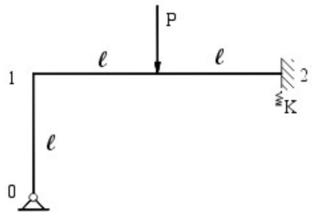
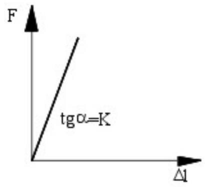
Due incognite ipertstatiche
con cedimento elastico lineare sul vincolo



La semplice struttura, proposta in figura, prevede nell'incastro "2" un cedimento elastico con costante di proporzionalità K.

$$K = \frac{12EJ}{l^3}$$



Nella deformazione lineare la forza di reazione al cedimento è proporzionale a questo in ragione di una costante K:

$$F = K \cdot \Delta l$$

$$K = \frac{F}{\Delta l} \quad \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{cm}}$$

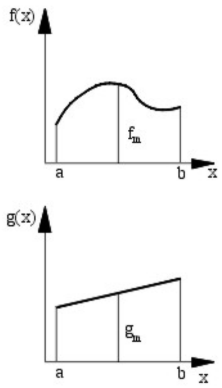
Della struttura proposta si vogliono determinare le reazioni vincolari sulla cerniera "1" e sull'incastro "2".

Per la soluzione sono impiegati quattro procedimenti diversi, con i metodi delle forze e degli spostamenti e con l'utilizzo dei lavori virtuali, delle equazioni di congruenza.

1° soluzione con i lavori virtuali

Premessa

Nel procedimento di calcolo, spesso, si presenta la necessità di risolvere l'integrale del prodotto di due funzioni. Per questo si può utilizzare la formula di *Simpson*, la cui soluzioni, nei casi più usuali, sono riportate nell'appendice.



Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni, di cui una lineare, e siano rispettivamente f_m e g_m i loro valori nel punto medio dell'intervallo $[a,b]$ d'integrazione. L'integrale del prodotto è dato dalla formula:

$$\int_b^a f(x) \cdot g(x) \cdot dx = \frac{l}{6}\left[f(a) \cdot g(a) + 4 f_m \cdot g_m + f(b) \cdot g(b)\right]$$

Consulta *l'appendice* per le soluzioni dei prodotti più usuali.

Equazione dei lavori virtuali

lavoro esterno =lavoro interno

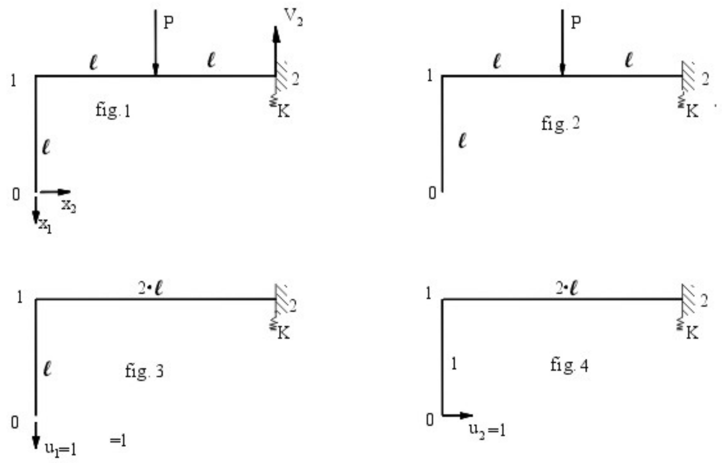
$$L_e = L_i$$

Si svincola la cerniera "0", ponendo al suo posto le due reazioni x_1, x_2, (fig.1), introdotte nel senso convenzionale (x_1 verticale verso il basso, x_2 orizzontale verso destra).

Per il calcolo dei lavori, esterno ed interno, occorre considerare:

a. Il sistema isostatico associato, ottenuto togliendo le due incognite iperstatiche x_1, x_2 (fig.2)

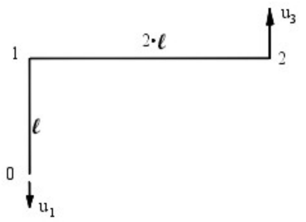
b. La forza unitaria $u_1 = 1$ applicata al posto di x_1, ottenendo il sistema isostatico di fig.3
c. La forza unitaria $u_2 = 1$ applicata al posto di x_2, ottenendo il sistema isostatico di fig.4

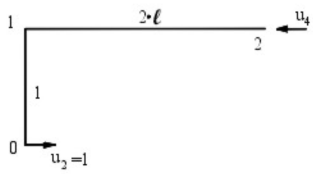


Lavoro esterno

È il lavoro compiuto dalla forze unitarie u_1, u_2 nella deformazione elastica del cedimento, determinata da tutti i carichi, comprese le reazioni x_1, x_2.

Nel caso in esame si ha il cedimento elastico del vincolo d'incastro; che è proporzionale, secondo la costante "K", alla reazione V_2 ed è in senso opposto a questa.





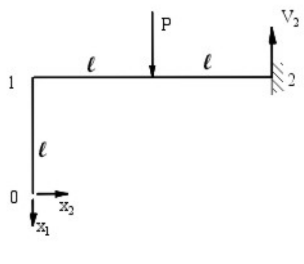
Così, posta in "0" la forza unitaria $u_1 = 1$, questa determina una reazione u_3 nel vincolo "2", nella direzione del cedimento elastico verticale; mentre la forza unitaria $u_2 = 1$, posta in "0", provoca sul vincolo "2" una reazione orizzontale u_4 che non ha alcuna influenza sul cedimento elastico (verticale).

Si ha:

$$u_3 = u_1 = 1$$

$$u_4 = u_2 = 1$$

Lavoro esterno compiuto da u_1

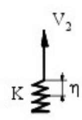


Occorre determinare la reazione V_2, nella direzione e nel senso della reazione della forza unitaria u_3, dovuta a tutti i carichi, comprese le reazioni incognite x_1, x_2.

$$V_2 - P - x_1 = 0$$

$$V_2 = P + x_1$$

La deformazione elastica η è proporzionale ed è in senso opposto alla reazione V_2



$$\eta = \frac{V_2}{K} \qquad \eta = \frac{P + x_1}{K}$$

Il lavoro è negativo essendo la deformazione in senso opposto alla reazione.

Si ha quindi che il lavoro esterno provocato dalla u_3 sul vincolo "2", dovuto alla $u_1 = 1$ posta in "0", nella deformazione prodotta (in "2") da tutte le forze sulla struttura comprese le incognite x_1, x_2, è dato da:

Lavoro esterno dovuto a $u_1 = 1$ $\qquad L_{e1} = -u_3 \cdot \eta \qquad$ con $u_3 = u_1 = 1$

$$L_{e1} = -\frac{P + x_1}{K} \qquad K = \frac{12EJ}{l^3}$$

$$L_{e1} = -\frac{P \cdot l^3}{12EJ} - \frac{x_1 \cdot l^3}{12EJ} \qquad (1)$$

Lavoro esterno dovuto a $u_2 = 1$

Non si ha nessuna deformazione nel senso orizzontale.

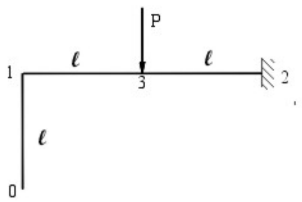
$$L_{e2} = 0 \qquad (1')$$

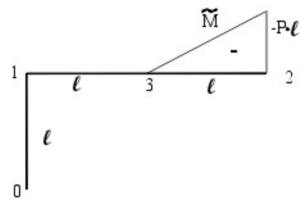
Si possono così esprimere le due equazioni virtuali, riferite ai carichi unitari $u_1 = 1$ $u_2 = 1$ posti in "0" nelle deformazioni dovute ai carichi in ogni sezione.

$$\begin{cases} L_{e1} = \int \widetilde{M} \cdot M_1 \cdot \dfrac{dz}{EJ} + + x_1 \cdot \int M_1 \cdot M_1 \cdot \dfrac{dz}{EJ} + x_2 \cdot \int M_1 \cdot M_2 \dfrac{dz}{EJ} \\ L_{e2} = \int \widetilde{M} \cdot M_2 \cdot \dfrac{dz}{EJ} + + x_1 \cdot \int M_1 \cdot M_2 \cdot \dfrac{dz}{EJ} + x_2 \cdot \int M_2 \cdot M_2 \dfrac{dz}{EJ} \end{cases} \qquad (2)$$

dove:

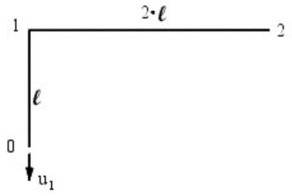
$\widetilde{M}$ è il momento su ogni singola sezione, dovuto ai carichi applicati nel sistema isostatico associato, ottenuto togliendo le incognite iperstatiche x_1, x_2. Nell'esempio è il solo carico P. Risulta:

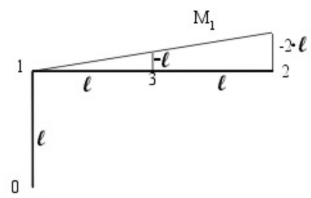




$$M_3 = 0$$
$$M_2 = -P \cdot l$$

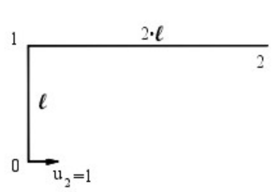
M_1 è il momento su ogni singola sezione, dovuto al carico unitario $u_1 = 1$ applicato nel vincolo "0" al posto della reazione incognita x_1. Risulta:

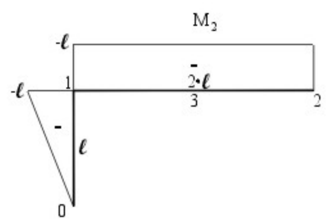




$$M_1 = 0$$
$$M_3 = -u_1 \cdot l = -l$$
$$M_2 = -u_1 \cdot 2 \cdot l = -2 \cdot l$$

M_2 è il momento su ogni singola sezione, dovuto al carico unitario $u_2 = 1$ applicato nel vincolo "0" al posto della reazione incognita x_2. Risulta:

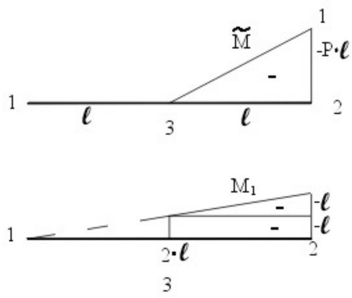


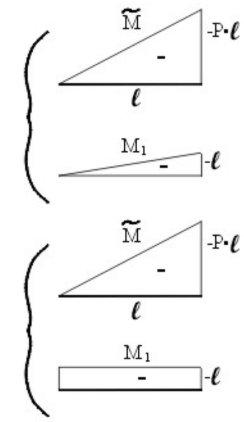


$$M_0 = 0$$
$$M_1 = -u_2 \cdot l = -l$$
$$M_2 = -l$$

Utilizzando i risultati noti della formula di Simpson (vedi appendice), risolviamo i singoli integrali che compaiono nel sistema (2)

$$\int \widetilde{M} \cdot M_1 \cdot \frac{dz}{EJ}$$





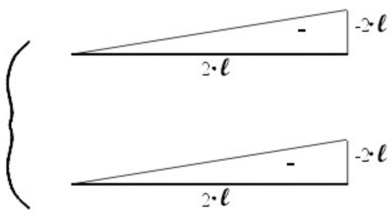
I due diagrammi dei momenti, nella zona in cui $\widetilde{M} \neq 0$, sono costituiti rispettivamente da un triangolo e un trapezio, che può decomporsi, a sua volta in un triangolo e un rettangolo.

Quindi il prodotto è la combinazione di due andamenti triangolari e di uno triangolare con uno rettangolare. Si ottiene:

$$\int_0^l \widetilde{M} \cdot M_1 \cdot \frac{dz}{EJ} = l \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot Pl \cdot l + \frac{1}{2} \cdot Pl \cdot l \right) \cdot \frac{1}{EJ}$$

$$\int \widetilde{M} \cdot M_1 \cdot \frac{dz}{EJ} = \frac{5}{6} \cdot \frac{Pl^3}{EJ} \qquad (3)$$

$$\int M_1 \cdot M_1 \cdot \frac{dz}{EJ}$$

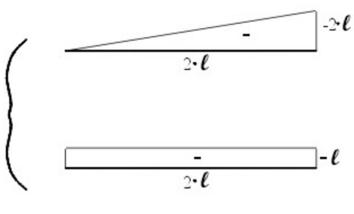


In questo caso il prodotto che compare nell'integrale si riferisce a due funzioni con andamento triangolare. Si ottiene:

$$\int_0^{2l} M_1 \cdot M_1 \cdot \frac{dz}{EJ} = 2l \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 2l \cdot 2l \right) \cdot \frac{1}{EJ}$$

$$\int_0^{2l} M_1 \cdot M_1 \cdot \frac{dz}{EJ} = \frac{8}{3} \frac{l^3}{EJ} \qquad (4)$$

$$\int M_1 \cdot M_2 \cdot \frac{dz}{EJ}$$



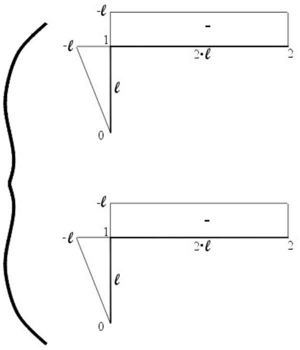
Il prodotto che compare nell'integrale si riferisce a due funzioni, di cui, una con andamento triangolare e l'altra rettangolare . Nel tratto in cui $M_1 \neq 0$ si ottiene:

$$\int_0^{2l} M_1 \cdot M_2 \cdot \frac{dz}{EJ} = 2l \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 2l \cdot l \right) \cdot \frac{1}{EJ}$$

$$\int_0^{2l} M_1 \cdot M_2 \cdot \frac{dz}{EJ} = \frac{2l^3}{EJ} \qquad (5)$$

Risulta $$\int M_2 \cdot M_1 \cdot \frac{dz}{EJ} = \int M_1 \cdot M_2 \cdot \frac{dz}{EJ} = \frac{2l^3}{EJ} \qquad (5')$$

$$\int M_2 \cdot M_2 \cdot \frac{dz}{EJ}$$

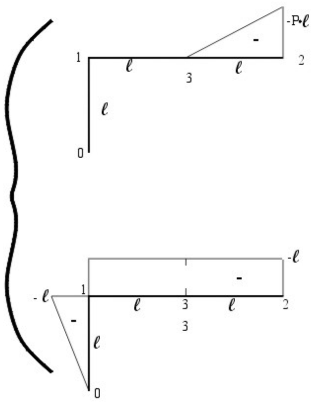


Il prodotto che compare nell'integrale è costituito: nel tratto verticale di lunghezza "*l*" da due funzioni uguali con andamento triangolare e, nel tratto orizzontale di lunghezza *"2l"*, da due funzioni uguali rettangolari. Combinando le funzioni nei due tratti si ottiene:

$$\int M_2 \cdot M_2 \cdot \frac{dz}{EJ} = \int_0^l M_2 \cdot M_2 \cdot \frac{dz}{EJ} + \int_0^{2l} M_2 \cdot M_2 \cdot \frac{dz}{EJ} = \frac{1}{EJ}\left(l \cdot \frac{1}{3} \cdot l \cdot l + 2l \cdot l \cdot l \right)$$

$$\int M_2 \cdot M_2 \cdot \frac{dz}{EJ} = \frac{7}{3} \cdot \frac{l^3}{EJ} \qquad (6)$$

$$\int \widetilde{M} \cdot M_2 \cdot \frac{dz}{EJ}$$



Il prodotto che compare nell'integrale è diverso da zero solo nel tratto 3-2 dove è $\widetilde{M} \neq 0$, ed è composto da una funzione triangolare e una rettangolare. Combinando le due funzioni si ottiene:

$$\int_0^l \widetilde{M} \cdot M_2 \cdot \frac{dz}{EJ} = l \cdot \frac{1}{2} Pl \cdot l \cdot \frac{1}{EJ}$$

$$\int \widetilde{M} \cdot M_2 \cdot \frac{dz}{EJ} = \frac{1}{2} \cdot \frac{Pl^3}{EJ} \qquad (7)$$

Sostituendo le(1), (1'), (3), (4), (5), (5'),(6), (7) nella (2) si ha:

$$\begin{cases} \frac{5}{6} \cdot \frac{Pl^3}{EJ} + \frac{8}{3} \cdot \frac{l^3}{EJ} \cdot x_1 + 2\frac{l^3}{EJ} \cdot x_2 = -\frac{Pl^3}{12EJ} - \frac{1}{12EJ} \cdot x_1 \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{Pl^3}{EJ} + 2 \cdot \frac{l^3}{EJ} \cdot x_1 + \frac{7}{3}\frac{l^3}{EJ} \cdot x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(\frac{8}{3} + \frac{1}{12} \right) \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 = -\left(\frac{5}{6} + \frac{1}{12} \right) \cdot P \\ 2 \cdot x_1 + \frac{7}{3} x_2 = -\frac{1}{2} \cdot P \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{33}{12} \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 = -\dfrac{11}{12} \cdot P \\ 2 \cdot x_1 + \dfrac{7}{3} \cdot x_2 = -\dfrac{1}{2} \cdot P \end{cases}$$

Risolvendo si ha:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{33}{12} & 2 \\ 2 & \dfrac{7}{3} \end{vmatrix} = \frac{231}{36} - 4 = \frac{87}{36}$$

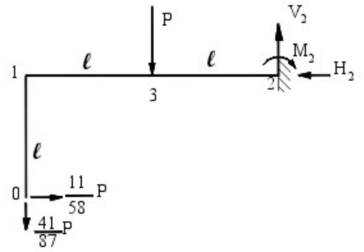
$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -\dfrac{11}{12}P & 2 \\ -\dfrac{1}{2}P & \dfrac{7}{3} \end{vmatrix} = \left(-\frac{77}{36} + 1 \right) \cdot P = -\frac{41}{36} \cdot P$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -\dfrac{33}{12} & -\dfrac{11}{12}P \\ 2 & -\dfrac{1}{2}P \end{vmatrix} = \left(-\frac{33}{24} + \frac{22}{12} \right) \cdot P = \frac{11}{24} \cdot P$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta_2} = -\frac{41}{36} \cdot \frac{36}{87} \qquad x_2 = \frac{\Delta_{21}}{\Delta} = \frac{11}{24} \cdot \frac{36}{87}$$

$$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{41}{87} P \\ x_2 = \dfrac{11}{58} P \end{cases}$$

La reazione x_1 è in senso opposto a quello assegnato



Poste le incognite x_1, x_2 nel senso reale, si ottengono le reazioni sul vincolo “2”.

$$M_2 - Pl - \frac{11}{58} Pl + \frac{41}{87} P \cdot 2l = 0$$

$$M_2 = \left(1 + \frac{11}{58} - \frac{82}{87} \right) \cdot Pl = \frac{174 + 33 - 164}{174} Pl$$

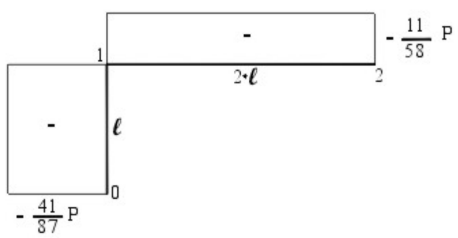
$$M_2 = \frac{43}{174} Pl$$

$$V_2 = P - \frac{41}{87} P$$

$$V_2 = \frac{46}{87} P \qquad H_2 = \frac{11}{58} P$$

Si ottengono così i diagrammi:

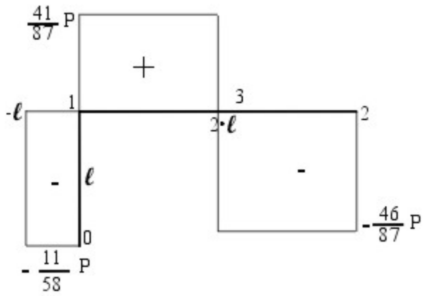
Sforzo normale



$$N_{0\_1} = -\frac{41}{87} P$$

$$N_{1\_2} = -\frac{11}{58} P$$

Sforzo di taglio

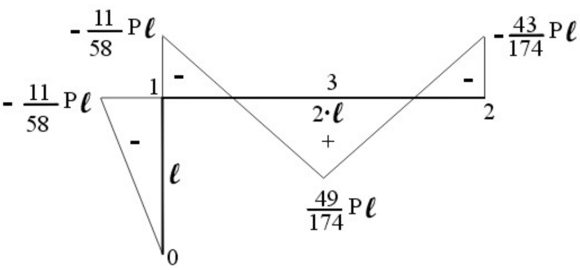


$$T_{0-1} = -\frac{11}{58}P$$

$$T_{1-3} = \frac{41}{87}P$$

$$T_{2-3} = -\frac{46}{87}P$$

Momento flettente



$$M_0 = 0$$

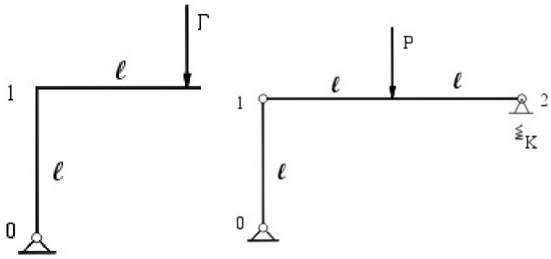
$$M_1 = -\frac{11}{58}Pl$$

$$M_3 = -\frac{41}{87}Pl - \frac{11}{58}Pl = \frac{82-33}{174}Pl$$

$$M_3 = \frac{49}{174}Pl$$

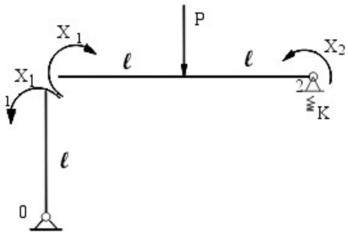
$$M_2 = -\frac{43}{174}Pl$$

SECONDO METODO DI SOLUZIONE
Congruenza sulla continuità dei tratti adiacenti di una stessa asta



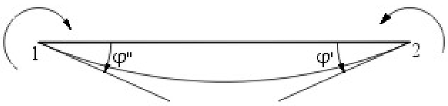
$$K = \frac{12EJ}{l^3}$$

La struttura isostatica associata si ottiene spezzando la trave nella sezione “1”, ponendo ivi una cerniera, e si sostituendo l’incastro “2” con un’altra cerniera. In tal modo si ha un arco a tre cerniere.

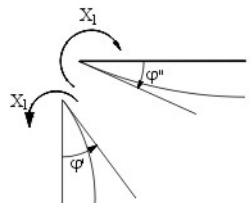


Per tener conto della continuità, spezzata nella sezione “1”, si pongono, nel senso convenzionale, i momenti uguali e contrari x_1, x_1 che la garantiscano; inoltre si aggiunge nella sezione “2” il momento x_2 che tiene conto del momento offerto dall’incastro (che è stato sostituito con la cerniera).

L’equazione di congruenza si esprime imponendo che sia nulla la rotazione relativa nelle due sezioni adiacenti ove si è posta la cerniera.



Occorre notare che i momenti e le rotazioni di deformazione elastiche, da essi ottenute, sono poste nel senso convenzionale: a sinistra di una cerniera la rotazione φ' è in senso antiorario (in 2 nella fig.), e a destra φ'' in senso orario (in 1 nella fig.).



Così nella sezione “1”, dei due tratti adiacenti, i momenti e le conseguenti rotazioni sono poste, come in figura, nel senso convenzionale: nel tratto verticale, a sinistra della sezione “1”, φ' in senso antiorario, nel tratto orizzontale, a destra, φ'' in senso orario.

L’equazione di congruenza nella sezione “1” si esprime imponendo che, per la continuità, i due tratti adiacenti ad essa non possono che subire la stessa rotazione, e quindi la rotazione relativa è nulla.

$$\varphi_1 = \varphi_1'' - \varphi_1' = 0$$

Ove

φ_1 la rotazione relativa in “1”: differenza tra quella a destra e a sinistra della sezione

φ_1'' rotazione a destra della sezione ”1”

φ_1' rotazione a sinistra della sezione “1”.

La differenza in senso algebrico è nulla.

Lo stesso ragionamento si può fare per la cerniera posta in “2”.

Le due equazioni di congruenza nelle sezioni “1” e “2” si possono porre nella forma:

$$\begin{cases} \delta_{11}x_1 + \delta_{12}x_2 + \delta_{10} = 0 \\ \delta_{21}x_1 + \delta_{22}x_2 + \delta_{20} = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

dove

δ_{11} è la rotazione relativa nella sezione "1" dovuta al momenti unitari $x_1 = 1$ posti nella stessa sezione "1" dei due tratti adiacenti

δ_{12} è la rotazione relativa nella sezione "1" dovuta al momento unitario $x_2 = 1$ posto nell'altra sezione "2"

δ_{10} è la rotazione relativa nella sezione "1" dovuta ai carichi (la sola forza P in questo caso)

δ_{21} è la rotazione relativa nella sezione "2" dovuta al momento unitario $x_1 = 1$ posto nell'altra sezione "1"

δ_{22} è la rotazione relativa nella sezione "2" dovuta al momento unitario $x_2 = 1$ posto nella stessa sezione "2"

δ_{20} è la rotazione relativa nella sezione "2" dovuta ai carichi (la sola forza P in questo caso)

Rotazione relativa δ_{11}

È la rotazione relativa nella sezione "1" dovuta al momenti unitari $x_1 = 1$ posti nella stessa sezione "1" dei due tratti adiacenti

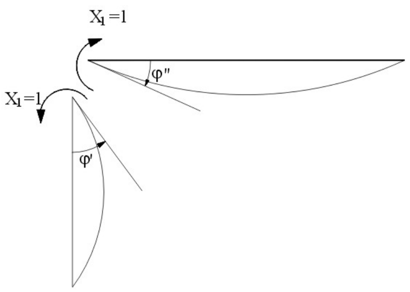
Si compone di due termini che tengono conto delle deformazioni, per effetto di $x_1 = 1$, dei due tratti adiacenti alla cerniera posta in "1" e della rotazione relativa indotta dal cedimento elastico in "2".

$$\begin{cases} \delta'_{11} & \text{rotazione relativa nella cerniera "1", dovuta alla deformazione delle due aste adicenti ad essa,} \\ & \text{per effetto de1 momenti } x_1 = 1 \text{ posti nella cerniera stessa} \\ \delta''_{11} & \text{rotazione relativa nella cerniera 1 per effetto del cedimento elastico del vicolo 2} \end{cases}$$

Risulta

$$\delta_{11} = \delta'_{11} + \delta''_{11}$$

Rotazione relativa δ'_{11} nella cerniera "1"per deformazioni aste adiacenti ad essa



Considerate le due aste, adiacenti in "1", incernierate agli estremi, la rotazione relativa è la differenza dalla rotazione φ''_{11} dell'asta orizzontale a destra e della φ'_{11} della verticale a sinistra.

Rotazione a destra di "1" (asta 1-2)

$$\varphi''_{11} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2l}{EJ} \qquad \textit{rotazione oraria } (+) \qquad +$$

Rotazione a sinistra di "1" (asta 0-1)

$$\varphi''_{11} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{\cdot l}{EJ} \qquad \textit{rotazione antioraria } (-) \qquad -$$

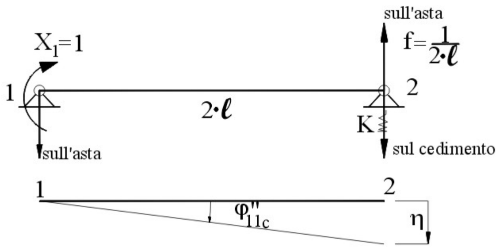
Rotazione relativa δ'_{11}

$$\delta'_{11} = \varphi''_{11} - \varphi'_{11}$$

$$\delta'_{11} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2l}{EJ} - \left(-\frac{1}{3} \cdot \frac{l}{EJ} \right) = \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3} \right) \frac{l}{EJ}$$

$$\delta'_{11} = \frac{l}{EJ}$$

Rotazione relativa δ''_{11} per cedimento elastico



Per effetto del momento $x_1 = 1$ in 1 si ha una reazione verso l'alto sulla cerniera 2:

$$f \cdot 2l - 1 = 0 \qquad f = \frac{1}{2l}$$

la forza sul cedimento è in senso opposto: verso il basso:

$$f = \frac{1}{2l}$$

Il cedimento elastico η è proporzionale alla forza f:

$$\eta = \frac{f}{K} \qquad \eta = \frac{1}{2l \cdot K}$$

L'abbassamento della cerniera "2" determina una rotazione oraria attorno alla cerniera 1 dell'asta a destra di essa:

Rotazione a destra di "1" per cedimento del vincolo "2" dovuto a $x_1 = 1$

$$\varphi''_{11c} = \frac{\eta}{2l} = \frac{1}{4l^2 \cdot K} = \frac{1}{4l^2 \cdot \frac{12EJ}{l^3}}$$

$$\varphi''_{11c} = \frac{1}{48} \cdot \frac{l}{EJ}$$

Rotazione a sinistra di "1" per cedimento del vincolo "2" dovuto a $x_1 = 1$

Il cedimento del vincolo 2 non determina alcun effetto sull'asta 0-1 a sinistra della cerniera posta in 1; per cui la rotazione indotta a sinistra di essa è nulla:

$$\varphi'_{11c} = 0$$

Rotazione relativa "1" per cedimento del vincolo "2" dovuto a $x_1 = 1$

È la differenza tra la rotazione a destra e a sinistra della sezione 1:

$$\delta''_{11} = \varphi''_{11c} - \varphi'_{11c} \qquad \delta''_{11} = \frac{1}{48} \cdot \frac{l}{EJ} - 0$$

$$\delta''_{11} = \frac{1}{48} \cdot \frac{l}{EJ}$$

Rotazione relativa δ_{11} globale nelle sezioni adiacenti 1, per i momenti $x_1 = 1$ applicati in esse

È la somma della rotazione relativa dovuta alle deformazioni delle aste adiacenti in "1" e di quella per il cedimento elastico del vincolo 2:

$$\delta_{11} = \delta'_{11} + \delta''_{11} \qquad \delta_{11} = \frac{l}{EJ} + \frac{1}{48} \cdot \frac{l}{EJ} \cdot$$

$$\delta_{11} = \frac{49}{48} \cdot \frac{l}{EJ} \cdot$$

Rotazione relativa δ_{12}

È la rotazione relativa nella sezione "1" dovuta al momento unitario $x_2 = 1$ posto nella sezione "2"

Si compone di due termini, che tengono conto delle deformazioni dei due tratti adiacenti alla cerniera posta in “1” , per effetto di $x_2 = 1$ applicata in 2, e della rotazione relativa indotta dal cedimento elastico in “2” nella suddetta sezione 1.

$$\begin{cases} \delta'_{12} \quad \text{rotazione relativa nella cerniera "1", dovuta alla deformazione delle due aste adicenti} \\ \quad \text{ad essa, per effetto del momento } x_2 = 1 \text{ applicato nella cerniera 2} \\ \\ \delta''_{12} \quad \text{rotazione relativa nella cerniera 1 dovuta al cedimento elastico del vicolo 2, per effetto di} \\ \quad x_2 = 1 \text{ applicato nella cerniera 2} \end{cases}$$

Risulta

$$\delta_{12} = \delta'_{12} + \delta''_{12}$$

Rotazione relativa δ'_{12} per deformazione aste

Il momento $x_2 = 1$ applicato in 2 provoca una deformazione elastica solamente dell’asta 1-2, non ha alcun effetto sulla 0-1(la cerniera 1 non trasmette momento); si ha quindi una rotazione φ''_{12} a destra della cerniera 1 e nessuna a sinistra.

Rotazione a destra di “1”

Rotazione nella cerniera “1” per $x_2 = 1$ applicato in “2”

$$\varphi''_{12} = \frac{1}{6} \cdot \frac{2l}{EJ} \qquad \varphi''_{12} = \frac{1}{3} \cdot \frac{l}{EJ} \quad +$$

Rotazione a sinistra di “1”

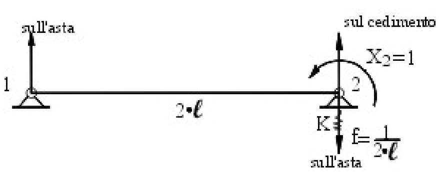
$$\varphi'_{12} = 0$$

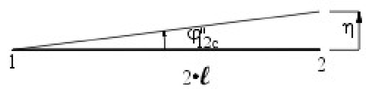
Rotazione relativa nella cerniera “1” per deformazioni aste adiacenti ad essa

$$\delta'_{12} = \varphi''_{12} - \varphi'_{12} \qquad \delta'_{12} = \frac{1}{3} \cdot \frac{l}{EJ} - 0$$

$$\delta'_{12} = \frac{1}{3} \cdot \frac{l}{EJ} \quad +$$

Rotazione relativa δ''_{12} per cedimento elastico del vincolo 2 dovuto a $x_2 = 1$ posto in “2”





Per effetto del momento $x_2 = 1$ applicato alla cerniera 2 si ha, in essa, una reazione rivolta verso il basso:

$$f \cdot 2l - 1 = 0 \qquad f = \frac{1}{2l} \downarrow$$

la forza sul cedimento è in senso opposto: verso l’alto:

$$f = \frac{1}{2l} \uparrow$$

Il cedimento elastico η è proporzionale alla forza f:

$$\eta = \frac{f}{K} \qquad \eta = \frac{1}{2l \cdot K} \uparrow$$

Rotazione a destra di "1"per cedimento del vincolo"2" dovuto a $x_2 = 1$ *applicato in esso*

L'innalzamento della cerniera 2 determina una rotazione antioraria attorno alla cerniera 1 dell'asta a destra di essa:

$$\varphi''_{12c} = -\frac{\eta}{2l} = -\frac{1}{4l^2 \cdot K} = -\frac{1}{4l^2 \cdot \frac{12EJ}{l^3}}$$

$$\varphi''_{12c} = -\frac{1}{48} \cdot \frac{l}{EJ}$$

-

Rotazione a sinistra di "1"per cedimento del vincolo"2" dovuto a $x_2 = 1$ *applicato in esso*

L'innalzamento della cerniera "2" non trasmette alcuna rotazione sull'asta a sinistra della cerniera "1".

$$\varphi'_{12c} = 0$$

Rotazione relativa "1"per cedimento del vincolo"2" dovuto a $x_2 = 1$ *applicato in esso*

È la differenza tra la rotazione a destra e a sinistra della sezione 1:

$$\delta''_{12} = \varphi''_{12c} - \varphi'_{12c} \qquad \delta''_{12} = -\frac{1}{48} \cdot \frac{l}{EJ} - 0$$

$$\delta''_{12} = -\frac{1}{48} \cdot \frac{l}{EJ}$$

-

Rotazione relativa δ_{12} ***globale nella sezione 1, dovuta al momento*** $x_2 = 1$ ***applica in "2"***

È la somma della rotazione relativa dovuta alle deformazioni delle aste e di quella per il cedimento elastico:

$$\delta_{12} = \delta'_{12} + \delta''_{12} \qquad \delta_{12} = \frac{1}{3} \cdot \frac{l}{EJ} - \frac{1}{48} \cdot \frac{l}{EJ} = \frac{16-1}{48}\frac{l}{EJ}$$

$$\boxed{\delta_{12} = \frac{15}{48} \cdot \frac{l}{EJ} \cdot}$$

+

Rotazione relativa δ_{10}

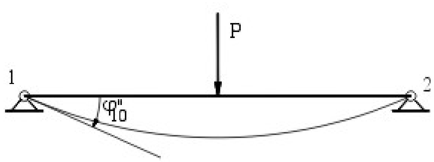
È la rotazione relativa in "1" dovuta ai carichi (il solo carico P in questo caso).

Considerato il carico P nel sistema isostatico associato, la rotazione relativa è dovuta alla deformazione elastica della sola asta 1-2, e dell'abbassamento del vincolo "2", per cedimento, che interessa ancora solamente l'asta 1-2, (la cerniera "1" non trasmette momento all'asta 0-1).

Quindi la rotazione relativa δ_{10} si compone di due termini

$$\begin{cases} \delta'_{10} \ \text{rotazione relativa nella cerniera "1", dovuta alla deformazione delle due aste adicenti} \\ \quad \text{ad essa, per effetto del carico P applicato sull'asta 1-2} \\ \delta''_{10} \ \text{rotazione relativa nella cerniera "1" dovuta al cedimento elastico del vicolo "2", per effetto del} \\ \quad \text{carico P applicato sull'asta 1-2} \end{cases}$$

Rotazione relativa δ'_{10} ***per deformazione aste***



È determinata dalla deformazione provocata dal carico P, posto al centro dell'asta 1-2 incernierata agli estremi.

Rotazione a destra di "1"

È la rotazione che il carico P, posto al centro dell'asta 1-2, provoca in corrispondenza della cerniera di estremità "1".

$$\varphi''_{10} = \frac{1}{16} \cdot \frac{P \cdot (2l)^2}{EJ}$$

$$\varphi''_{10} = \frac{1}{4} \cdot \frac{P \cdot l^2}{EJ}$$

Rotazione a sinistra di "1"

Come si è detto la cerniera non trasmette momento, quindi l'asta a sinistra 1-0 non subisce alcun effetto dal carico P: la rotazione a sinistra è nulla.

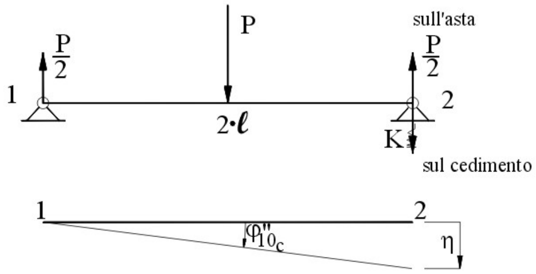
$$\varphi'_{10} = 0$$

Rotazione relativa nella cerniera "1" per deformazioni aste adiacenti ad essa dovute a P

$$\delta'_{10} = \varphi''_{10} - \varphi'_{10} \qquad \delta'_{12} = \frac{1}{4} \cdot \frac{l^2}{EJ} - 0$$

$$\boxed{\delta'_{10} = \frac{1}{4} \cdot \frac{l^2}{EJ}}$$

Rotazione relativa δ''_{10} per cedimento elastico del vincolo 2 dovuto al carico P



Il carico P, al centro dell'asta 1-2, provoca sulle due cerniere reazioni uguali verso l'alto:

$$f = \frac{P}{2}$$

Sul cedimento elastico del vincolo "2" si ha un'azione verso il basso uguale e contraria a detta reazione:

$$f = \frac{P}{2}$$

Rotazione a destra di "1"per cedimento del vincolo"2" dovuto al carico P

L'abbassamento della cerniera 2 determina una rotazione oraria attorno alla cerniera 1 dell'asta a destra di essa:

$$\varphi''_{10c} = \frac{\eta}{2l} = \frac{P}{4l \cdot K} = \frac{P}{4l \cdot \frac{12EJ}{l^3}}$$

$$\varphi''_{10c} = \frac{P}{48} \cdot \frac{l^2}{EJ}$$

Rotazione a sinistra di "1"per cedimento del vincolo"2" dovuto al carico P

L'abbassamento della cerniera "2" non trasmette alcuna rotazione sull'asta a sinistra della cerniera "1".

$$\varphi'_{10c} = 0$$

Rotazione relativa "1"per cedimento del vincolo"2" dovuto al carico P

È la differenza tra la rotazione a destra e a sinistra della sezione 1:

$$\delta''_{10} = \varphi''_{12c} - \varphi'_{10c} \qquad \delta''_{10} = \frac{1}{48} \cdot \frac{Pl^2}{EJ} - 0$$

$$\delta''_{10} = \frac{1}{48} \cdot \frac{Pl^2}{EJ}$$

Rotazione relativa δ_{10} globale nella sezione 1, dovuta al carico P

È la somma della rotazione relativa dovuta alle deformazioni delle aste e di quella per il cedimento elastico:

$$\delta_{10} = \delta'_{10} + \delta''_{10} \qquad \delta_{10} = \frac{1}{4} \cdot \frac{l}{EJ} + \frac{1}{48} \cdot \frac{l}{EJ} = \frac{12+1}{48}\frac{l}{EJ}$$

$$\delta_{10} = \frac{15}{48} \cdot \frac{l}{EJ} \cdot$$

Rotazione relativa δ_{21}

È la rotazione relativa nella sezione "2" dovuta al momento unitario $x_1 = 1$ posto nella sezione "1"

Risulta sempre:

$$\delta_{21} = \delta_{12}$$

Per esercitazione calcoliamola.

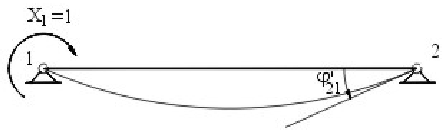
Si compone di due termini, che tengono conto delle deformazioni dei due tratti adiacenti alla cerniera posta in "2" , per effetto di $x_1 = 1$ applicata in 1, e della rotazione relativa indotta dal cedimento elastico in "2" nella suddetta sezione 2 (sempre per effetto di $x_1 = 1$ applicata in 1).

$$\begin{cases} \delta'_{21} \ \text{rotazione relativa nella cerniera "2", dovuta alla deformazione dell'asta 1-2 per effetto del momento } x_1 = 1 \text{ applicato nella cerniera 1} \\ \delta''_{21} \ \text{rotazione relativa nella cerniera 2 dovuta al cedimento elastico del vicolo 2, per effetto di } x_1 = 1 \text{ applicato nella cerniera 1} \end{cases}$$

Risulta

$$\boxed{\delta_{21} = \delta'_{21} + \delta''_{21}}$$

Rotazione relativa δ'_{21} per deformazione dell'asta 1-2



Il momento $x_1 = 1$ applicato in 1 provoca una deformazione elastica dell'asta 1-2, e quindi una rotazione alla sinistra della cerniera "2"; non si ha nessuna rotazione alla destra di essa; si ha quindi una rotazione φ''_{21} alla sinistra della cerniera 2 e nessuna a destra.

Rotazione a destra di "2"

$$\varphi'_{21} = 0$$

Rotazione alla sinistra di "2"

Rotazione nella cerniera "2" per $x_1 = 1$ applicato in "1"

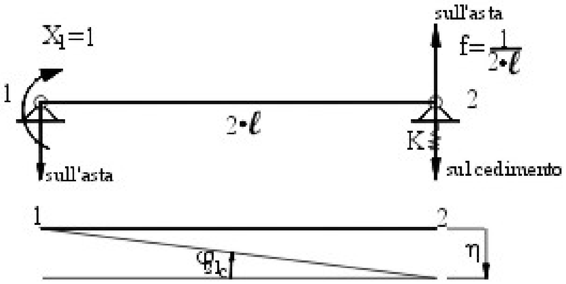
$$\varphi''_{21} = -\frac{1}{6} \cdot \frac{2l}{EJ} \qquad \varphi''_{21} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{l}{EJ}$$

Rotazione relativa nella cerniera "1" per deformazioni aste adiacenti ad essa

$$\delta'_{21} = \varphi''_{21} - \varphi'_{21} \qquad\qquad \delta'_{12} = 0 - \left(-\frac{1}{3} \cdot \frac{l}{EJ} \right)$$

$$\delta'_{21} = \frac{1}{3} \cdot \frac{l}{EJ}$$

Rotazione relativa δ''_{21} per cedimento elastico del vincolo 2 dovuto a $x_1 = 1$ posto in "1"



Per effetto del momento $x_1 = 1$ applicato alla cerniera 1 si ha, nella cerniera 2, una reazione rivolta verso l'alto:

$$f \cdot 2l - 1 = 0 \qquad f = \frac{1}{2l}$$

la forza sul cedimento è in senso opposto: verso il basso:

$$f = \frac{1}{2l}$$

Il cedimento elastico η è proporzionale alla forza f:

$$\eta = \frac{f}{K} \qquad\qquad \eta = \frac{1}{2l \cdot K}$$

Rotazione a destra del vincolo "2"per il suo cedimento dovuto a $x_1 = 1$ applicato in "1"

L'abbassamento della cerniera "2" non trasmette alcuna rotazione alla sua destra.

$$\varphi'_{21c} = 0$$

Rotazione a sinistra di "2"per il suo cedimento dovuto a $x_1 = 1$ applicato in "1"

L'innalzamento della cerniera 2 determina una rotazione oraria attorno ad essa dell'asta 1-2 :

$$\varphi''_{21c} = \frac{\eta}{2l} = \frac{1}{4l^2 \cdot K} = \frac{1}{4l^2 \cdot \frac{12EJ}{l^3}}$$

$$\varphi''_{21c} = \frac{1}{48} \cdot \frac{l}{EJ}$$

Rotazione relativa "1"per cedimento del vincolo"2" dovuto a $x_2 = 1$ applicato in "2"

È la differenza tra la rotazione a destra e a sinistra della sezione 1:

$$\delta''_{21} = \varphi''_{21c} - \varphi'_{21c} \qquad\qquad \delta''_{21} = 0 - \frac{1}{48} \cdot \frac{l}{EJ}$$

$$\delta''_{21} = -\frac{1}{48} \cdot \frac{l}{EJ}$$

Rotazione relativa δ_{21} globale nella sezione 2, dovuta al momento $x_1 = 1$ applica in "1"

È la somma della rotazione relativa dovuta alle deformazione dell'asta 1-2 e di quella per il cedimento elastico del vincolo "2":

$$\delta_{21} = \delta'_{21} + \delta''_{21} \qquad\qquad \delta_{21} = \frac{1}{3} \cdot \frac{l}{EJ} - \frac{1}{48} \cdot \frac{l}{EJ} = \frac{16-1}{48} \frac{l}{EJ}$$

$$\delta_{21} = \frac{15}{48} \cdot \frac{l}{EJ} \cdot$$

Rotazione relativa δ_{22}

È la rotazione relativa nella sezione “2” dovuta al momento unitario $x_2 = 1$ posto nella stessa sezione “2”

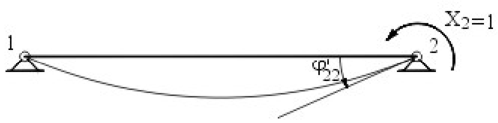
Si compone di due termini che tengono conto delle deformazioni, per effetto di $x_2 = 1$, dell’asta 1-2 a destra della sezione “2” e della rotazione relativa in questa indotta dal cedimento elastico .

$$\begin{cases} \delta'_{22} \quad \text{rotazione relativa nella cerniera "2", dovuta alla deformazione dell'asta 1-2, per effetto} \\ \qquad \text{del momento } x_2 = 1 \text{ posto nella cerniera stessa} \\ \\ \delta''_{22} \quad \text{rotazione relativa nella cerniera 2 per effetto del suo cedimento elastico} \end{cases}$$

Risulta

$$\delta_{22} = \delta'_{22} + \delta''_{22}$$

Rotazione relativa δ'_{22} *nella cerniera “2”per deformazioni dell’asta 1-2 dovuta a* $x_2 = 1$



Il momento $x_2 = 1$ posto nella cerniera “2” determina una rotazione alla sua sinistra, per effetto della deformazione elastica dell’asta 1-2. Nessuna rotazione si ha alla sua destra.

Rotazione a destra della sezione ”2”

$$\varphi''_{22} = 0$$

Rotazione a sinistra della sezione ”2”

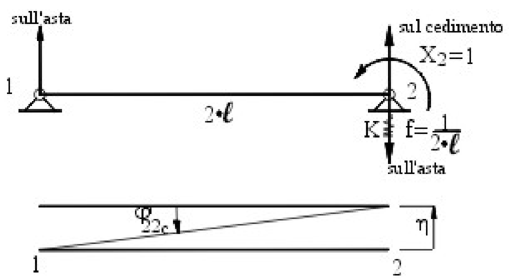
$$\varphi'_{22} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{2l}{EJ} \qquad -$$

Rotazione relativa δ'_{22}

$$\delta'_{22} = \varphi''_{22} - \varphi'_{22} \qquad\qquad \delta'_{22} = 0 - \left(-\frac{1}{3} \cdot \frac{2l}{3} \right)$$

$$\delta'_{22} = \frac{2}{3} \cdot \frac{l}{EJ} \qquad +$$

Rotazione relativa δ''_{22} *per cedimento elastico del vincolo”2”, dovuto a* $x_2 = 1$ *posto in esso*



Per effetto del momento $x_2 = 1$ in 2 si ha una reazione sulla cerniera 2:

$$f \cdot 2l - 1 = 0 \qquad f = \frac{1}{2l}$$

la forza sul cedimento è in senso opposto verso l’alto

$$f = \frac{1}{2l}$$

Il cedimento elastico η è proporzionale alla forza f:

$$\eta = \frac{f}{K} \qquad \eta = \frac{1}{2l \cdot K}$$

L’innalzamento della cerniera 2 determina una rotazione antioraria attorno ad essa dell’asta 1-2 posta alla sua sinistra. Nessuna rotazione si ha alla destra di “2”

Rotazione a sinistra del vincolo "2" per il suo cedimento, dovuto a $x_2 = 1$ *posto in esso*

$$\varphi''_{22c} = -\frac{\eta}{2l} = -\frac{1}{4l^2 \cdot K} = -\frac{1}{4l^2 \cdot \frac{12EJ}{l^3}}$$

$$\varphi''_{22c} = -\frac{1}{48} \cdot \frac{l}{EJ}$$

Rotazione a destra del vincolo "2" per il suo cedimento, dovuto a $x_2 = 1$ *posto in esso*

Il cedimento del vincolo 2 non determina alcun effetto a destra della cerniera 2; per cui la rotazione indotta a destra di essa è nulla:

$$\varphi'_{22c} = 0$$

Rotazione relativa "1" per cedimento del vincolo "2" dovuto a $x_1 = 1$

È la differenza tra la rotazione a destra e a sinistra della sezione 2:

$$\delta''_{22} = \varphi''_{22c} - \varphi'_{22c} \qquad \delta''_{22} = -\frac{1}{48} \cdot \frac{l}{EJ} - 0$$

$$\delta''_{22} = -\frac{1}{48} \cdot \frac{l}{EJ}$$

Rotazione relativa δ_{22} ***globale nella sezione 2, dovuta al momento*** $x_2 = 1$ ***applicato in essa***

È la somma della rotazione relativa dovuta alle deformazioni dell'asta 1-2 e di quella per il cedimento elastico del vincolo 2:

$$\delta_{22} = \delta'_{22} + \delta''_{22} \qquad \delta_{22} = \frac{2}{3} \cdot \frac{l}{EJ} - \left(-\frac{1}{48} \cdot \frac{l}{EJ} \right) = \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{48} \right) \cdot \frac{l}{EJ}$$

$$\delta_{22} = \frac{33}{48} \cdot \frac{l}{EJ} \cdot \quad +$$

Rotazione relativa δ_{20}

È la rotazione relativa nella cerniera "2" dovuta ai carichi (il solo carico P in questo caso).

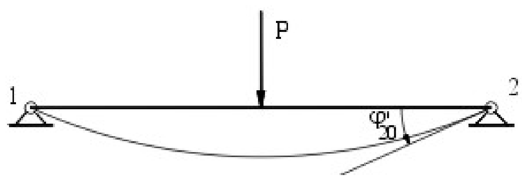
Considerato il carico P nel sistema isostatico associato, la rotazione relativa è dovuta alla deformazione elastica della sola asta 1-2, e dell'abbassamento del vincolo "2", per cedimento, che interessa ancora solamente l'asta 1-2.

Quindi la rotazione relativa δ_{20} si compone di due termini

- δ'_{20} rotazione relativa nella cerniera "2", dovuta alla deformazione dell'asta 1 - 2 per effetto del carico P applicato al centro di essa
- δ''_{20} rotazione relativa nella cerniera "2" dovuta al cedimento di essa, per effetto del carico P applicato sull'asta 1 - 2

Rotazione relativa δ'_{20} ***per deformazione aste***

È determinata dalla deformazione provocata dal carico P, posto al centro dell'asta 1-2 incernierata agli estremi.



Rotazione a destra di "2"

La rotazione a destra della cerniera "2" è nulla.

$$\varphi''_{20} = 0$$

Rotazione a sinistra di "2"

È la rotazione che il carico P, posto al centro dell'asta 1-2, provoca, per deformazione di essa, in corrispondenza della cerniera di estremità "2".

$$\varphi''_{20} = -\frac{1}{16}\cdot\frac{P\cdot(2l)^2}{EJ}$$

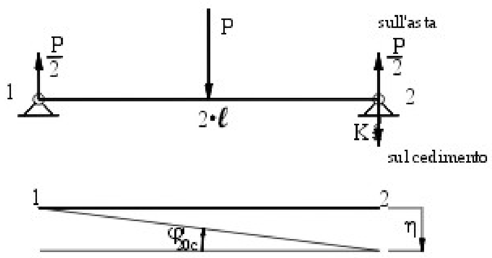
$$\varphi''_{20} = -\frac{1}{4}\cdot\frac{P\cdot l^2}{EJ}$$

Rotazione relativa nella cerniera "2" per deformazioni asta 1-2, dovuta al carico P

$$\delta'_{20} = \varphi''_{20} - \varphi'_{20} \qquad \delta'_{20} = 0 - \left(-\frac{1}{4}\cdot\frac{l^2}{EJ}\right)$$

$$\boxed{\delta'_{20} = \frac{1}{4}\cdot\frac{l^2}{EJ}}$$

Rotazione relativa δ''_{20} per cedimento elastico del vincolo 2 dovuto al carico P



Il carico P, posto al centro dell'asta 1-2, provoca sulle due cerniere reazioni uguali verso l'alto:

$$f = \frac{P}{2}$$

Sul cedimento elastico del vincolo "2" si ha un'azione verso il basso uguale e contraria a detta reazione:

$$f = \frac{P}{2}$$

Rotazione a sinistra del vincolo "2"per il suo cedimento, dovuto al carico P

L'abbassamento della cerniera 2 determina una rotazione oraria attorno alla cerniera 2 dell'asta alla sinistra di essa:

$$\varphi''_{20c} = \frac{\eta}{2l} = \frac{P}{4l\cdot K} = \frac{P}{4l\cdot\frac{12EJ}{l^3}}$$

$$\varphi''_{20c} = \frac{1}{48}\cdot\frac{Pl^2}{EJ}$$

Rotazione a destra del vincolo "2"per il suo cedimento dovuto al carico P

L'abbassamento della cerniera "2" non trasmette alcuna rotazione alla sua destra

$$\varphi'_{20c} = 0$$

Rotazione relativa "2"per cedimento del vincolo"2" dovuto al carico P

È la differenza tra la rotazione a destra e a sinistra della sezione 2:

$$\delta''_{20} = \varphi''_{20c} - \varphi'_{10c} \qquad \delta''_{20} = 0 - \left(\frac{1}{48}\cdot\frac{Pl^2}{EJ}\right)$$

$$\delta''_{0} = -\frac{1}{48}\cdot\frac{Pl^2}{EJ}$$

Rotazione relativa δ_{20} globale nella sezione 2, dovuta al carico P

È la somma della rotazione relativa dovuta alle deformazioni dell'asta 1-2 e di quella per il cedimento elastico:

$$\delta_{20} = \delta'_{20} + \delta''_{20} \qquad \delta_{20} = \frac{1}{4}\cdot\frac{l}{EJ} - \frac{1}{48}\cdot\frac{l}{EJ} = \frac{12-1}{48}\frac{l}{EJ}$$

$$\delta_{20} = \frac{11}{48}\cdot\frac{l}{EJ}\cdot$$

Riassumendo le rotazioni relative unitarie:

$$\delta_{11} = \frac{49}{48}\cdot\frac{l}{EJ}\cdot$$

$$\delta_{12} = \frac{15}{48}\cdot\frac{l}{EJ}\cdot$$

$$\delta_{10} = \frac{15}{48}\cdot\frac{l}{EJ}\cdot$$

$$\delta_{21} = \frac{15}{48}\cdot\frac{l}{EJ}\cdot$$

$$\delta_{22} = \frac{33}{48}\cdot\frac{l}{EJ}\cdot$$

$$\delta_{20} = \frac{11}{48}\cdot\frac{l}{EJ}\cdot$$

Sostituendo nel sistema delle due equazioni di congruenza (1) si ha:

$$\begin{cases} \dfrac{49}{48}\cdot\dfrac{l}{EJ}x_1 + \dfrac{15}{48}\cdot\dfrac{l}{EJ}x_2 + \dfrac{13}{48}\cdot\dfrac{Pl^2}{EJ} = 0 \\ \dfrac{15}{48}\cdot\dfrac{l}{EJ}x_1 + \dfrac{33}{48}\cdot\dfrac{l}{EJ}x_2 + \dfrac{11}{48}\cdot\dfrac{Pl^2}{EJ} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 49\cdot x_1 + 15\cdot x_2 = -13\cdot Pl \\ 15\cdot x_1 + 33\cdot x_2 = -11\cdot Pl \end{cases}$$

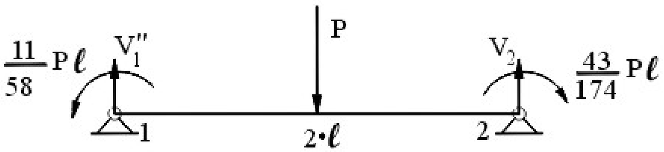
$$\Delta = \begin{vmatrix} 49 & 15 \\ 15 & 33 \end{vmatrix} = 1392 \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} -13\cdot Pl & 15 \\ -11\cdot Pl & 33 \end{vmatrix} = -264Pl$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 49 & -13\cdot Pl \\ 15 & -11\cdot Pl \end{vmatrix} = -344Pl$$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = \dfrac{-264 \cdot Pl}{1392} \\ x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = \dfrac{-344 \cdot Pl}{1392} \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = -\dfrac{11}{58} \cdot Pl \\ x_2 = -\dfrac{43}{174} \cdot Pl \end{cases} \quad (\textit{sensi opposti al prefissato})$$

Si ottengono gli stessi risultati determinati con l'utilizzo dei lavori virtuali.

Asta 1-2



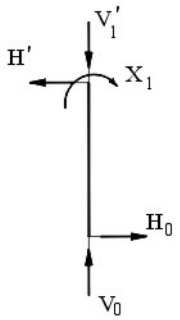
Reazioni ai vincoli

$$V_1'' \cdot 2l - Pl - \frac{11}{58} \cdot Pl + \frac{43}{174} \cdot Pl = 0 \qquad V_1'' = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{11}{58} - \frac{43}{174}\right) \cdot P = \frac{1}{2} \cdot \frac{164}{174} \cdot P$$

$$V_1'' = \frac{41}{87} \cdot P \quad \uparrow$$

$$V_2 = P - \frac{41}{87} \cdot P \qquad V_2 = \frac{46}{87} \cdot P \quad \uparrow$$

Asta 0-1



La reazione V_1'' è la forza che l'estremità 1 dell'asta 1-0 esercita su quella della 1-2. Quindi sull'estremità "1" dell'asta 1-0 si eserciterà una forza V_1' uguale e contraria alla V_1''.

$$V_1' = V_1'' = \frac{41}{87} \cdot P$$

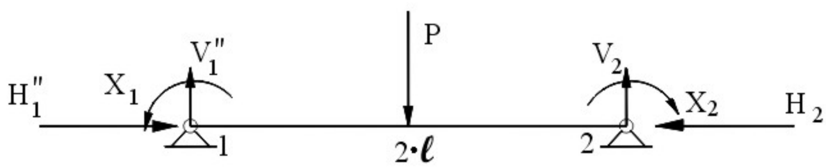
Equilibrio dei momenti rispetto all'estremità "0"

$$H_0 \cdot l - x_1 = 0 \qquad \text{con} \qquad x_1 = \frac{11}{58} Pl \quad \text{senso opposto a quello sull'asta 1-2}$$

$$H_0 \cdot l - \frac{11}{58} Pl = 0 \qquad H_0 = \frac{11}{58} P \quad \rightarrow$$

per l'equilibrio risulta

$$H_1' = \frac{11}{58} P \quad \leftarrow \qquad V_0 = \frac{41}{87} \cdot P \quad \uparrow$$

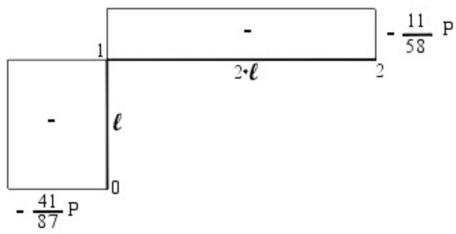


Sulla estremità "1"dell'asta 1-2 si ha una forza orizzontale $H_1^{''}$ uguale e contraria alla $H_1^{'}$

$$H_1^{''} = \frac{11}{58}P \qquad \text{all'estremità "2" si ha} \qquad H_2 = \frac{11}{58}P$$

Si ottengono gli stessi diagrammi

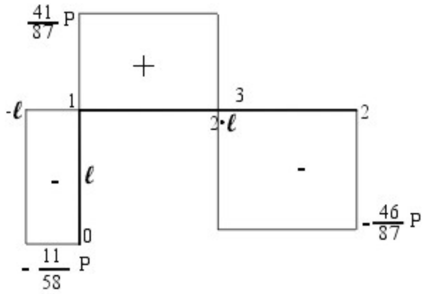
Sforzo normale



$$N_{0\_1} = -\frac{41}{87}P$$

$$N_{1\_2} = -\frac{11}{58}P$$

Sforzo di taglio

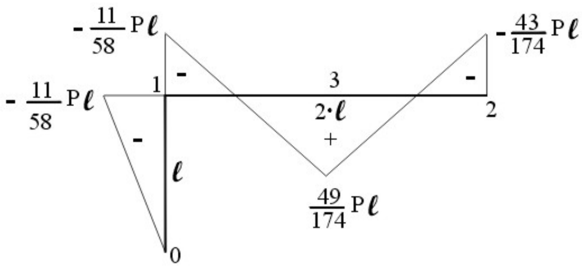


$$T_{0-1} = -\frac{11}{58}P$$

$$T_{1-3} = \frac{41}{87}P$$

$$T_{2-3} = -\frac{46}{87}P$$

Momento flettente



$$M_0 = 0$$

$$M_1 = -\frac{11}{58}Pl$$

$$M_3 = -\frac{41}{87}Pl - \frac{11}{58}Pl = \frac{82-33}{174}Pl$$

$$M_3 = \frac{49}{174}Pl$$

$$M_2 = -\frac{43}{174}Pl$$