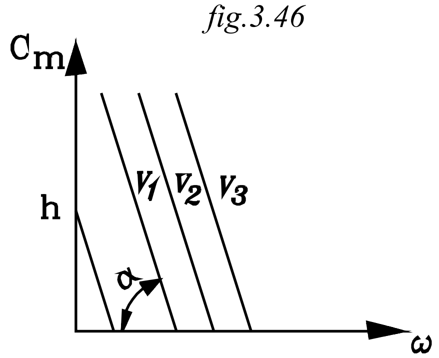
Si pone:

$$\frac{h_1 \cdot \Phi}{R_i} = h \qquad \frac{h_1^2 \cdot \Phi^2}{R_i} = f_1$$

La coppia motrice $C_m$ che dà la caratteristica meccanica del motore ha l'espressione:

$$\boxed{C_m = h \cdot V - f_1 \cdot \omega} \quad (3.7.20)$$

*fig.3.46*




L'equazione (3.7.20) nel piano ($\omega$,$C_m$) è una retta.

Il motore in corrente continua con eccitazione separata ha una caratteristica discendente: la coppia diminuisce all'aumentare della velocità angolare secondo il coefficiente $f_1$ che rappresenta il coefficiente angolare *(in valore assoluto)* della retta caratteristica.

Il motore è autofrenante, nel senso che all'aumentare di $\omega$ diminuisce la coppia motrice secondo il coefficiente $f_1$.

Il parametro *"h"* dà la coppia motrice per $\omega=0$ e $V=1$; *"h"* è la coppia di spunto per la tensione unitaria di 1 volt posta sui morsetti di alimentazione del motore.

*Quanto è stato esposto finora è solamente la premessa per rammentare la provenienza della espressione* (3.7.20) *della coppia motrice del motore in continua con eccitazione separata. Per sviluppare l'argomento riguardante la determinazione della funzione di trasferta, che ci si è proposti di trattare, si può partire direttamente dalla espressione della coppia motrice, supposta nota la sua provenienza.*

### 3.7.3.4 Equazione differenziale della catena aperta

Si riprenda quindi in esame la catena aperta di controllo che va dall'ingresso del blocco amplificatore *A*, nel quale entra il segnale di errore *e,* al trasduttore *T*, ove perviene il segnale di uscita *y.*

Per determinare l'equazione differenziale caratteristica che regola il funzionamento della catena aperta occorre effettuare l'equilibrio delle coppie:

*Coppia motrice =Coppia dovuta all'inerzia + Coppia dovuta all'attrito*

La coppia motrice è data dalla (3.7.20):

$$C_m = h \cdot V - f_1 \cdot \omega \qquad (3.7.20)$$

Dove $V$ è la tensione in ingresso del motore. Questo è proporzionale al segnale di errore *"e"*.

$$V = A \cdot e$$

Sostituendo nella (3.62) si ha:

$$C_m = hA \cdot e - f_1 \cdot \omega$$

Si pone:

$$\boxed{K = hA} \qquad (3.7.21)$$

Per cui la coppia motrice in funzione dell'errore è espressa da:

$$C_m = K \cdot e - f_1 \cdot \omega \qquad (3.7.22)$$

La velocità angolare $\omega$ è la derivata prima dell'angolo di rotazione $y$ rispetto al tempo:

$$\omega = \frac{dy}{dt} = y'$$ la (3.7.22) si scriverà:

$$\boxed{C_m = K \cdot e - f_1 \cdot y'} \qquad (3.7.23)$$

Tale coppia sarà equilibrata dalla somma della coppia dovuta all'inerzia $(J \cdot y'')$ più quella dovuta all'attrito $(f_2 \cdot y')$. Dovrà essere cioè:

$$C_m = J \cdot y'' + f_2 \cdot y' \qquad (3.7.24)$$

Ponendo a confronto la (3.7.23) con la (3.7.24) si ha:

$$J \cdot y'' + f_2 \cdot y' = K \cdot e - f_1 \cdot y'$$

Dove:

$y$ Angolo di rotazione dell'albero motore.
$y'$ Velocità angolare dell'albero motore.
$y''$ Accelerazione angolare dell'albero motore.
J Momento di inerzia equivalente sull'albero del motore.
$f_1$ Pendenza della caratteristica discendente *(caratteristica frenante)*.
$f_2$ Coefficiente di attrito viscoso
$K = h \cdot A$ Costante di proporzionalità globale del blocco a catena aperta che va dall'uscita del comparatore al trasduttore di posizione.

Nell'equazione differenziale scritta si trasporti al primo membro il termine riferentesi all'attrito, proporzionale alla derivata prima:

$$J \cdot y'' + f_2 \cdot y' + f_1 \cdot y' = K \cdot e$$

$$J \cdot y'' + (f_1 + f_2) \cdot y' = K \cdot e$$

Si noti che il coefficiente della derivata prima è la somma di due fattori frenanti e rispettivamente: $f_1$ si riferisce alla pendenza della caratteristica discendente della coppia motrice e $f_2$ si riferisce all'attrito viscoso.

Si indica con F il coefficiente della derivata prima che dà l'effetto frenante totale, somma dei due coefficienti $f_1$ , $f_2$ :

$$\boxed{F = f_1 + f_2} \quad (3.7.25)$$

L'equazione differenziale che regola la catena aperta si presenta nella forma:

$$\boxed{J \cdot y'' + F \cdot y' = K \cdot e} \quad (3.7.26)$$

### 3.7.3.5 Funzione di trasferta della catena aperta

Determinata l'equazione differenziale che lega il segnale di uscita a quello dell'errore , si applicano le regole delle trasformate di Laplace *(con valori iniziali nulli)*, con le quali l'equazione differenziale si tramuta in una forma polinomia nella variabile complessa **s**; in questa può porsi in evidenza la trasformata del segnale di uscita *Y(s)* e determinare, poi, il suo rapporto con la trasformata del segnale di ingresso *E(s)*.

Si applichino quindi alla (3.68) le regole della trasformata di Laplace:

$$Js^2 \cdot Y(s) + Fs \cdot Y(s) = K \cdot E(s) \quad (3.7.27)$$

Dove:

Y(s) È la trasformata dell'angolo di rotazione y(t) sull'albero motore, che verrà tramutato in segnale elettrico nel trasduttore.

E(s) Trasformata del segnale di errore e(t), differenza tra il segnale di uscita di tensione, proveniente dal trasduttore e il segnale di riferimento x(t) : e(t)=x(t)-y(t).

Dalla (3.7.27) si ricava la Y(s):

$$Y(s) = \frac{K \cdot E(s)}{J \cdot s^2 + F \cdot s}$$ da cui si ricava il rapporto:

$$KG(s) = \frac{Y(s)}{E(s)}$$ sostituendo si ha:

$$KG(s) = \frac{K}{J \cdot s^2 + F \cdot s} \quad (3.7.28)$$

### 3.7.3.6 Equazione differenziale della catena chiusa

Si deve ora determinare l'equazione differenziale, che lega il segnale di uscita *y(t)* al segnale di riferimento *x(t)* di ingresso alla catena chiusa, a monte del comparatore.

Per ottenere l'equazione differenziale della catena chiusa, basta sostituire nell'equazione di equilibrio dei momenti (3.7.26) già determinata al posto dell'errore *e* la sua espressione rispetto ai segnali di ingresso *x(t)* e uscita *y(t)*.

Considerata quindi l'equazione di equilibrio dei momenti sull'albero del motore:

$$J \cdot y'' + F \cdot y' = K \cdot e \quad (3.7.26)$$

si sostituisce al segnale di errore *"e"* l'espressione:

$$e = x - y$$

*(Per brevità si sottintende che e,x,y sono funzioni del tempo).*

Sostituendo nella (3.7.264) si ha:

$$J \cdot y'' + F \cdot y' = K \cdot (x - y) \qquad J \cdot y'' + F \cdot y' = K \cdot x - K \cdot y$$

$$J \cdot y'' + F \cdot y' + K \cdot y = K \cdot x \quad (3.7.29)$$

Si ottiene così un'equazione differenziale del II ordine, dello stesso tipo di quello studiato nel sistema schematizzato con una massa rotante inerziale trattenuta da una molla.

Occorre qui porre in evidenza che nell'equazione differenziale (3.7.29):

*J* È il momento d'inerzia equivalente di tutto il meccanismo riportato sull'albero motore.

*F* È il coefficiente di frenatura, che tiene conto sia dell'attrito viscoso, che della pendenza negativa della caratteristica discendente della coppia motrice del motore.

*K* Tale coefficiente, che nel modello con molla rappresentava la costante elastica di questa, nel sistema effettivo di retroazione è il prodotto $K = h \cdot A$ proporzionale all'amplificazione del blocco a catena aperta. Il parametro *K*, inoltre si presenta come il coefficiente della uscita *y(t)* che dal II membro viene riportato al primo. Il termine *"K·y(t)" rappresenta la parte di retroazione da cui dipende la risposta: più è elevato il valore di K e più rapidamente l'errore tende a zero: si ha una risposta più pronta (così come più pronta è la risposta nel modello con molla all'aumentare della costante elastica K).*

Come si è già operato nei sistemi del II ordine l'equazione differenziale può essere riportata nella forma canonica con l'introduzione dei parametri caratteristici:

Dividendo per J si ha:

$$y'' + \frac{F}{J} \cdot y' + \frac{K}{J} \cdot y = \frac{K}{J} \cdot x$$

Si pone come al solito:

$$\boxed{\alpha = \frac{F}{2J}} \quad \boxed{\omega_0^2 = \frac{k}{J}} \quad \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{J}}} \quad \boxed{\sigma = \frac{\alpha}{\omega_0}} \quad \boxed{\sigma = \frac{F}{2\sqrt{kJ}}}$$

Per cui

$$\frac{F}{J} = 2\alpha \qquad \alpha = \sigma\omega_0 \qquad \frac{F}{J} = 2\sigma\omega_0$$

Si ottiene:

$$y'' + 2\sigma\omega_0 \cdot y' + \omega_0^2 \cdot y = \omega_0^2 \cdot x(t) \quad (3.7.30)$$

Dove

$\sigma$ È il fattore di smorzamento.

$\omega_0$ È la pulsazione armonica per $\sigma = 0$.

#### 3.7.3.6 Funzione di trasferta della catena chiusa

Per determinare la funzione di trasferta a catena chiusa basta applicare all'equazione differenziale (3.7.30), che lega il segnale di uscita *y(t)* al segnale di ingresso *x(t)*, le regole della trasformata di Laplace. Supposto sempre che nelle condizioni iniziali il sistema sia a riposo: $y(0^+) = 0 \;\; y'(0^+) = 0$ si ottiene:

$$s^2 \cdot Y(s) + 2\sigma\omega_0 s \cdot Y(s) + \omega_0^2 \cdot Y(s) = \omega_0^2 \cdot X(s)$$

Si raccoglie Y(s)

$$Y(s) \cdot \left(s^2 + 2\sigma\omega_0 s + \omega_0^2\right) = \omega_0^2 \cdot X(s) \qquad \text{da cui}$$

$$Y(s) = \frac{\omega_0^2}{\left(s^2 + 2\sigma\omega_0 s + \omega_0^2\right)} \cdot X(s)$$

Si otterrà così la funzione di trasferta a catena chiusa:

$$W(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

$$W(s) = \frac{\omega_0^2}{\left(s^2 + 2\sigma\omega_0 \cdot s + \omega_0^2\right)} \quad (3.7.31)$$

#### 3.7.3.7 Applicazione degli operatori complessi

L'espressione della funzione di trasferta a catena chiusa si poteva anche ricavare dalla funzione di trasferta a catena aperta applicando la relazione che le lega:

$$W(s) = \frac{KG(s)}{1 + K_1 H(s) \cdot KG(s)} \qquad \text{e per } K_1 H(s) = 1$$

$$W(s) = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)} \quad (3.7.32)$$

Dove KG(s) è data dalla (3.7.28).

$$KG(s) = \frac{K}{J \cdot s^2 + F \cdot s} \quad (3.7.28)$$

Questa si può normalizzare dividendo numeratore e denominatore per il momento d'inerzia *J:*

$$KG(s) = \frac{\frac{K}{J}}{s^2 + \frac{F}{J} \cdot s} \quad \text{ricordando che:} \quad \begin{cases} \frac{F}{J} = 2\sigma\omega_0 \\ \frac{k}{J} = \omega_0^2 \end{cases} \quad \text{si ottiene}$$

$$KG(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\sigma\omega_0 \cdot s} \qquad (3.7.33)$$

Sostituendo la (3.7.33) nella (3.7.32) si ottiene la funzione di trasferta a catena chiusa. Infatti:

$$W(s) = \frac{\frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\sigma\omega_0 \cdot s}}{1 + \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\sigma\omega_0 \cdot s}} \quad ; \quad W(s) = \frac{\frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\sigma\omega_0 \cdot s}}{\frac{s^2 + 2\sigma\omega_0 \cdot s + \omega_0^2}{s^2 + 2\sigma\omega_0 \cdot s}} \quad \text{semplificando si ha:}$$

$$W(s) = \frac{\omega_0^2}{\left(s^2 + 2\sigma\omega_0 \cdot s + \omega_0^2\right)} \qquad (3.7.34)$$

L'espressione della funzione di trasferta di un sistema di controreazione unitario proporzionale *P*, di qualunque natura esso sia, ma del tipo del II ordine considerato, si può sempre ricondurre nella forma canonica:

$$W(s) = \frac{KG(s)}{1 + \cdot KG(s)} = \frac{\omega_0^2}{\left(s^2 + 2\sigma\omega_0 \cdot s + \omega_0^2\right)}$$

Si noti che il denominatore di *W(s)*, ossia *1+KG(s)*, è proprio l'espressione dell'equazione caratteristica associata all'equazione differenziale lineare che lega l'uscita y(t) all'ingresso x(t) della catena chiusa.

| |
|---|
| Più in generale il denominatore $1 + K_1 H(s) \cdot KG(s)$ della funzione di trasferta W(s) a catena chiusa è l'espressione dell'equazione differenziale caratteristica associata all'equazione differenziale che la regola. |

I sistemi nei quali la relazione tra ingresso e uscita è regolata da una equazione differenziale lineare a coefficienti costanti viene detto *sistema lineare*.

Come è noto dalle radici dell'equazione caratteristica dipende il tipo di transitorio.

| |
|---|
| *Per determinare il tipo di transitorio, occorre studiare le soluzioni della espressione* $1+K_1H(s)\cdot KG(s)$ *uguagliata a zero..* |

$$1 + K_1 H(s) \cdot KG(s) = 0 \qquad (3.7.35)$$

In generale in un sistema di ordine *n* il denominatore "$1 + K_1 H(s) \cdot KG(s)$ " è espresso da un polinomio di ordine *n* nella variabile *s*. Per lo studio del transitorio, si uguaglia a zero il polinomio e si determinano le soluzioni dell'equazione ottenuta.

**Il transitorio dipende dal tipo di soluzione**

1- Se la soluzione $s=a$ è reale, allora questa, determina il contributo al transitorio del tipo $A \cdot e^{at}$, che sarà smorzato se $a$ è negativo; sarà invece accentuato e si amplifica nel tempo se $a$ è positivo.

2- Se vi è una soluzione complessa esiste anche la coniugata.
Dette soluzioni saranno del tipo $s_{1,2} = \alpha \pm \omega t$ e danno un contributo al transitorio del tipo $e^{\alpha t} \cdot sen(\omega t + \beta)$. Detto contributo sarà oscillatorio smorzato se la parte reale $\alpha$ è negativa; sarà invece oscillatorio accentuato se la parte reale $\alpha$ è positiva.

### 3.7.4 Funzione di trasferta in regime sinusoidale

La catena di controllo può essere studiata in regime sinusoidale.

Supponiamo di introdurre all'ingresso della catena aperta un funzione sinusoidale del tipo:

$$e(t) = A \cdot sen(\omega t)$$

In uscita la risposta forzata sarà del tipo sinusoidale:

$$y(t) = M \cdot sen(\omega t + \beta)$$

della stessa frequenza del segnale di ingresso ma di ampiezza e fase dipendente dalla catena.

Nel campo complesso la relazione che lega la funzione di uscita $\dot{Y}$ a quella di ingresso $\dot{E}$, in regime sinusoidale, si ottiene sostituendo nella funzione di trasferta la variabile jω al posto della variabile complessa "s".

La funzione di trasferta a catena aperta in regime sinusoidale si pone nella forma:

$$KG(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{E(j\omega)} \quad (3.7.36)$$

Dove $KG(j\omega)$ viene denominata funzione di trasferimento in regime sinusoidale , e si ottiene dalla $KG(s)$ sostituendo al posto della s la variabile $j\omega$.

Dalla funzione di trasferta in regime sinusoidale si ricava facilmente la risposta particolare, che si ottiene in uscita ponendo all'ingresso un segnale sinusoidale. Infatti, determinata la $KG(j\omega)$ , si trasforma la e(t) sinusoidale nel corrispondente numero complesso $E(j\omega)$; si moltiplica $KG(j\omega)$ per E(jω) , ottenendo la risposta Y(jω) in numero complesso.

$$Y(j\omega) = KG(j\omega) \cdot E(j\omega)$$

Il modulo di $Y(j\omega)$ è il valore max della risposta sinusoidale, mentre l'anomalia darà la fase della risposta stessa.

La funzione di trasferta $KG(j\omega)$, nel campo complesso è rappresentata da un vettore avente modulo $|KG(j\omega)|$ e fase $\beta(j\omega)$ dipendenti dalla variabile $\omega$: al variare di questa varia il modulo e la fase del vettore.

Nelle applicazione che seguiranno si deve studiare come varia il vettore $KG(j\omega)$ in funzione di $\omega$, nell'intervallo che va da zero a infinito e tracciare la curva, descritta dall'estremità del vettore variabile.

Si consideri così la funzione di trasferta della catena aperta del sistema di controllo di posizione precedentemente considerato.

$$KG(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\sigma\omega_0 \cdot s}$$

Si sostituisce la variabile $j\omega$ al posto della *"s"* si ottiene:

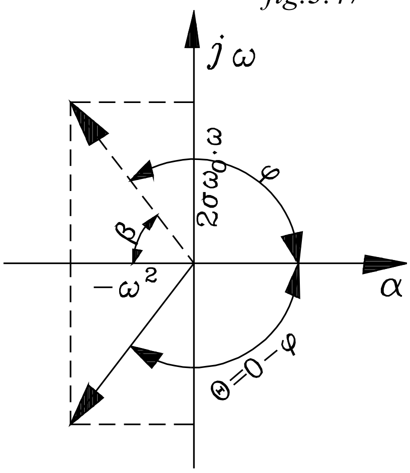
$$KG(j\omega) = \frac{\omega_0^2}{-\omega^2 + j2\sigma\omega_0 \cdot \omega} \qquad (3.7.37)$$

Occorre determinare al variare di ω il modulo e la fase del vettore $KG(j\omega)$, disegnare i relativi vettori e tracciare la curva che congiunge le loro estremità.

Il modulo del vettore $KG(j\omega)$ è:

$$|KG(j\omega)| = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{\omega^4 + 4(\sigma\omega_0)^2 \cdot \omega^2}}$$

*fig.3.47*




Per determinare la fase del vettore $KG(j\omega)$, si noti che il numero complesso posto al denominatore della (3.7.37) *(* $-\omega^2 + j2\sigma\omega_0 \cdot \omega$ ) è rappresentato da un vettore posto nel *II* quadrante *(parte reale negativa e coefficiente immaginario positivo).*

Si può determinare il valore assoluto dell'angolo β di figura:

$$tg\beta = \frac{2\sigma\omega_0 \cdot \omega}{\omega^2} \quad \text{da cui}$$

$$\beta = arctg\left(\frac{2\sigma\omega_0}{\omega}\right)$$

L'angolo $\varphi$ del denominatore misurato rispetto all'asse di riferimento è:

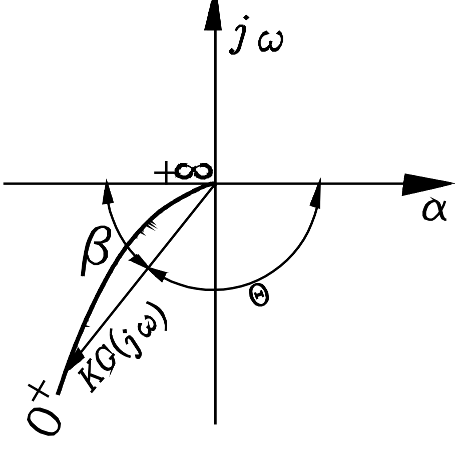
$$\varphi = 180° - \beta$$

Finalmente l'angolo Θ del rapporto (3.7.37) è dato dalla differenza tra l'angolo di fase del numeratore e quello del denominatore. L'angolo di fase del numeratore è zero *(numero reale)* per cui l'angolo di fase del vettore $KG(j\omega)$ risulta:

$$\theta = 0 - \varphi = -180 + \beta$$

Il vettore viene a trovarsi, per un determinato $\omega$ positivo, nel *III* quadrante.

*fig.3.48*




Si vuole ora tracciare la curva che congiunge le estremità dei vettori $KG(j\omega)$ , che assumono posizioni diverse al variare di $\omega$ da zero a $+\infty$ . Per far ciò si determinano per ogni $\omega$ il modulo e la fase del vettore, che può essere così tracciato.

Come si può osservare dalla tabellina, il vettore $KG(j\omega)$ ha un modulo che tende ad infinito con fase -90°, per $\omega \to 0^+$; all'aumentare di $\omega$, il valore del modulo diminuisce e la fase $\theta$ si porta verso -180°. Quando $\omega \rightarrow \infty$ il valore del modulo del vettore tende a zero e la fase tende a -180° $\theta \rightarrow -180°$.

| valore di ω | Modulo del vettore $KG(j\omega)$ | Angolo β | fase del $\Theta = -180° + \beta$ del vettore $KG(j\omega)$ |
|---|---|---|---|
| per $\omega \rightarrow 0^+$ | $\lvert KG(j\omega)\rvert = \frac{\omega_0^2}{0^+} \rightarrow \infty$ | $\beta = arctg \frac{2\sigma\omega_0}{0^+}$ $\beta \rightarrow 90°$ | $\Theta = -90°$ |
| valore generico di ω | $\frac{\omega_0^2}{\sqrt{\omega^4 + 4(\sigma\omega_0)^2 \cdot \omega^2}}$ | $\beta = arctg\left(\frac{2\omega_0}{\omega}\right)$ | $-180° < \Theta < -90°$ |
| per $\omega \rightarrow \infty$ | $\lvert KG(j\omega)\rvert = \frac{\omega_0^2}{\infty} \rightarrow 0$ | $\beta = arctg \frac{2\sigma\omega_0}{\infty}$ $\beta \rightarrow 0$ | $\Theta \rightarrow -180°$ |

## 3.8 STABILITÀ ASSOLUTA

Condizione necessaria affinché un sistema di controllo abbia stabilità assoluta è che il transitorio si smorzi nel tempo, e ciò può avvenire con o senza oscillazioni..

Per quanto detto sopra, affinché il transitorio si smorzi nel tempo, occorre che le soluzioni dell'equazione caratteristica della catena chiusa ( data da $1+K_1H\cdot(s)KG(s)$ ) abbiano, tutte, parti reali con segno negativo.

Condizione necessaria affinché un sistema di controllo a catena chiusa abbia stabilità assoluta è che l'espressione ($1+K_1H(s)\cdot KG(s)$), posta al denominatore della funzione di trasferta W(s), uguagliata a zero no dia tutte soluzioni (dette zeri) con parte reale positiva.

Occorre notare che l'espressione $1+K_1H(s)\cdot KG(s)$ si trova al denominatore della funzione di trasferta *W(s);* per cui gli zeri di $1+K_1H(s)\cdot KG(s)$ rappresentano i poli della funzione di trasferta *W(s).*

Per la stabilità assoluta occorre che tutti i poli della funzione di trasferta W(s) a catena chiusa no abbiano parte reale positiva.

La stabilità assoluta non è però una condizione sufficiente per il buon funzionamento di un sistema di controllo . Occorre che il transitorio non solo si estingua nel tempo ma che esso avvenga nel tempo più piccolo possibile, senza apprezzabili oscillazioni.

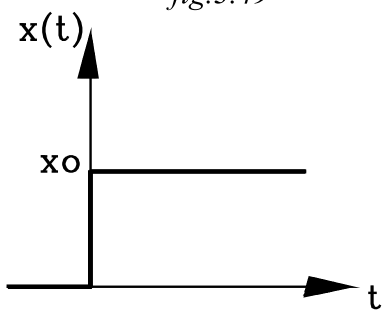
Per il buon funzionamento del sistema, occorre considerare la stabilità relativa, che dipende non solo dal segno delle parti reali dei poli della funzione di trasferimento ma anche dal valore numerico di esse.

All'aumentare del valore numerico delle parti reali negative si ha maggiore smorzamento ma un ritardo nella risposta.

Si consideri la risposta ad un gradino di posizione del sistema del *II* ordine preso come esempio, regolato dall'equazione differenziale:

$$J \cdot y'' + F \cdot y' + K \cdot y = K \cdot x(t)$$

*fig.3.49*




Il gradino è espresso dall'equazione: per t>0 $x(t)= xo$

Se l'ingresso è un gradino, la soluzione particolare sarà pur essa un gradino del tipo:

$$y(t)=h$$

Sostituendo nell'equazione differenziale si ha:

$$0 + 0 + K \cdot h = K \cdot x_0$$ da cui:
$$h = x_0$$

La soluzione particolare è quindi:

$$y = x_0$$

La risposta forzata è pari alla posizione *xo* prefissata

Come è ormai noto il transitorio dell'equazione differenziale del II ordine è in generale del tipo:

$$y(t) = A \cdot e^{z_1 \cdot t} + B \cdot e^{z_2 \cdot t}$$

La risposta completa è :

$$y(t) = x_0 + A \cdot e^{z_1 \cdot t} + B \cdot e^{z_2 \cdot t}$$

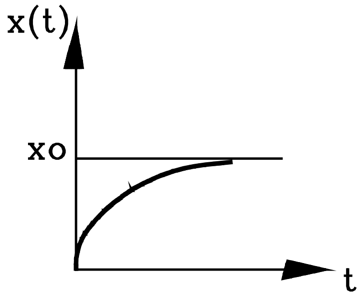
Dove $z_1$ ,$z_2$ sono le radici dell'equazione caratteristica associata all'equazione differenziale e corrispondono ai poli della funzione di trasferta *W(s)* della catena chiusa.
Come è già stato precedentemente esposto, il transitorio è diverso a seconda del tipo di dette soluzioni, le quali dipendono dal fattore di smorzamento $\sigma$

$$\sigma = \frac{\alpha}{\omega_0} \text{ nel caso in esame } \sigma = \frac{F}{2\sqrt{J \cdot K}}$$

Si possono distinguono diversi casi:

**1- Per $\sigma$>1 Risposta sovrasmorzata**

*fig.3.50*

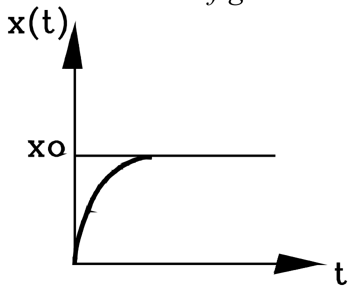



Le due soluzioni $z_1$, $z_2$ sono reali e negative: la risposta al gradino è sovrasmorzata.
Questo caso si presenta quando il coefficiente F di frenatura prevale sull'inerzia *J* e sul coefficiente *K* dovuto al guadagno della catena aperta.
In questo caso si raggiunge il valore prefissato $x_o$ in un tempo piuttosto lungo. Viene così scongiurata l'instaurarsi di una oscillazione ma la risposta è lenta: è elevato il tempo di assestamento.

Si definisce tempo di assestamento il tempo che intercorre tra l'inizio del transitorio e l'istante nel quale la risposta al gradino si discosta del 5% dal valore prefissato.

**2- Per σ=1 Risposta smorzata critica**

*fig.3.51*




Le due soluzioni sono reali negative e coincidenti.

$$z_1 = z_2 = z = -\omega_0$$

Il transitorio e del tipo:

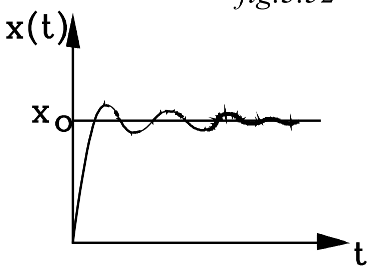
$$y(t) = (A + B \cdot t) \cdot e^{-\omega_0 \cdot t}$$

Si ottiene quando il coefficiente $F$ di frenatura raggiunge il minimo valore possibile, oltre il quale il transitorio diviene oscillatorio.

Rispetto al caso precedente diminuisce il tempo di assestamento.

**3- Per σ<1 Risposta oscillatorio smorzata**

*fig.3.52*




Le due soluzioni sono complesse e coniugate.

$$z_{1,2} = -\sigma\omega_0 \pm j\omega_0 \cdot \sqrt{1-\sigma^2} = -\alpha \pm j\omega$$

Come precedentemente esposto, la risposta è oscillatoria smorzata del tipo

$$y(t) = M \cdot e^{-\alpha \cdot t} \cdot sen(\omega t + \beta)$$

Nella quale sia l'esponente $-\alpha$ che la pulsazione $\omega$ dipendono dal fattore di smorzamento.

Il segnale di risposta al gradino, all'inizio del transitorio sorpassa il valore comandato *xo* e, smorzandosi, oscilla attorno al valore di regime *xo.*

Si ha all'inizio una sovraoscillazione, oltre il segnale di regime che viene denominato *overshoot.*

*L'overshoot è dato in % dal rapporto tra il massimo scostamento dal valore di regime e tale valore.*

La risposta quindi dipende dal valore relativo del coefficiente di smorzamento.

**- Per σ=0 smorzamento nullo**

Il fattore di smorzamento $\sigma$ risulterebbe nullo quando $F=0$ . Ciò è praticamente impossibile, in quanto, anche facendo l'ipotesi di attrito nullo (con $f_1=0$), il motore presenta sempre una caratteristica discendente con $f_2 \neq 0$. Ci si avvicina a $\sigma=0$ con momenti di inerzia $J$ e costante $K$ molto elevati.

Nel caso del tutto teorico di $\sigma=0$ la risposta risulta oscillatoria armonica non smorzata.

Si hanno due soluzioni complesse coniugate:

$z_{1,2} = \pm j\omega_0$ senza la parte reale $\alpha = 0$

Il transitorio non si smorza nel tempo:

$$y(t) = M \cdot sen(\omega_0 \cdot t + \beta)$$

Partendo dal valore $\sigma=0$ **,** con il quale si ha oscillazione con smorzamento nullo, la risposta oscillatoria sarà tanto più smorzata quanto maggiore risulta $\sigma$**;** fino al valore limite $\sigma=1$**,** partendo dal quale, e all'aumentare di esso, il transitorio risulta smorzato senza oscillazioni.

Per valori di σ compresi tra 1÷0,7 la risposta smorzata ha una oscillazione poco percettibile e in tale campo di valori l'overshoot è praticamente trascurabile.

Il tempo di assestamento, a parità di $\sigma$ , diminuisce all'aumentare di $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{J}}$ e quindi all'aumentare di *K* rispetto all'inerzia *J***.** Fissato poi un $\omega_0$ (e quindi una inerzia e una amplificazione del blocco a catena aperta), il tempo di assestamento ha un minimo per:

$$\sigma = 0.7$$

È conveniente quindi scegliere i parametri in modo che il fattore di smorzamento sia vicino e superiore a 0,7.

Per valori di σ inferiori a *0.7* si ha un tratto inizialmente ripido, ma oscillazioni non accettabili; per valori di $\sigma>1$**,** non si hanno oscillazioni, ma la risposta è lenta: aumenta il tempo di assestamento.

### 3.8.1 CRITERI DI STABILITÀ ASSOLUTA

*In un sistema di controllo a catena chiusa, si è constatato che il denominatore della sua funzione di trasferta, uguagliato a zero, rappresenta l'equazione caratteristica dell'equazione differenziale lineare.*

Dalle soluzioni dell'equazione caratteristica dipende il tipo di transitorio.

Per la stabilità assoluta è sufficiente verificare che il transitorio sia smorzato; occorre quindi che le soluzioni dell'equazione caratteristica siano tutte con parte reale negativa.

Consideriamo per semplicità la controreazione unitaria.

La funzione di trasferta è:

$$W(s) = \frac{KG(s)}{1+KG(s)} \quad (3.8.1)$$

Come si è osservato nel precedente capitolo, il denominatore *1+KG(s)* uguagliato a zero esprime l'equazione caratteristica dell'equazione differenziale omogenea del transitorio della catena chiusa.

Dalle soluzioni dell'equazione:

$$1+KG(s) =0 \quad (3.8.2)$$

dipende il tipo di transitorio.

Se le soluzioni dell'equazione *1+KG(s) =0* sono tutte con parti reali negative, il transitorio è smorzato.

Ne viene che:

Affinché il sistema a catena chiusa abbia stabilità assoluta è necessario che uguagliando a zero il denominatore *1+KG(s)* della funzione di trasferta a catena chiusa, l'equazione polinomia che si ottiene nella variabile *s* non abbia soluzioni con parte reale positiva.

Per verificare la stabilità assoluta, quindi, occorrerebbe:

- Trovare la funzione di trasferta a catena chiusa.
- Uguagliare a zero il denominatore *1+KG(s) (se è una controreazione unitaria)*, oppure, in generale *1+H(s)·KG(s).*
- Determinare le soluzione dell'equazione *1+KG(s) =0.*
- Analizzare i segni della soluzioni: non vi debbono essere soluzioni con parti reali positive.

Questa procedura diretta di analisi di stabilità, basata sulla verifica dei segni delle soluzioni dell'equazione caratteristica associata alla equazione differenziale che regola il sistema a catena chiusa, risulta a volte molto oneroso e di difficile soluzione.

Vi sono dei criteri di stabilità assoluta basati sull'analisi di alcune proprietà della funzione di trasferta a catena aperta.

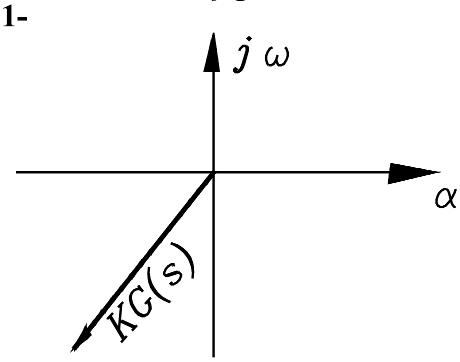
## CRITERI DI STABILITÀ DI NYQUIST

Per la stabilità assoluta di un sistema a catena chiusa occorre, come si è detto, che il denominatore *1+KG(s) ( oppure, in generale, 1+H(s)·KG(s))* della funzione di trasferta *W(s)* non abbia zeri con parte reale positiva.
Tali zeri infatti sono gli esponenziali del transitorio che deve risultare smorzato.

Occorre effettuare le seguenti osservazioni:

*fig.3.53*

**1-**

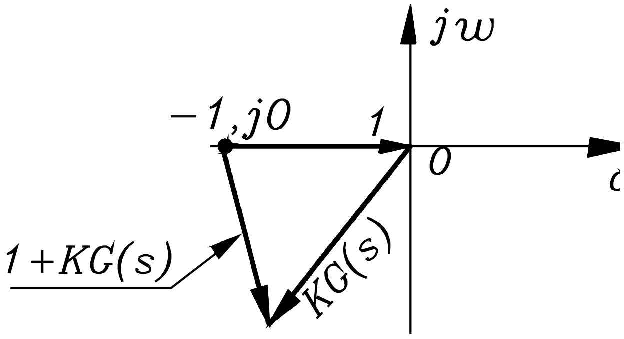



La funzione *KG(s)* è un numero complesso, funzione della variabile complessa $s=\alpha+j\omega$.

Nel piano complesso *KG(s)* è un vettore con modulo e fase funzioni della variabile complessa *s*.

**2-**

*fig.3.54*




*1+KG(s)* è il vettore che congiunge il punto *-1,0* con l'estremità del vettore *KG(s)*. Infatti il vettore che congiunge il punto *(-1,0)* con l'origine *O* è il vettore ***1***. Di seguito ad esso si presenta il vettore *KG(s)*.

La congiungente l'origine del primo vettore *"1"* con l'estremità del secondo vettore *KG(s)* da la somma vettoriale *1+KG(s.*

**3-**

Occorre osservare che funzione *1+KG(s)* si può porre nella forma di rapporto tra due polinomi.

Infatti la funzione di trasferta a catena aperta *KG(s),* come si è già riscontrato nell'esempio, si presenta come rapporto tra due polinomi nella variabile *s*

Indichiamo in generale tale rapporto con l'espressione:

$$KG(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \quad (3.8.3)$$

Dove *N(s)* è il numeratore della funzione di trasferta a catena aperta e *D(s)* il denominatore della stessa.

In tal modo, la funzione *1+KG(s)*, denominatore della funzione di trasferta a catena chiusa *W(s)*, si può esprimere rispetto al numeratore *N(s)* e denominatore *D(s)* della funzione di trasferta a catena aperta *KG(s)*.

$$1 + KG(s) = 1 + \frac{N(s)}{D(s)} \qquad \text{da cui} \qquad 1 + KG(s) = \frac{D(s) + N(s)}{D(s)}$$

Il numeratore è la somma dei due polinomi. Si pone:

$$\boxed{D(s) + N(s) = P_n(s)} \quad (3.8.4)$$

Per cui risulta:

$$1 + KG(s) = \frac{P_n(s)}{D(s)} \quad (3.8.5)$$

Notare che *D(s)* è il denominatore della funzione di trasferta a catena aperta

Il numeratore $P_n(s)$ e il denominatore $D(s)$ della (3.8.5) sono dei polinomi nella variabile complessa $s=\alpha+j\omega$

Supponiamo che il polinomio $P_n(s)$ sia di grado *n e* $D(s)$ di grado *m*.

$$1 + KG(s) = \frac{P_n(s)}{D(s)} = \frac{a_n \cdot s^n + a_{n-1} \cdot s^{n-1} + \cdots + a_2 \cdot s^2 + a_1 \cdot s + a_0}{b_m \cdot s^m + b_{m-1} \cdot s^{m-1} + \cdots + b_2 \cdot s^2 + b_1 \cdot s + b_0} \quad (3.8.6)$$

I polinomi $P_n(s)$ , $D(s)$ si possono scomporre in prodotto di binomi nella variabile *s*, nei quali i termini noti sono le radici delle equazioni che si ottengono uguagliando a zero detti polinomi.

$$1 + KG(s) = \frac{P_n(s)}{D(s)} = \frac{a_n \cdot (s - z_1) \cdot (s - z_2) \cdot \ldots\ldots\ldots (s - z_{n-2}) \cdot (s - z_{n-1}) \cdot (s - z_n)}{b_m \cdot (s - p_1) \cdot (s - p_2) \cdot \ldots\ldots\ldots (s - p_{m-2}) \cdot (s - p_{m-1}) \cdot (s - p_m)} \quad (3.8.6)$$

Dove $z_1, z_2 \ldots$sono le radici dell'equazione $P_n = 0$ dette *zeri della funzione 1+KG(s)*; mentre $p_1, p_2 \ldots$sono le radici dell'equazione $D(s) = 0$

Risulta in generale $a_n > 0$ , $b_m > 0$ provenendo da parametri fisici positivi.

Come si è detto, per verificare la stabilità assoluta occorre analizzare il segno della parte reale delle radici dell'equazione ottenuta uguagliando a zero il denominatore *1+KG(s)* della funzione *W(s)* di trasferta a catena chiusa:

$$1+KG(s)=0$$

Dove per la (3.8.3) si è posto:

$$KG(s)=\frac{N(s)}{D(s)}$$

Mentre risulta per la (3.8.5)

$$1+KG(s)=\frac{P_n(s)}{D(s)} \quad (3.8.5)$$

Occorre osservare che il denominatore $D(s)$ della funzione di trasferta a catena aperta *KG(s)* non compare nella funzione a catena chiusa *W(s)*, in quanto viene semplificato nella sostituzione:

$$W(s)=\frac{KG(s)}{1+KG(s)}=\frac{\dfrac{N(s)}{D(s)}}{\dfrac{P_n(s)}{D(s)}}$$

$$W(s)=\frac{KG(s)}{1+KG(s)}=\frac{N(s)}{P_n(s)} \quad (3.8.6)$$

Quindi il polinomio $P_n(s)$ coincide con il denominatore della funzione di trasferta a catena chiusa. Per la stabilità assoluta occorre analizzare le soluzioni di questo polinomio nella variabile *s* uguagliato a zero.

Si deve analizzare:

$$1+KG(s)=P_n(s)=0 \quad (3.8.7)$$

E quindi l'espressione:

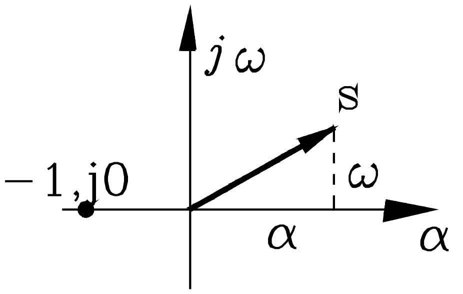
$$\boxed{P_n(s)=0} \quad (3.8.8)$$

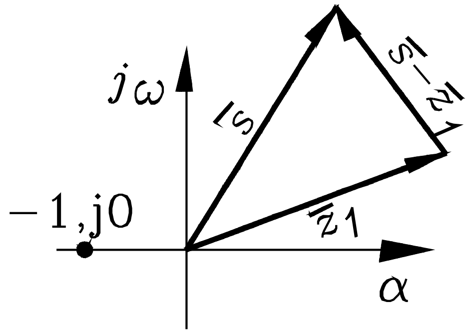
Per la stabilità assoluta occorre verificare che il polinomio $P_n(s)$, numeratore della funzione *1+KG(s)* non ammetta radici con parte reale positiva.

Il denominatore *D(s)* della funzione *1+KG(s) (coincidente con quello della funzione di trasferta a catena aperta KG(s))*, non compare nella funzione *W(s)* (si semplifica) e quindi può avere soluzioni con parte reale positiva senza influire sulla stabilità del sistema.

**4-**

*fig.3.55*

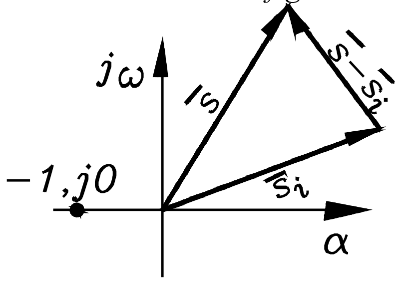



Occorre osservare *(fig.3.55)* che $s=\alpha+j\omega$ è un numero complesso, Così anche le radici $z_1,z_2$... $p_1,p_2$... sono numeri complessi, rappresentabili con vettori.

Le espressioni $(s-z_1),(s-z_2),(s-z_3)....;\ (s-p_1),(s-p_2),(s-p_3)...$ nel piano complesso rappresentano delle differenze vettoriali tra il vettore $\bar{s}$ e lo zero $\bar{z}_i$ o il polo $\bar{p}_i$. Nella figura è riportato per esempio la differenza $\bar{s}-\bar{z}_1$

*fig.3.56*

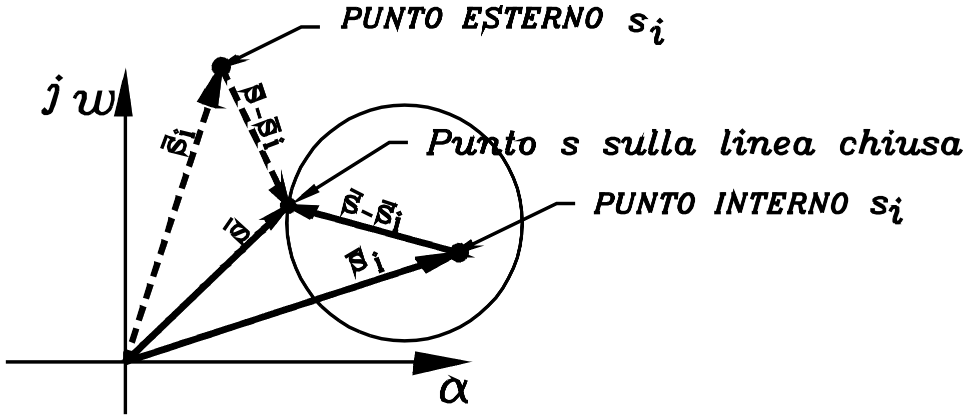



Si Indichi con $s_i$ una radice generica che può essere o al numeratore *(uno zero)* o al denominatore *(un polo)* di 1+KG(s) .

La differenza $s$-$s_i$ è rappresentata nel piano complesso dal vettore che congiunge l'estremità del vettore $s_i$ con l'estremità del vettore $s$ *(con origine nell'estremità di $s_i$)*

**5-**

*fig.3.57*




Si consideri un percorso chiuso e si faccia variare l'estremità del vettore $s$ su tale tracciato, in modo da effettuare un giro completo in senso orario.

Si osservi che nel percorre la linea l'estremità del vettore $s$ segue il percorso chiuso, mentre l'estremità di $s_i$ rimane fermo essendo un valore fisso *(è uno zero o un polo).*

Nel percorrere la linea chiusa il vettore differenza $\bar{s}-\bar{s}_i$ si comporta diversamente a seconda che l'estremità della soluzione $\bar{s}_i$ *(zero o polo)* si trovi nella superficie interna o esterna al percorso chiuso.

Si può notare che:

Quando si fa variare $s$ in un percorso chiuso, in modo da effettuare un giro completo in senso orario, il vettore differenza $s$-$s_i$ effettua una rotazione completa di 360 in senso orario se l'estremità di $s_i$ è nell'interno del percorso chiuso.

Se l'estremità di $s_i$ è al di fuori del percorso chiuso, quando $s$ varia di un giro completo in senso orario su detto percorso, il vettore $s$-$s_i$ non effettua rotazioni complete ma solo oscillazioni attorno all'estremità del vettore $s_i$.

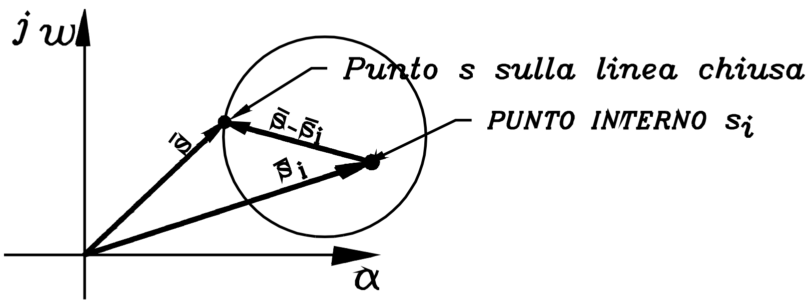
**6-**

La differenza $s$-$s_i$ è un fattore che si può trovare o al numeratore o al denominatore di *1+KG(s)*.

Occorre Ricordare che il prodotto di numeri complessi è un numero complesso che ha per modulo il prodotto dei moduli e *per anomalia la somma delle anomalie (angoli)*.
La divisione di numeri complessi da un numero complesso avente per modulo la divisione dei moduli e per anomalia la *differenza delle anomalie*.

Si Faccia variare $s$ su una circonferenza effettuando una intera rotazione. Si supponga che la radice $s_i$ si trovi entro la circonferenza.

*fig.3.58*




Se il fattore $s$-$s_i$ si trova al numeratore di *1+KG(s)* allora, detto fattore determinerà una rotazione di 360° in senso orario del vettore rappresentativo di *1+ KG(s)*; viceversa se $s$-$s_i$ è al denominatore di *1+KG(s)* allora il vettore rappresentativo di questo ruoterà di 360° in senso antiorario.

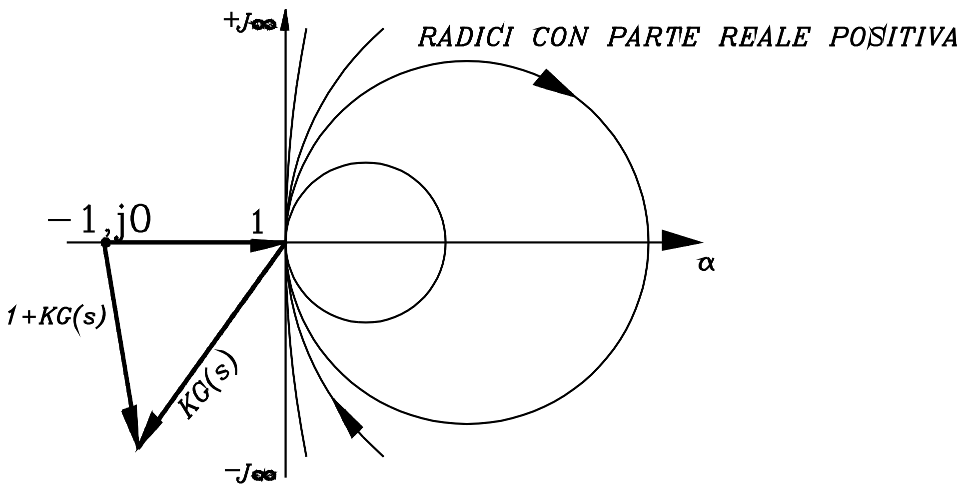
Quando si fa variare la $s$ su un percorso chiuso per un giro completo, allora il vettore *1+KG(s)* effettuerà tante rotazioni d*i 360°* in senso orario quanti sono gli zeri esistenti entro il percorso chiuso; ed effettuerà tante rotazioni di 360° in senso antiorario quanti sono i poli compresi nel percorso chiuso.

**7-**

Per la stabilità occorre escludere che vi siano zeri di *1+KG(s)* con parte reale positiva.

Si consideri come percorso chiuso un cerchio passante per l'origine con centro sul semiasse positivo dei numeri reali. Allontanando il centro dall'origine, detto cerchio diverrà via via più grande, fino a comprendere tutto il semipiano complesso rappresentante i numeri con parte reale positiva.

*fig.3.59*




Al limite, quando il centro va verso l'infinito e il raggio $\rightarrow \infty$ , il cerchio, esaminato nei suoi punti in senso orario, coincide con l'asse degli immaginari percorso da $-j\infty$ a $\rightarrow +j\infty$

*Entro tale cerchio ampliato sono compresi tutti i numeri con parte reale positiva.*

| |
|---|
| Se vi sono fattori $s$-$s_i$ (al numeratore o al denominatore) di *1+KG(s)*, con $s_i$ avente parte reale positiva, allora , quando *s* varia da *-j∞* a *+j∞,* il vettore *1+KG(s)* effettuerà *tante rotazioni in senso orario quanti sono gli zeri con parte reale positiva e tante rotazioni in senso antiorario quanti sono i poli con parte reale positiva.* |

Con le precedenti osservazioni si possono enunciare i principi di stabilità di NYQUIST.

Si Consideri il denominatore della funzione di trasferta a catena chiusa *W(s)* dato dalla espressione *1+KG(s).*

$$1+KG(s)=\frac{P_n(s)}{D(s)}=\frac{a_n\cdot(s-z_1)\cdot(s-z_2)\cdot\ldots\ldots\cdot(s-z_{n-2})\cdot(s-z_{n-1})\cdot(s-z_n)}{b_m\cdot(s-p_1)\cdot(s-p_2)\cdot\ldots\ldots\cdot(s-p_{m-2})\cdot(s-p_{m-1})\cdot(s-p_m)} \qquad (3.8.9)$$

Dove $D(s)$ è il denominatore della funzione di trasferta a catena aperta *KG(s)* e $P_n(s)$ (*rimanendo al denominatore della W(s))* coincide con l'equazione caratteristica dell'equazione differenziale omogenea che determina il transitorio.

Per la stabilità assoluta occorre escludere che vi siano zeri $z_1, z_2 \ldots$ con parte reale positiva, rappresentando questi le soluzioni dell'equazione differenziale omogenea che dà la risposta transitoria.

| |
|---|
| Con i criteri di stabilità assoluta di Nyquist, l'esistenza o meno di zeri $z_1, z_2 \ldots$ con parte reale positiva dell'equazione caratteristica $P_n(s)$ viene verificata studiando la curva, tracciata dall'estremità del vettore *1+KG(s)* spiccato dal punto *(-1,j0)*. |

Si possono presentare diversi casi:

### 8.3.1.1 Il denominatore D(s) non ha radici con parte reale positiva

Si supponga che il denominatore *D(s)* della funzione di trasferta a catena aperta *KG(s),* (coincidente con quello della *1+KG(s)*, non abbia soluzioni $p_1, p_2 ...$ con parte reale positiva *(quindi al difuori della circonferenza di raggio infinito considerata)*.

Allora , quando *s* varia da $-j\infty$ a $+j\infty$ **,** le radici del denominatore della espressione *1+KG(s)* non determinano alcuna rotazione completa del suo vettore rappresentativo, essendo dette radici al difuori del percorso chiuso.

Se al numeratore di *1+KG(s)* non vi sono zeri con parte reale positiva *(al di fuori dello stesso cerchio con raggio infinito considerato)*, tali zeri non determineranno alcuna rotazione del vettore *1+KG(s)* quando s varia da $-j\infty$ a $+j\infty$ .

*Si può così enunciare un primo criterio di stabilità:*

| |
|---|
| Se il denominatore *D(s)* della funzione di trasferta a catena aperta *KG(s)* non ha soluzioni con parte reale positiva, allora il sistema a catena chiusa risulta stabile se il vettore *1+KG(s)*, spiccato dal punto *(-1,j0)*, non effettua rotazioni intere di *360°* attorno ad esso, quando **s** varia da $-j\infty$ a $+j\infty$ . |

### 8.3.1.4 Il denominatore D(s) ammette radici con parte reale positiva

Si supponga ora che il denominatore *D(s)* abbia soluzioni con parte reale positiva.

Le soluzioni $p_1, p_2 ...$di *D(s)=0* non fanno parte delle radici che determinano il transitorio, in quanto *D(s)* , semplificandosi nella sostituzione (3.8.6), non compare nella *W(s)*: al denominatore di essa rimane $P_n(s)$ che è l'equazione caratteristica dell'equazione differenziale omogenea che dà il transitorio.

$$W(s) = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)} = \frac{N(s)}{P_n(s)} \quad (3.8.6)$$

Quindi *D(s)* può ammettere soluzioni con parte reale positiva senza ingenerare instabilità
Occorre sempre escludere che il numeratore $P_n(s)$ di *1+KG(s)* abbia zeri $z_1, z_2 ...$ con parte reale positiva.

Si supponga che il denominatore *D(s)* abbia $N_d$ radici con parte reale positiva . Allora quando s varia da $-j\infty$ a$+j\infty$ le $N_d$ radici del denominatore determinano $N_d$ rotazioni intere di 360° in senso orario di esso.
Ma *D(s)* si trova al denominatore della espressione *1+KG(s*), ne viene che le $N_d$ radici di *D(s)* con parte reale positiva determinano $N_d$ rotazioni intere di *360°* in senso antiorario del vettore *1+KG(s)*.

Se il numeratore di *1+KG(s)* non ha radici con parte reale positiva, tali radici non determinano alcuna rotazione di *1+KG(s)*.

| |
|---|
| In tal caso, ne viene che, mentre s varia da $-j\infty$ a $+j\infty$ il vettore ruoterà in senso antiorario di tanti giri interi quante sono le radici con parte reale positiva del denominatore *D(s)*. |

*Si può così enunciare un altro criterio di stabilità:*

Un sistema a catena chiusa è stabile se facendo variare la s da $-j\infty$ a $+j\infty$ il vettore $1+KG(s)$ effettua tante rotazioni intere di $360°$ in senso antiorario quante sono le radici con parte reale positiva di $D(s)=0$ , cioè quanti sono i poli della funzione di trasferta KG(s) con parte reale positiva.

## Concludendo:

**Un sistema a catena chiusa è stabile se:**

1°
Il denominatore *D(s)* della funzione di trasferta *KG(s)* a catena aperta, uguagliato a zero, non ammette soluzioni con parte reale positiva e il vettore $1+KG(s)$ non effettua rotazioni intere attorno al punto -1,0 quando s varia da $-j\infty$ a $+j\infty$

2°
Variando s da $-j\infty$ a $+j\infty$ il vettore $1+KG(s)$ effettua attorno al punto -1,0 tante rotazioni intere in senso antiorario quanti sono i poli della funzione di trasferta a catena aperta KG(s) con parte reale positiva

In ogni altro caso li sistema di controllo a catena chiusa è instabile.

Infatti ammettiamo che per s che varia da $-j\infty$a $+j\infty$ il vettore 1+KG(s) effettui una o più rotazioni di 360° in senso orario attorno al punto -1,0; ciò indica che vi è un numero di zeri con parte reale positiva di 1+KG(s) maggiore di quello dei poli *al denominatore*, con parte reale positiva.

Se, variando s da $-j\infty$ a $+j\infty$, il numero degli zeri con parte reale positiva di $1+KG(s)$ risulta minore di quello dei poli con parte reale positiva, in tal caso si ha un n° di rotazioni risultanti in senso antiorario, che non corrispondono al n° di poli con parte reale positiva.

Questi ultimi due casi indicano che esistono zeri con parte reale positiva e quindi il sistema risulta instabile.

❄

Il caso più usuale che si presenta nelle applicazioni pratiche è il primo, nel quale il denominatore *D(s)* della funzione di trasferta a catena aperta, uguagliato a zero, non presenta soluzioni con parti reali negative. Ammettendo tali ipotesi, il metodo per la verifica della stabilità secondo il metodo di Nyquist si può suddividere nelle seguenti operazioni.

### 1- Determinare la funzione di trasferta a catena aperta

Occorre determinare dei vari blocchi, che compongono la catena aperta, le relazioni che legano le uscite agli ingressi; trasformare dette relazioni nel campo complesso, attraverso le trasformate di Laplace e determinare il rapporto tra la trasformata del segnale *Y(s)* uscente dall'ultimo blocco della catena aperta e il primo segnale di ingresso *E(s)* rappresentante l'errore.

Le relazioni dipendono dal tipo di blocco. Così in un blocco nel quale si ha l'amplificazione A di un segnale di ingresso, l'uscita è data dal segnale di ingresso per l'amplificazione A: la relazione è l'operazione di moltiplicazione. In un blocco motore la relazione tra segnale di ingresso e uscita si ottiene dall'equilibrio dei momenti. In un blocco costituito da un circuito elettrico la relazione che lega per esempio un ingresso di tensione all'uscita considerata come corrente che circola nella maglia è data dall'equilibrio delle tensioni di maglia...

Alla fine si ottiene il rapporto:

$$KG(s) = \frac{Y(s)}{E(s)}$$

**2- Si sostituisce jω alla variabile s**

Nella funzione di trasferta a catena aperta *KG(s)* si sostituisce $j\omega$ al posto della variabile *s*.
Si supponga che l'espressione della funzione di trasferta sia del tipo:

$$KG(s) = \frac{K}{s\cdot\left(s^2 + a\cdot s + b\right)}$$

Risulterà:

$$KG(j\omega) = \frac{K}{j\omega\cdot\left(-\omega^2 + ja\cdot\omega + b\right)} \qquad (a)$$

Così per esempio se è:

$$KG(s) = \frac{K}{s\cdot\left(s\tau_1 + 1\right)\left(s\tau_2 + 1\right)}$$

Risulterà:

$$KG(j\omega) = \frac{K}{j\omega\cdot\left(j\omega\tau_1 + 1\right)\left(j\omega\tau_2 + 1\right)} \qquad (b)$$

**3- Si disegna nel piano complesso la curva tracciata dall'estremità del vettore KG(s) per s che varia da** $-j\infty \div +j\infty$

Si disegnano nel piano complesso i diversi vettori *KG(s)* , che si ottengono facendo variare s tra $-j\infty \div +j\infty$ . Per far ciò, in pratica, si sostituisce la variabile *s* con $j\omega$ , si considera come variano, nel piano complesso, i vettori *KG(jω)* in funzione di $\omega$ nell'intervallo che va da $0^+$ a $+j\infty$ e, alla fine, si traccia la curva che congiunge le estremità di essi.

L'altro ramo della curva che si ottiene facendo variare $\omega$ da $0^-$ a $-j\infty$ è simmetrica rispetto all'asse reale.

Per disegnare un vettore corrispondente ad una determinata $\omega$ basta calcolare il modulo e l'anomalia (angolo) del vettore. Ad esempio:

$$\text{Per la funzione di trasferta } (a)\ \begin{cases} Modulo \quad \left|KG(j\omega)\right| = \dfrac{K}{\omega\cdot\sqrt{\left(b-\omega_0^2\right)^2 + (\omega a)^2}} \\[2ex] Angolo \qquad \varphi = -90^\circ - arctg\left(\dfrac{a\omega}{b-\omega_0^2}\right) \end{cases}$$

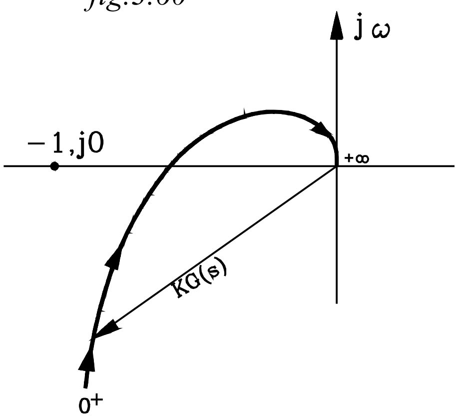
$$\text{Per la funzione di trasferta } (b)\ \begin{cases} Modulo \quad \left|KG(j\omega)\right| = \dfrac{K}{\omega\cdot\sqrt{\left(\omega\tau_1\right)^2 + 1}\cdot\sqrt{\left(\omega\tau_2\right)^2 + 1}} \\[2ex] Angolo \qquad \varphi = -90^\circ - arctg\left(\omega\tau_1\right) - arctg\left(\omega\tau_2\right) \end{cases}$$

Occorre quindi studiare le due funzioni $\left|KG(j\omega)\right|$ e $\varphi$ per ω che varia da $-j\infty \div +j\infty$ , disegnare i vettori e tracciare la curva che congiunge le loro estremità.

In pratica si traccia la curva per $\omega$ che varia da $0^+ \div +\infty$ e si disegna quella simmetrica rispetto all'asse reale, ottenendo il tratto che va da $0^- \div -\infty$

Si consideri come esempio la curva relativa alla funzione di trasferta *(b),* nella quale il polinomio denominatore è scomposto in prodotto di binomi e si studi l'andamento della curva.

*fig.3.60*




Per $\omega \to 0^+$ il modulo $\left|KG(j\omega)\right| \to \infty$, mentre la fase $\varphi \to -90$

Per $\omega \to +\infty$ il modulo $\left|KG(j\omega)\right| \to 0$, mentre la fase $\varphi \to -90-90-90=-270$.

In tal modo si ottiene il tratto di curva descritta dall'estremità del vettore rappresentante la funzione di trasferta a catena aperta *KG(s)* per *s* che varia da $j0^+$ a $+j\infty$. L'altro tratto si otterrà disegnando la curva simmetrica rispetto all'asse reale.

**4- Verificare se la curva contorna o no il punto (-1,j0)**

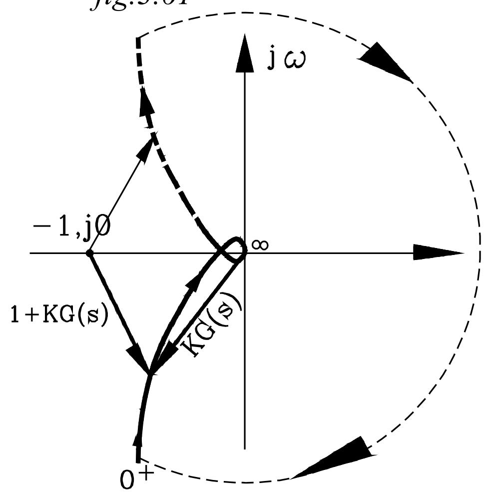
Per certificare la stabilità del sistema occorre verificare se il vettore *1+KG(s)* effettui o no delle rotazioni complete attorno al punto *(-1,j0)* quando s varia tra $-j\infty \div +j\infty$.

Considerato il caso più usuale nel quale il denominatore *D(s)* della funzione di trasferta a catena aperta, uguagliato a zero, non dia soluzioni con parte reale positiva, per la stabilità del sistema occorre che il vettore *1+KG(s)* non effettui rotazioni complete di 360° quando s varia tra $-j\infty \div +j\infty$

| |
|---|
| Tale verifica può essere semplificata osservando se il tratto di curva tracciato dall'estremità del vettore KG(s) per s variante tra $j0^+ \div +j\infty$ contorna o no il punto *(-1,j0)* |

**a)** La curva tracciata dall'estremità del vettore *KG(s)* per *s* che varia tra $j0 \div +j\infty$ non contorna il punto *-1,j0*

*fig.3.61*




In tal caso detta curva non avvolge il punto caratteristico (-1,j0). Se si traccia l'altro ramo di essa simmetrico rispetto all'asse reale, si nota che il punto caratteristico (-1,j0) si trova al di fuori della superficie racchiusa dall'intera curva.

Occorre notare che quando al denominatore del modulo della funzione di trasferta compare **s** come fattore *(è il caso in esame)* per $s \to j0^+$ ($\omega \to 0^+$) il modulo $\left|KG(j\omega)\right| \to +\infty$. In questo caso la chiusura della curva si intende che avvenga sempre in senso orario

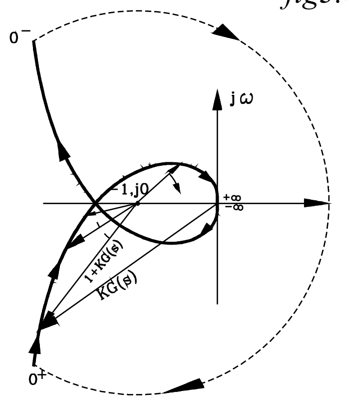
| |
|---|
| Se il punto (-1,j0) è al difuori della superficie racchiusa dalla curva tracciata dall'estremità del vettore KG(s) quando s varia tra $-j\infty \div +j\infty$, allora in tale intervallo, il vettore 1+KG(s) non effettua rotazioni complete di 360° ma oscillazioni nei due sensi opposti. |

Si conclude che:

Il sistema è stabile se la curva, tracciata dall'estremità del vettore *KG(s)*, non avvolge il punto *(-1,j0* quando s varia tra $+0 \div +j\infty$ .

**b)** La curva tracciata dall'estremità del vettore *KG(s)* per s che varia tra $j0 \div +j\infty$ contorna il punto *-1,j0.*

*fig3.62*



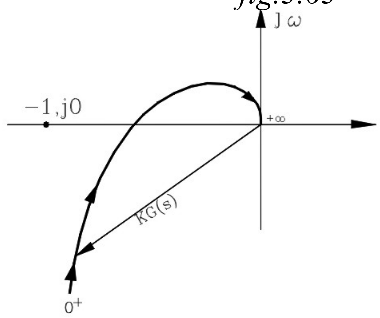
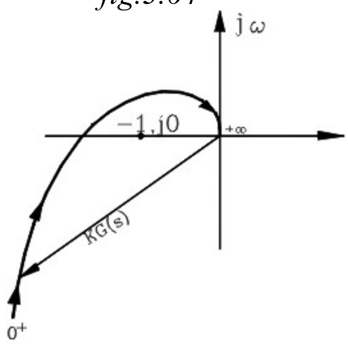

In tal caso la curva tracciata dall'estremità del vettore *KG(s)* per *s* che varia tra $j0 \div +j\infty$ avvolge il punto caratteristico *(-1,j0).* Si completi la curva, disegnando l'altro ramo simmetrico rispetto all'asse reale, e si noterà che il punto caratteristico *(-1,j0)* si trova entro la superficie racchiusa dall'intera curva.

Se il punto *(-1,j0)* è interno alla superficie racchiusa dalla curva tracciata dall'estremità del vettore *KG(s)* quando s varia tra $-j\infty \div +j\infty$ , allora in tale intervallo, il vettore *1+KG(s)* effettuerà una o più rotazioni complete di 360° in senso orario. Il sistema risulterà instabile.

Si può concludere che:

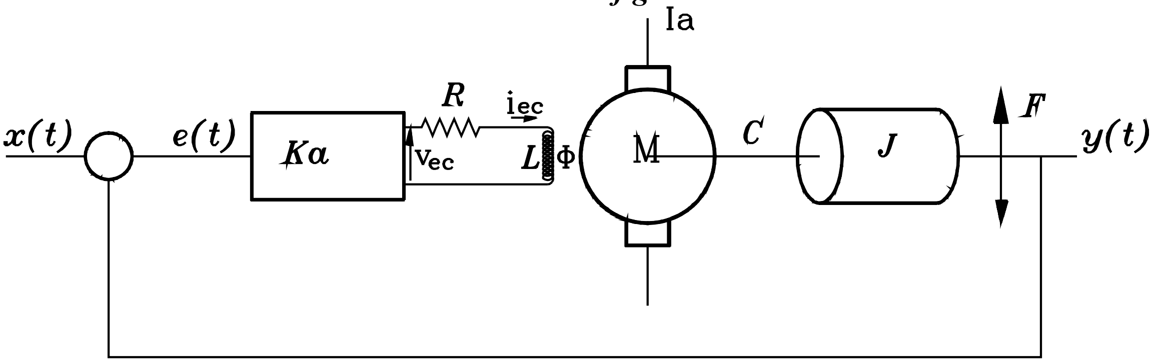
Se la curva tracciata dall'estremità del vettore *KG(jω)* quando ω varia tra $0^+ \div \infty$ avvolge il punto *(-1,j0)* allora *il sistema è instabile.*

In conclusione, se *D(s)* è il denominatore della funzione di trasferta *KG(s)* a catena aperta e l'equazione *D(s)=0* non ammette soluzioni con parte reale positiva, per certificare la stabilità assoluta basta disegnare il tratto di curva tracciata dall'estremità di *KG(jω)* per *ω* che varia nell'intervallo $0 \div +\infty$ . Si possono presentare due casi:

| La curva tracciata dall'estremità del vettore *KG(jω)* per *ω* che varia nell'intervallo $0 \div +\infty$ non avvolge il punto *(-1,j0)* | La curva tracciata dall'estremità del vettore *KG(jω)* per *ω* che varia nell'intervallo $0 \div +\infty$ avvolge il punto *(-1,j0)* |
|---|---|
| *fig.3.63*   | *fig.3.64*   |
| Il sistema presenta stabilità assoluta | Il sistema risulta instabile |

## CONTROLLO PROPORZIONALE SULLA ECCITAZIONE DI UN MOTORE A CORRENTE CONTINUA - FUNZIONE DI TRASFERIMENTO CONTROLLO DI STABILITÀ CON NYQUIST

***fig.3.65***




Si Consideri il sistema di controllo di figura.
Il motore è alimentato a corrente costante *Ia* e il controllo avviene sulla eccitazione.

Si prendano in esame i segnali che si susseguono nei blocchi della catena aperta.

**I blocco - Di amplificazione *Ka***
Sia *e(t)* il segnale di tensione dell'errore.
Dopo l'amplificatore di guadagno $K_a$ il segnale di eccitazione $v_{ec}(t)$ risulta:

$$v_{ec}(t) = Ka \cdot e(t)$$

Nel campo complesso, applicando la trasformata di Laplace si ha:

$$V_{ec}(s) = Ka \cdot E(s)$$

$$\boxed{\frac{V_{ec}(s)}{E(s)} = Ka} \quad (3.8.10)$$

**II blocco - circuito di eccitazione**
Nel circuito di eccitazione circola la corrente di eccitazione $i_{ec}$ *(per brevità si sottintende che sia funzione del tempo)*.
L'equilibrio del circuito di eccitazione sarà:

$$v_{ec} = R \cdot i_{ec} + L \cdot \frac{di_{ec}}{dt}$$

Nel campo complesso, applicando le trasformate di Laplace si ha:

$$V_{ec} = R \cdot I_{ec} + sL \cdot I_{ec}$$
$$V_{ec} = I_{ec} \cdot (sL + R)$$

Si ricava così la funzione di trasferta del II blocco

$$\boxed{\frac{I_{ec}(s)}{V_{ec}(s)} = \frac{1}{sL + R}} \quad (3.8.11)$$

**III blocco - generazione del flusso di eccitazione**

La corrente di eccitazione $i_{ec}(t)$ genera un flusso *Φ* ad essa proporzionale secondo una costante $Ke$ :

$$\Phi(t) = Ke \cdot i_{ec}(t)$$

Nel campo complesso, applicando la Trasformata di Laplace:

$$\Phi(s) = Ke \cdot I_{ec}(s)$$

Si ottiene così la funzione di trasferta del *III* blocco:

$$\boxed{\frac{\Phi(s)}{I_{ec}(s)} = Ke} \qquad (3.8.12)$$

**IV blocco - Generazione coppia motrice**

La coppia motrice è proporzionale al flusso *(la corrente di alimentazione si è supposta costante)* secondo una costante Km

$$C_m(t) = Km \cdot \Phi(t)$$

Nel campo complesso, applicando le trasformate di Laplace si ha:

$$Cm(s) = Km \cdot \Phi(s)$$

Da cui si ricava la funzione di trasferta del IV blocco:

$$\frac{Cm(s)}{\Phi(s)} = Km \qquad (3.8.13)$$

**V blocco - Equilibrio delle coppie - Elaborazione segnale di uscita**

La verifica della stabilità del sistema occorre effettuarla nella condizione più critica , quando sull'albero motore vi è la minima coppia resistente dovuta agli attriti, senza aggiunte di coppie resistenti aggiuntive (mandrino sotto carico).

In dette condizioni la coppia motrice equilibrerà l'inerzia e la forza frenante proporzionale alla velocità angolare.

Per uniformità di simbolismo si indica sempre con $y$ la rotazione in uscita e con $y'$ la velocità angolare; l'accelerazione sarà data dalla derivata seconda $y''$ dell'angolo di rotazione.

La coppia meccanica che si oppone a quella motrice sarà:

$$C_r(t) = J \cdot y'' + F \cdot y'$$

Dall'equilibrio delle coppie si ha:

$$C_m = C_r$$
$$Cm(t) = J \cdot y'' + F \cdot y'$$

Nel campo complesso, applicando le trasformate di Laplace si ha:

$$Cm(s) = s^2 J \cdot Y(s) + sF \cdot Y(s)$$
$$Cm(s) = Y(s) \cdot \left(s^2 J + sF\right)$$

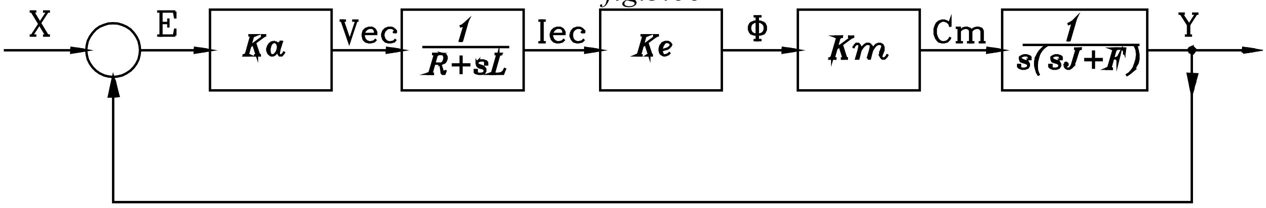
$$\frac{Y(s)}{Cm(s)} = \frac{1}{s^2 J + sF}$$

Ponendo in evidenza *s*:

$$\frac{Y(s)}{Cm(s)} = \frac{1}{s \cdot (sJ + F)} \quad (3.8.14)$$

La catena di controllo è costituita da cinque blocchi moltiplicatori con le funzioni di trasferta date dalle (3.8.10), (3.8.11, (3.8.12), (3.8.13), (3.8.14).

*fig.3.66*




La funzione di trasferta totale della catena aperta è il prodotto delle singole funzioni di trasferta dei quattro blocchi

$$\frac{V_{ec}(s)}{E(s)} \cdot \frac{I_{ec}(s)}{V_{ec}(s)} \cdot \frac{\Phi(s)}{I_{ec}(s)} \cdot \frac{Cm(s)}{\Phi(s)} \cdot \frac{Y(s)}{Cm(s)} = Ka \cdot \frac{1}{sL + R} \cdot Ke \cdot Km \cdot \frac{1}{s \cdot (sJ + F)}$$

Semplificando si ottiene la funzione di trasferimento a catena aperta

$$KG(s) = \frac{Y(s)}{E(s)} = \frac{Ka \cdot Ke \cdot Km}{s \cdot (sL + R) \cdot (sJ + F)} \quad (3.8.15)$$

Si noti che i termini "R" , "F" sono dei parametri resistenti: il primo elettrico, il secondo meccanico; mentre *"L"* , *"J"* rappresentano dei parametri inerziali, rispettivamente elettrico e meccanico.

**Costanti di tempo**

Nella espressione (3.8.15) poniamo in evidenza i parametri resistenti *R, F*

$$KG(s) = \frac{Ka \cdot Ke \cdot Km}{s \cdot \left(s\frac{L}{R} + 1\right) \cdot R \cdot \left(s\frac{J}{F} + 1\right) \cdot F}$$

Si denomina costante di tempo elettrica il rapporto:

$$\tau_e = \frac{L}{R} \quad (3.8.16)$$

Si definisce inoltre costante di tempo meccanica il rapporto:

$$\tau_m = \frac{J}{F} \quad (3.8.17)$$

Introducendo le costanti di tempo la funzione di trasferta *KG(s)* assume la forma:

$$KG(s) = \frac{Ka \cdot Ke \cdot Km}{s \cdot (s\tau_e + 1) \cdot R \cdot (s\tau_m + 1) \cdot F}$$

Si riuniscono in una tutte le costanti, ponendo:

$$\frac{Ka \cdot Ke \cdot Km}{R \cdot F} = K \quad (3.8.18)$$

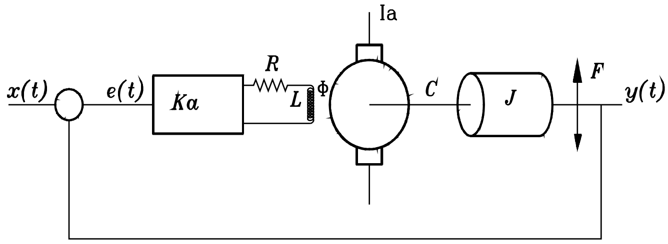
La funzione di trasferta a catena aperta assume la forma:

$$KG(s) = \frac{K}{s \cdot (s\tau_e + 1) \cdot (s\tau_m + 1)} \quad (3.8.20)$$

## *Esempio di verifica della stabilità assoluta di un sistema*

Per la verifica della stabilità conviene riferirsi ad un esempio numerico.
Si suppongano noti i seguenti parametri:

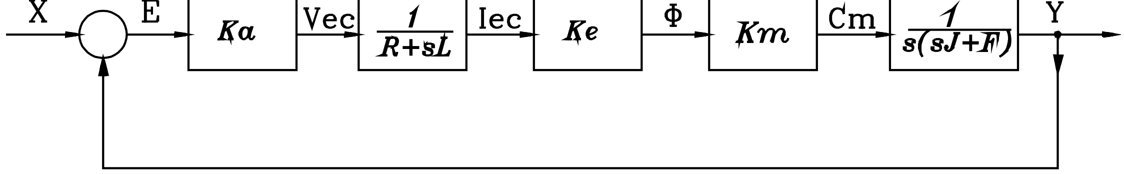
*fig.3.65*




J=0.2 kg·m²
F=0.8 Nms
Ka=10
Ke=0.01 wb/A
Km=200 Nm/wb
R=2 Ω
L=0.05 H

FUNZIONI DI TRASFERTA

*fig.3.66*




La funzione di trasferta è data dalla espressione (3.8.20)

$$KG(s) = \frac{K}{s \cdot (s\tau_e + 1) \cdot (s\tau_m + 1)} \quad (3.8.20)$$

Si sostituiscono i parametri noti:

$$K = \frac{Ka \cdot Ke \cdot Km}{R \cdot F} = \frac{10 \cdot 0.01 \cdot 200}{2 \cdot 0.8} = 12.5$$

$$\tau_e = \frac{L}{R} = \frac{0.05}{2} = 0.025\,s \qquad \tau_m = \frac{J}{F} = \frac{0.2}{0.8} = 0.25\,s$$

Sostituendo nella (3.8.20) si ha:

$$KG(s) = \frac{12.5}{s \cdot (s \cdot 0.025 + 1) \cdot (s \cdot 0.25 + 1)}$$

La funzione deve essere studiata per $s$ che varia nell'intervallo $-j\infty \div +j\infty$.
In pratica per la verifica della stabilità.

1- Si pone a zero il denominatore della funzione di trasferta *KG(s): D(s)=0* e si verifica che non vi siano soluzioni con parti reali positive.

2- Si sostituisce $j\omega$ alla variabile $s$.

3- Si fa variare ω da $0^+$ a $+\infty$.

4- Si disegna la curva tracciata dall'estremità del vettore $KG(j\omega)$ quando $\omega$ varia da $0$ *ad* $\infty$.
Per ottenere il tracciato occorre studiare separatamente il modulo $|KG(j\omega)|$ e l'angolo di fase $\varphi$ della funzione di trasferta.

5- Si verifica se la curva ottenuta avvolge o no il punto caratteristico *(-1,j0)*:
- Se la curva non contorna il punto *(-1,j0)* allora il sistema possiede la stabilità assoluta.
- Se la curva contorna il punto *(-1,j0)* allora il sistema è instabile

Si svolgono in successione detti punti.

Si pone a zero il denominatore della funzione di trasferta a catena aperta *KG(s)* :

$$D(s) = s \cdot (s \cdot 0.025 + 1) \cdot (s \cdot 0.25 + 1) = 0 \quad le\ soluzioni\ sono \begin{cases} s = 0 \\ s = -\dfrac{1}{0.025} \\ s = -\dfrac{1}{0.25} \end{cases}$$

Non vi sono soluzioni con parte reale positiva *(La funzione di trasferta KG(s) non ha poli con parte reale positiva)*

Si sostituisce $j\omega$ alla variabile $s$

$$KG(j\omega) = \frac{12.5}{j\omega \cdot (j\omega \cdot 0.025 + 1) \cdot (j\omega \cdot 0.25 + 1)}$$

Si determina il modulo e l'angolo di fase:

$$\text{Modulo} \quad \left|KG(j\omega)\right| = \frac{12{,}5}{\omega \cdot \sqrt{(\omega \cdot 0.025)^2 + 1} \cdot \sqrt{(\omega \cdot 0.25)^2 + 1}}$$

$$\text{Angolo di fase} \quad \beta = -90 - arctg(\omega \cdot 0.025) - arctg(\omega \cdot 0.25)$$

Al variare di $\omega$ si hanno i diversi valori del modulo e della fase del vettore $KG(j\omega)$. I valori limiti sono:

$$per\ \omega \to 0^+ \quad \left|KG(j\omega)\right| \to \infty \quad \varphi \to -90^\circ$$
$$per\ \omega \to +\infty \quad \left|KG(j\omega)\right| \to 0 \quad \varphi \to -270^\circ$$

Nella seguente tabella sono riportati i valori di $\left|KG(j\omega)\right|$ e di $\varphi$ al variare di $\omega$.

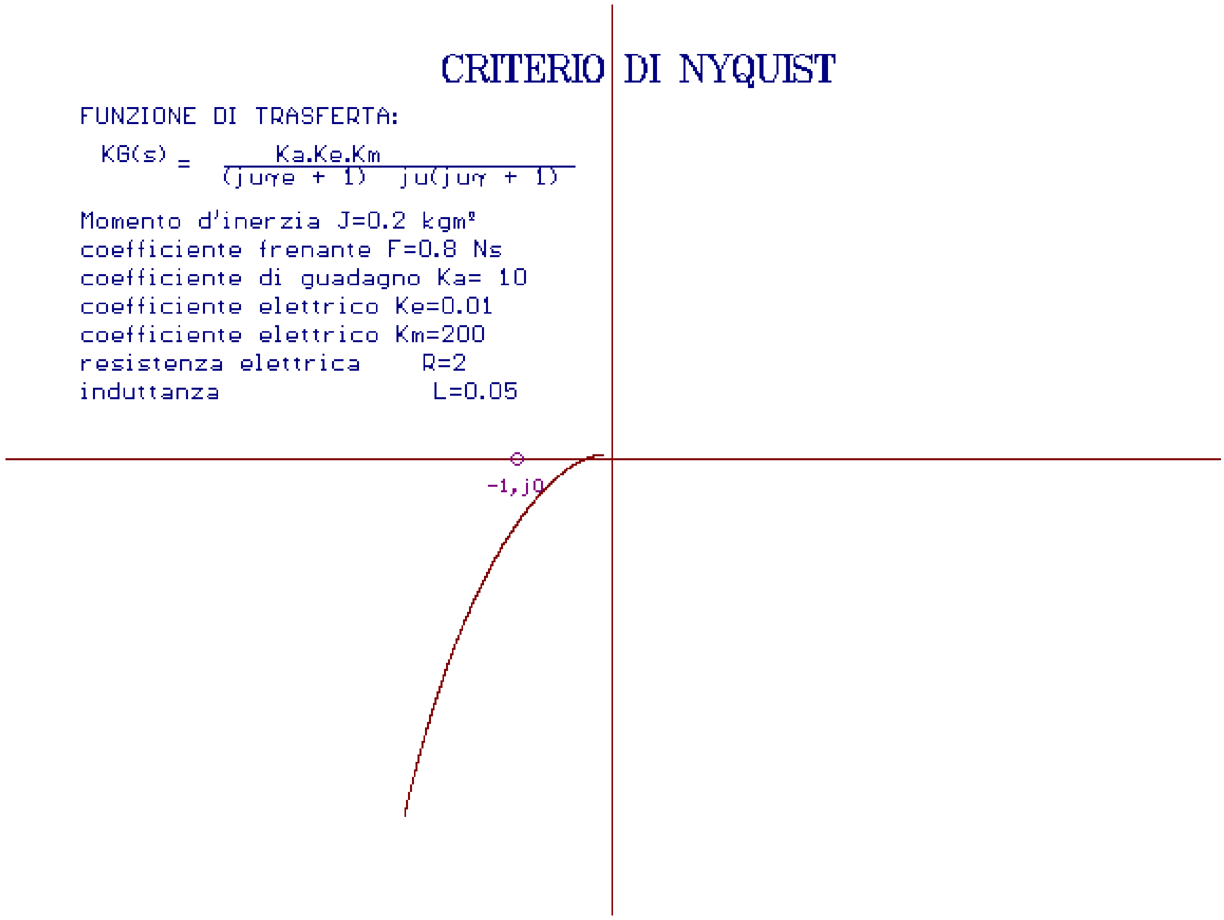
| Variabile $\omega$ | Modulo $\left\|KG(j\omega)\right\|$ | Angolo $\varphi$ | | Variabile $\omega$ | Modulo $\left\|KG(j\omega)\right\|$ | Angolo $\varphi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 3.32 | -131.16 | | 12.5 | 0.29 | -179.61 |
| 3.5 | 2.68 | -136.19 | | 13 | 0.27 | -180.90 |
| 4 | 2.20 | -140.71 | | 13.5 | 0.25 | -182.15 |
| 4.5 | 1.83 | -144.79 | | 14 | 0.23 | -183.34 |
| 5 | 1.55 | -148.47 | | 14.5 | 0.22 | -184.50 |
| 5.5 | 1.32 | -151.80 | | 15 | 0.20 | -185.62 |
| 6 | 1.14 | -154.84 | | 15.5 | 0.19 | -186.71 |
| 6.5 | 0.99 | -157.62 | | 16 | 0.18 | -187.77 |
| 7 | 0.87 | -160.18 | | 16.5 | 0.16 | -188.79 |
| 7.5 | 0.77 | -162.55 | | 17 | 0.15 | -189.78 |
| 8 | 0.69 | -164.74 | | 17.5 | 0.15 | -190.75 |
| 8.5 | 0.61 | -166.80 | | 18 | 0.14 | -191.70 |
| 9 | 0.55 | -168.72 | | 18.5 | 0.13 | -192.62 |
| 9.5 | 0.50 | -170.53 | | 19 | 0.12 | -193.52 |
| 10 | 0.45 | -172.23 | | 19.5 | 0.12 | -194.40 |
| 10.5 | 0.41 | -173.85 | | 20 | 0.11 | -195.26 |
| 11 | 0.37 | -175.39 | | | | |
| 11.5 | 0.34 | -176.86 | | | | |
| 12 | 0.32 | -178.26 | | | | |

Conoscendo il modulo e l'anglo di fase si possono riportare su piano complesso i vettori al variare di ω e disegnare la curva tracciata dall'estremità di essi.

Dal modulo $\left|KG(j\omega)\right|$ e la fase $\varphi$ si ricavano le componenti sugli assi si ottengono le coordinate dei punti della curva.

Dalla tabellina dei valori riportata nella pagina precedente si ottiene la curva *(ottenuta con programma Pascal)*:

*fig.3.67*




Come si può notare, la curva non avvolge il punto *(-1,j0)* *IL SISTEMA È STABILE* *(possiede stabilità assoluta)*

❄

Si ripeta ora l'esercizio lasciando invariati tutti i parametri salvo il valore dell'amplificazione *Ka* che viene aumentato da *Ka=10* al nuovo valore *Ka=50*

In tal caso rimangono invariate le costanti di tempo , varia soltanto la costante *K*

$$K = \frac{Ka \cdot Ke \cdot Km}{R \cdot F} = \frac{50 \cdot 0.01 \cdot 200}{2 \cdot 0.8} = 62.5$$

Risulta:

$$KG(s) = \frac{62.5}{j\omega \cdot (j\omega \cdot 0.025 + 1) \cdot (j\omega \cdot 0.25 + 1)}$$

Modulo $$|KG(j\omega)| = \frac{62,5}{\omega \cdot \sqrt{(\omega \cdot 0.025)^2 + 1} \cdot \sqrt{(\omega \cdot 0.25)^2 + 1}}$$

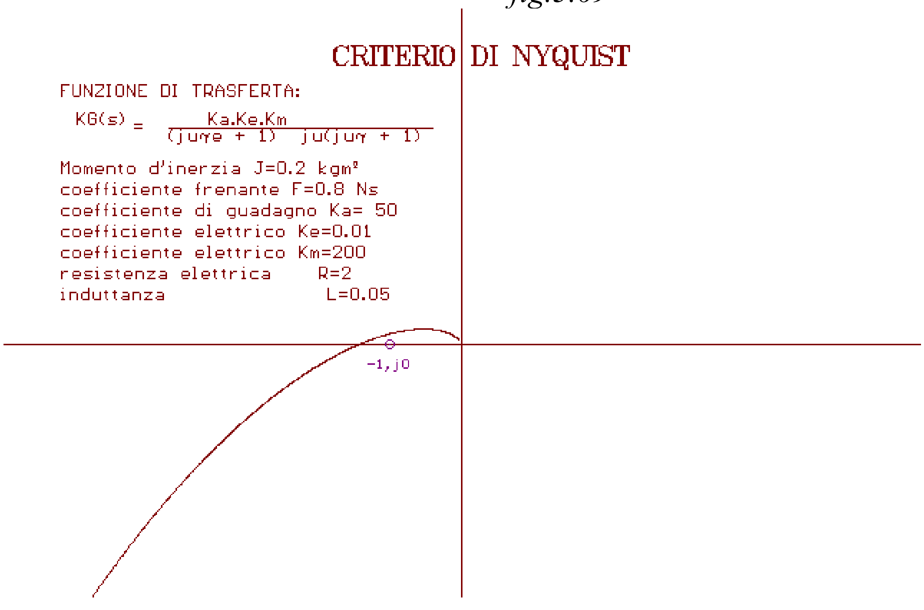
Angolo di fase $\beta = -90 - arctg(\omega \cdot 0.025) - arctg(\omega \cdot 0.25)$

Al variare di $\omega$ si ottiene

| Variabile ω | Modulo $\left\|KG(j\omega)\right\|$ | Angolo φ | Variabile ω | Modulo $\left\|KG(j\omega)\right\|$ | Angolo φ |
|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 7.75 | -148.47 | 14.5 | 1.08 | -184.50 |
| 5.5 | 6.62 | -151.80 | 15 | 1.01 | -185.62 |
| 6 | 5.71 | -154.84 | 15.5 | 0.94 | -186.71 |
| 6.5 | 4.97 | -157.62 | 16 | 0.88 | -187.77 |
| 7 | 4.36 | -160.18 | 16.5 | 0.82 | -188.79 |
| 7.5 | 3.85 | -162.55 | 17 | 0.77 | -189.78 |
| 8 | 3.43 | -164.74 | 17.5 | 0.73 | -190.75 |
| 8.5 | 3.06 | -166.80 | 18 | 0.69 | -191.70 |
| 9 | 2.75 | -168.72 | 18.5 | 0.65 | -192.62 |
| 9.5 | 2.48 | -170.53 | 19 | 0.61 | -193.52 |
| 10 | 2.25 | -172.23 | 19.5 | 0.58 | -194.40 |
| 10.5 | 2.05 | -173.85 | 20 | 0.55 | -195.26 |
| 11 | 1.87 | -175.39 | 20.5 | 0.52 | -196.09 |
| 11.5 | 1.72 | -176.86 | 21 | 0.49 | -196.92 |
| 12 | 1.58 | -178.26 | 21.5 | 0.47 | -197.72 |
| 12.5 | 1.45 | -179.61 | 22 | 0.45 | -198.51 |
| 13 | 1.34 | -180.90 | | | |
| 13.5 | 1.25 | -182.15 | | | |
| 14 | 1.16 | -183.34 | | | |

Dal modulo $\left|KG(j\omega)\right|$ e la fase φ si ricavano le componenti sugli assi.
Dalla tabellina dei valori si ottiene la curva:

*fig.3.69*




Come si può notare, la curva contorna il punto (-1,j0) *il sistema è instabile*

In pratica non occorre disegnare con precisione la curva tracciata dall'estremità dei vettori *KG(jω)* quando ω varia nell'intervallo $0^+ \div +\infty$ .

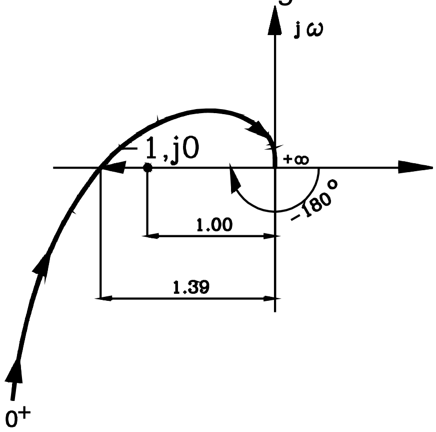
Ciò che interessa certificare è se la curva contorna o no il punto *(-1,j0):* per verificare ciò basta controllare il valore del modulo quando la fase risulta di *-180°*.

Se il valore del modulo $|KG(j\omega)|$ è inferiore di 1 quando la fase è -180°, la curva *non avvolgerà* il punto *(-1,j0)* e il sistema ha stabilità assoluta.

Se il valore del modulo $|KG(j\omega)|$ è superiore ad 1 quando la fase è -180°, la *curva avvolgerà* il punto *(-1,j0)* e il sistema risulta instabile.

Così, nel primo caso con il coefficiente di amplificazione *Ka=10*, quando l'angolo di fase è $\beta = -179,61$ il modulo risulta: $|KG(j\omega)| = 0.29$, molto inferiore all'unità e la curva non contornerà il punto *(-1,j0)*, anzi è molto lontana da esso *(il sistema ha un buon grado di stabilità assoluta).*

*fig.3.69*




Nel secondo caso, con il coefficiente di amplificazione *Ka=50,* quando l'angolo di fase è $\beta = -180,90$ il modulo risulta: $|KG(j\omega)| = 1.34$ maggiore di 1 *(e lo sarà ancor più a -180,00°)*. La curva sicuramente contornerà il punto (-1,j0).

Avanti... Clic qui per proseguire

Indietro... clic per precedente

Indietro... Clic qui per la pagina iniziale