

CAPITOLO 6

NAVIGAZIONE LOSSODROMIA E ORTODROMICA

6.0 – La navigazione utilizza differenti termini per descrivere i diversi metodi matematici per definire la direzione e la distanza tra due differenti punti sulla superficie della terra. Si possono definire le seguenti traiettorie:

- navigazione per parallelo;
- navigazione piana;
- navigazione lossodromia;
- navigazione ortodromica;
- navigazione mista.

Tra questi metodi due di essi racchiudono anche gli altri: la navigazione lossodromia e la navigazione ortodromica.

6.1 – Definizione della lossodromia

La lossodromia è quella curva sulle superfici di rotazione (sfera, ellissoide, cilindro) che taglia i meridiani sotto angolo costante; le navi e/o gli aerei che governano con la bussola magnetica e/o giroscopica che mantengono la rotta costante percorrono una curva sulla superficie terrestre la cui caratteristica principale è quella di intersecare i meridiani sotto angolo costante; in particolare, quando si naviga su una terra considerata sferica la curva percorsa da un mobile con rotta costante si chiama *lossodromia sferica (rumbe line)*.

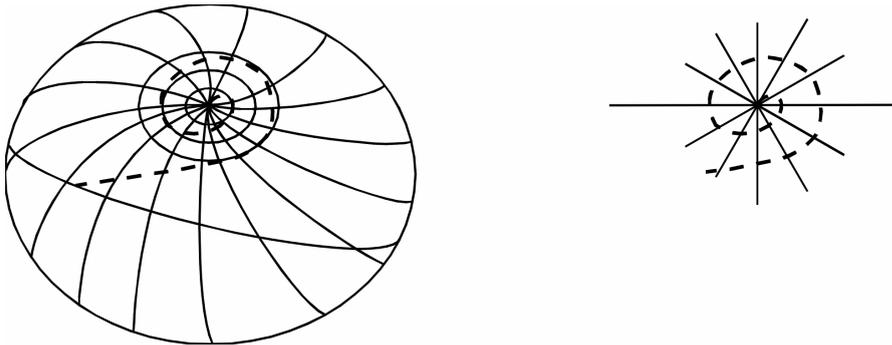


Figura 6.1 – Rappresentazione della lossodromia sulla sfera e della spirale logaritmica sul piano

La lossodromia sferica è dunque quella curva che sulla sfera forma angoli costanti con tutti i meridiani; la lossodromia sferica ha sulla sfera la stessa proprietà che ha la spirale logaritmica sul piano (curva piana che taglia sotto angoli costanti le infinite rette uscenti da un punto chiamato polo) (v. figura 6.1).

In particolare l'equatore, i paralleli ed i meridiani sono casi particolari di lossodromie; l'equatore ed i paralleli sono curve che intersecano i meridiani sotto l'angolo di 90° o 270° mentre i meridiani sono lossodromie che formano con i meridiani angoli di 0° e 180° .

6.2 – Navigazione per parallelo – Allontanamento o appattamento

Si definisce appattamento (m) la distanza tra due punti che si trovano sullo stesso parallelo; la lossodromia in questo caso è percorsa con $R_v=90^\circ$ oppure con $R_v=270^\circ$. Quando la nave viaggia lungo l'equatore tra i meridiani passanti per A (punto di partenza, I) e B (punto di arrivo, I') l'appattamento è dato da:

$$m = I' - I = DI \quad (6.1)$$

e l'appattamento m rappresenta la distanza tra A e B ; se i punti A' e B'

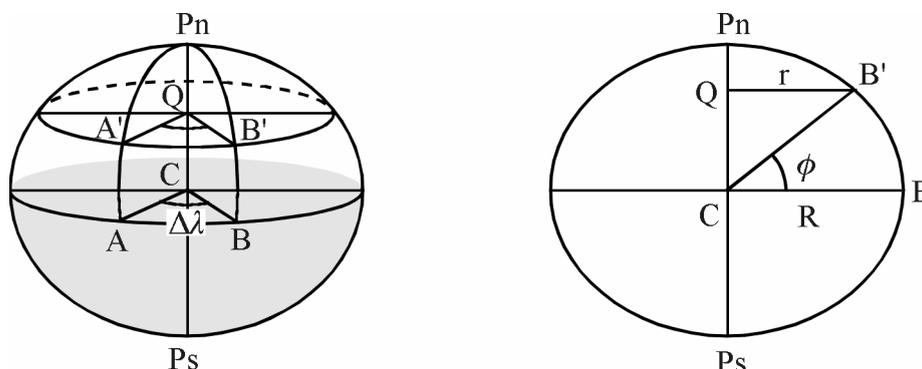


Figura 6.2 – Relazione fra arco di equatore e arco di parallelo

si trovano sul parallelo di latitudine f , la differenza di longitudine è sempre la stessa $DI = I' - I$ mentre la distanza, rappresentata dall'appattamento m , è fornita dalla seguente relazione che lega l'arco di parallelo con il corrispondente arco di equatore:

$$m = m = DI \cos f \quad (6.2)$$

Questa relazione si ottiene direttamente dalla figura 6.2b dalla quale si ricava che il raggio r del parallelo è dato dal prodotto del raggio R dell'equatore per il coseno della latitudine f :

$$r = R \cos f = \cos f \quad (6.3)$$

con $R=1$ nel caso di sfera di raggio unitario. La (6.2) fornisce la seguente proprietà: l'arco di parallelo dipende dalla sua latitudine; così a parità di ΔI più alta è la latitudine più piccolo è il corrispondente arco di parallelo come riportato nella seguente tabella 6.1:

Tabella 6.1 – Variabilità dell'arco di parallelo in funzione della Lat. (f)

Punto di partenza		Punto di arrivo		R_v	$m = m$
Lat. (f)	Long. (I)	Lat. (f')	Long. (I')	gradi	miglia
20°N	15°E	20°N	20°E	90°	281.9
40°N	15°E	40°N	20°E	90°	229.8
60°N	15°E	60°N	20°E	90°	150.0
75°N	15°E	75°N	20°E	90°	77.6
20°N	115°E	20°N	25°E	270°	5074.3
40°N	115°E	40°N	25°E	270°	4136.6
60°N	115°E	60°N	25°E	270°	2700.0
75°N	115°E	75°N	25°E	270°	1396.7

6.3 – Navigazione piana

Quando una nave percorre una lossodromia che forma un angolo con il meridiano e non coincide al caso di navigazione per parallelo, allora si può pensare che la distanza e la rotta tra il punto di partenza $A(f, I)$ ed il punto di arrivo $B(f', I')$ può essere calcolato dal triangolo rettangolo infinitesimo piano, i cui cateti sono rappresentati dalla differenza di latitudine Δf e dall'appartamento m

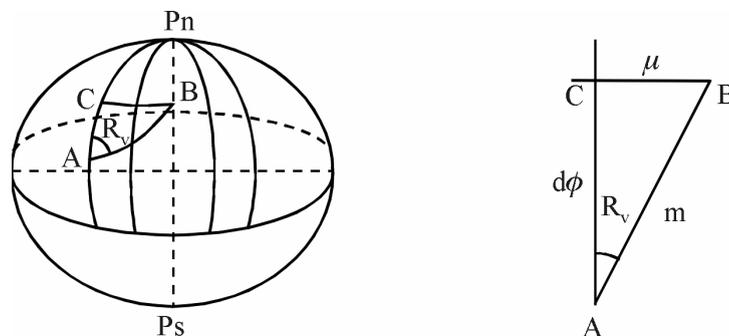


Figura 6.3 – Lossodromia sulla sfera terrestre e triangolo piano

$$m = m \sin R_v \quad , \quad Df = m \cos R_v \quad , \quad \tan R_v = \frac{m}{Df} \quad (6.3)$$

Dalle (6.3) si possono ricavare due relazioni per il calcolo della distanza e dell'angolo della lossodromia quando sono noti le coordinate di A (f, l) e B (f', l'):

$$m = \frac{l}{\sin R_v} \quad , \quad m = \frac{Df}{\cos R_v} \quad (6.4)$$

La scelta delle formule (6.4) per il calcolo della distanza dipende dalla variabilità della funzione trigonometrica a denominatore.

Il triangolo piano può essere considerato come somma di tanti piccoli triangoli infinitesimi di archi di parallelo. Sommati tra loro, costituiscono l'appartamento; essi possono essere considerati tutti uguali dato che l'angolo della l'arco lossodromico è costante; in prima approssimazione, essi possono essere considerati piani; da qui le giustificazioni per cui sono possibili utilizzare le formule (6.3) e (6.4).

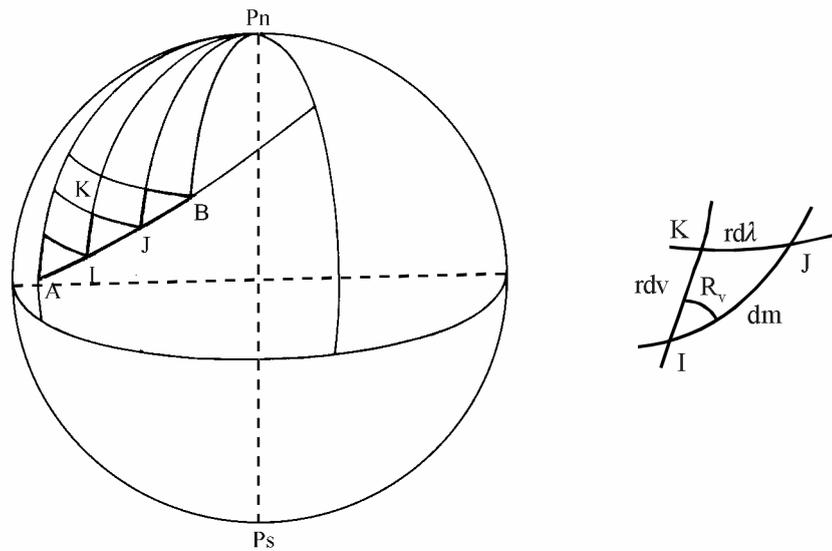


Figura 6.4 – Scomposizione della lossodromia e triangolo isometrico infinitesimo

Consideriamo uno dei tanti triangoli infinitesimi passanti per due punti generici appartenenti alla lossodromia l e siano I e J due punti molto prossimi fra loro. Il meridiano di I ed il parallelo J si incontrano nel punto K e costituiscono appunto il generico triangolo infinitesimo (v. figura 6.4) mistilineo i cui lati sono dati dalle seguenti relazioni:

$$IK = r dv \quad , \quad IJ = dm \quad , \quad KJ = rd l \quad (6.5)$$

con r raggio del parallelo, v la latitudine isometrica o crescente e l'angolo $K\hat{I}J$ coincidente con l'angolo lossodromico o rotta vera (R_v); considerando piano il triangolo di figura 6.4 si ottiene la seguente equazione differenziale del primo ordine:

$$dI = \tan R_v dv \quad (6.6)$$

che integrata fornisce:

$$\int_I^{I'} dI = I' - I = \tan R_v \int_v^{v'} dv = (v' - v) \tan R_v \quad (6.7)$$

che normalmente viene scritta nel seguente modo:

$$I' - I = (f'_c - f_c) \tan R_v \quad (6.8)$$

la (6.8) rappresenta l'equazione della lossodromia passante per punti $A(f, I)$ e $B(f', I')$ appartenenti alla terra ellissoidica o sferica. La latitudine crescente per l'ellissoide è la seguente:

$$f_c = \frac{10800}{p} \log \left[\tan \left(45^\circ + \frac{f}{2} \right) \left(\frac{1 - e \sin f}{1 + e \sin f} \right)^{\frac{e}{2}} \right] \quad (6.9)$$

e per la terra sferica ($e=0$):

$$f_c = \frac{10800}{p} \log \left[\tan \left(45^\circ + \frac{f}{2} \right) \right] \quad (6.10)$$

con e l'eccentricità dell'ellissoide terrestre e $\frac{10800}{p} = 3437.75$. Le relazioni (6.9) e (6.10) sono espresse per mezzo del logaritmo decimale; in questo caso le due relazioni assumono la seguente forma:

$$f_c = 7915.7 \log_{10} \left[\tan \left(45^\circ + \frac{f}{2} \right) \left(\frac{1 - e \sin f}{1 + e \sin f} \right)^{\frac{e}{2}} \right]$$

$$f_c = 7915.7 \log_{10} \left[\tan \left(45^\circ + \frac{f}{2} \right) \right]$$

la cui trasformazione da logaritmo neperiano a decimale è data da:

$$\log x = \log_{10} x \frac{1}{\log_{10} e} \quad \text{per cui} \quad \frac{10800}{p} \frac{1}{\log_{10} e} = 7915.7$$

La (6.10), comunque, è legata alla costante di integrazione che può essere facilmente calcolata considerando la longitudine del punto (*punto di flesso*) nel quale la lossodromia incontra l'equatore:

$$\mathbf{f}_C = (\mathbf{I} - \mathbf{I}_F) \cot R_V \quad (6.11)$$

È facile dedurre che la lossodromia è rappresentata da una retta sulla carta di Mercatore le cui relazioni di corrispondenza sono:

$$x = \mathbf{I} \quad , \quad y = v = \mathbf{f}_C \quad (6.12)$$

che sostituite nella (6.11) danno la seguente equazione di una retta:

$$y = (x - x_F) \cot R_V$$

di coefficiente angolare $m = \cot R_V$.

La proprietà, precedentemente detta, che la lossodromia è associabile ad una spirale logaritmica, si può ora dimostrare esprimendo l'equazione della lossodromia per mezzo delle seguenti relazioni di corrispondenza della carta stereografica equatoriale (polare) costruita per terra sferica di raggio unitario:

$$w = \mathbf{I} \quad , \quad \mathbf{r} = \tan\left(45^\circ - \frac{\mathbf{f}}{2}\right) = \cot\left(45^\circ + \frac{\mathbf{f}}{2}\right) \quad (6.13)$$

Osservando che la (6.10) può esprimersi nel seguente modo:

$$\tan\left(45 + \frac{\mathbf{f}}{2}\right) = e^{(x - x_F) \cot R_V}$$

per cui la (6.13) può scriversi nel seguente modo:

$$\mathbf{r} = \tan\left(45 - \frac{\mathbf{f}}{2}\right) = e^{-(x - x_F) \cot R_V} \quad (6.14)$$

che rappresenta appunto l'equazione, sul piano, di una spirale logaritmica in coordinate polari; nel caso si considera la carta stereografica polare, seguendo lo stesso procedimento si ha:

$$\mathbf{r} = 2 \tan\left(45 - \frac{\mathbf{f}}{2}\right) \quad , \quad \mathbf{r} = 2e^{-(x - x_F) \cot R_V} \quad (6.15)$$

La lossodromia, curva nello spazio, è caratterizzata da due curvatures: la flessione e la torsione; considerata, poi come curva appartenente alla superficie terrestre, è anche caratterizzata da altre due curvatures: la normale e la geodetica. Queste proprietà e le relative equazioni possono

essere trovate riprendendo le espressioni analitiche relative allo studio delle curve nello spazio (capitolo relativo alla geometria differenziale).

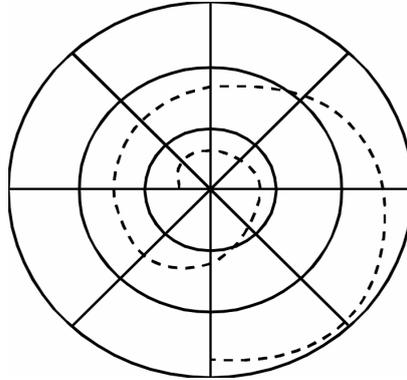


Figura 6.5 – Rappresentazione della lossodromia nella carta stereografica equatoriale

È possibile però studiare due particolari proprietà:

- la lossodromia si avvolge ai poli senza mai raggiungerli;
- infinite sono le lossodromie che congiungono due punti della superficie terrestre.

La prima proprietà si dimostra considerando una lossodromia che nel punto generico $A(\mathbf{f}, \mathbf{I})$ di coordinate note formi un angolo differente da $R_v = 0^\circ = 180^\circ$ o $R_v = 90^\circ = 270^\circ$. Dalla relazione della lossodromia (6.8), si osserva che la lossodromia raggiunge il polo ($\mathbf{f}_c = \infty$) solo dopo uno spostamento in longitudine $\mathbf{DI} = \mathbf{I}' - \mathbf{I} = \infty$; questa condizione impone che la curva si avvolgerà un numero infinito di volte per raggiungere una $\mathbf{DI} = \infty$, cosicché considerando il concetto di infinito, la curva non raggiungerà mai il polo, si suole dire che il polo è un punto asintotico per la lossodromia.

La seconda proprietà si ricava facilmente considerando due punti sulla superficie terrestre di coordinate note $A(\mathbf{f}, \mathbf{I})$ e $B(\mathbf{f}, \mathbf{I}')$; considerando che il punto B può essere raggiunto dopo una $\mathbf{DI}_K = \mathbf{DI} + K \cdot 360^\circ$ con K numero intero si trovano tante rotte in termini di K :

$$[\tan R_v]_K = \frac{\Delta \mathbf{I} + K \cdot 360}{\Delta \mathbf{f}_c} \quad (6.15)$$

nella quale la differenza di longitudine DI e di latitudine Df_C sono espresse in primi. Assegnando a K differenti valori $(0, 1, 3, \dots, n)$ si ottengono differenti valori di $[R_v]_K$ che permettono comunque di raggiungere il punto B dopo $K \cdot 360^\circ$.

Se al posto di $DI < 180^\circ$ si considera il suo esplemento, si perviene con lo stesso ragionamento ad un'altra infinità di lossodromie passanti per i punti A e B ; infine se $DI = 180^\circ$ punti di partenza ed arrivo su meridiani opposti, le due serie di lossodromie risultano simmetriche rispetto al piano meridiano contenente i due punti. La figura 6.6 illustra i due casi considerati.

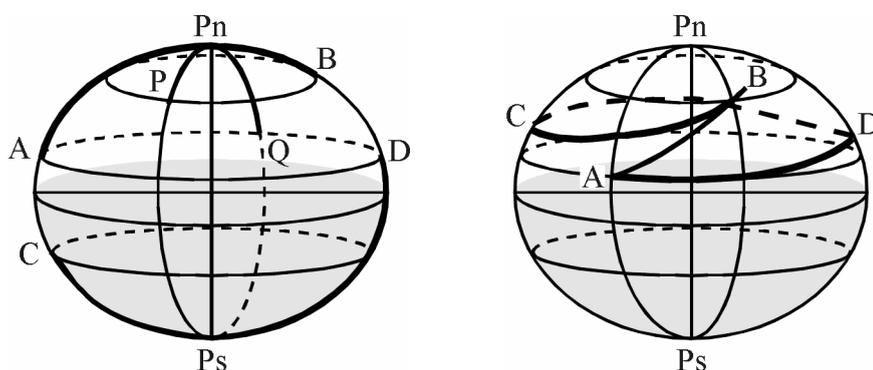


Figura 6.6 – Lossodromie per $\Delta I = 180^\circ$ e $\Delta I < 180^\circ$.

6.4 - Problemi di navigazione lossodromica

È stato precedentemente chiarito che alla terra reale è possibile sostituire sia un ellissoide di rotazione o una sfera. In tutte e due i casi la lossodromia gode delle proprietà precedentemente documentate. Pertanto i problemi di navigazione lossodromica possono essere svolti sia con l'ipotesi di terra ellissoidica che di terra sferica.

6.4.1 – Navigazione lossodromica su terra ellissoidica

Siano $A(f, I)$ e $B(f', I')$ due punti appartenenti alla superficie ellissoidica e sia l la lossodromia passante per essi e, per quanto detto precedentemente con $DI < 180^\circ$; l'arco di lossodromia compresa tra i punti rappresenta la *distanza lossodromica* m e R_v , l'angolo che la curva forma con il meridiano detta anche *rotta lossodromica*.

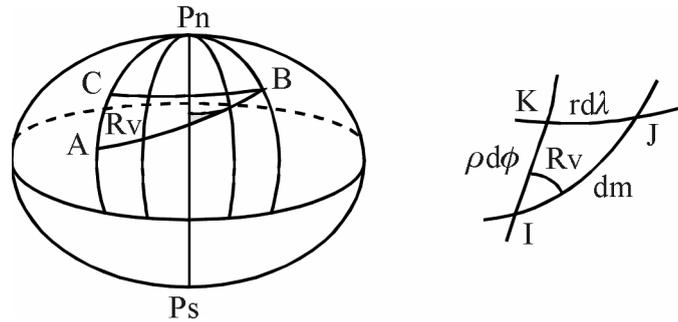


Figura 6.7 – Lossodromia sull'ellissoide e triangolo ellissoidico infinitesimo

Consideriamo, ora, un elemento lineare dm di arco ellissoidica di estremi IJ ; il parallelo passante per J incontra il meridiano passante per I nel punto K definendo così un triangolo infinitesimo mistilineo rettangolo in K . I lati di questo triangolo sono:

$$KI = \text{arco di meridiano}$$

$$KJ = \text{arco di parallelo}$$

$$IJ = \text{arco di lossodromia}$$

Dopo di che, dal triangolo rettangolo si ha:

$$dM = dm \cos R_v$$

che integrata tra i limiti M e M' e da 0 a m si ha:

$$\int_M^{M'} dM = DM = M' - M = \cos R_v \int_0^m dm = m \cos R_v \quad (6.16)$$

con DM la lunghezza dell'arco di meridiano (arco di ellisse) compreso tra i paralleli passanti per $A(f, I)$ e $B(f, I')$.

L'arco di meridiano è fornito da apposite tavole al variare della latitudine e dipende essenzialmente dal parametro dimensionale (asse maggiore) e da quello di forma (schiacciamento f o eccentricità e); una relazione approssimata della lunghezza dell'arco di meridiano, ma valida per i calcoli lossodromici di navigazione, approssimata al decimo di primo è la seguente:

$$M = a \left[\left(1 - \frac{1}{4}e^2 - \frac{3}{64}e^4 \right) f - \frac{3}{8}e^2 \left(1 + \frac{1}{4}e^2 \right) \sin 2f + \frac{15}{256}e^4 \sin 4f + \dots \right] \quad (6.17)$$

Un algoritmo completo per il calcolo della lunghezza dell'arco di meridiano con accuratezza centimetrica è riportato in *Appendice A*.

Le relazioni che risolvono i problemi di navigazione sull'ellissoide sono la (6.8) e la (6.16) purché si disponga di tavole delle latitudini crescenti oppure, in sostituzione, utilizzare la relazione (6.9); i valori di f_C e M vanno considerati positivi o negativi a secondo del segno della latitudine.

Nel risolvere i problemi di navigazione lossodromica conviene operare con rotte espresse nel sistema quadrantale: il primo segno dipende dal cardine della differenza di latitudine (Df), il secondo dal segno della differenza di longitudine (DI):

- per il primo: $R = N R_v E$;
- per il secondo: $R = S 180^\circ - R_v E$
- per il terzo: $R = S 180^\circ + R_v W$
- per il quarto: $R = N 360^\circ - R_v W$

6.4.2 – I problema della lossodromia

Il I problema si enuncia nel seguente modo:

Note le coordinate del punto di partenza $A(f, I)$, la rotta lossodromica R_v ed il percorso m determinare le coordinate del punto di arrivo $B(f', I')$.

Il problema si risolve nel seguente modo:

- si calcola la ΔM con la relazione (6.16);
- si calcola $M'(B) = M(A) + (\pm \Delta M)$;
- si passa da $M' \rightarrow f'(B)$;
- si calcola $Df = f' - f$;
- si calcola la f_C e f'_C per mezzo della relazione (6.9);
- si calcola la Df_C ;
- si calcola DI con la relazione (6.8);
- si calcola la longitudine del punto di arrivo $I' = I + (\pm \Delta I)$;

Prima di risolvere i calcoli occorre trasformare la rotta lossodromica da circolare a quadrantale in modo da poter assegnare i segni a DM, Df_C, Df, DI .

Tabella 6.2 – Calcoli per il I problema della lossodromia sull'ellissoide

DATI	latitudine	Longitudine	Rotta	cammino
	40° N	17°20' W	068°	475.5 mg
CALCOLATI	$M = + 2391.8$	$f_C = + 2607.9$		
	$\Delta M = +178.13$	$f'_C = +2844.8$		
	$M' = + 2569.9$	$\Delta f_C = +236.9$ $\Delta I = +586.3$	$f' = 42^\circ 58.1' N$ $I' = 7^\circ 31.3' W$	

Esercizi per il I Problema

Lat. Partenza	Long. Partenza	Rotta	cammino	Lat. Arrivo	Long. arrivo
40°20.0' N	14°15.0' E	120°	250.0	38°15.0' N	18°54.8' E
40°20.0' S	14°15.0' W	80°	250.0	39°36.6' S	08°53.7' W
35°14.7' S	17°27.7' W	350°	350.7	29°29.3' S	18°39.9' W
60°55.5' S.	150°15.7' W	60°	1250.7	50°30.2' S	117°58.7' W

6.4.3 – II problema della lossodromia

Il II problema si enuncia nel seguente modo:

Note le coordinate del punto di partenza $A(f, I)$ e le coordinate del punto di arrivo $B(f', I')$, calcolare la rotta lossodromica R_v e il percorso lossodromico m .

Il calcolo prevede le seguenti operazioni:

- Si passa da $f \rightarrow f_C$ e da $f' \rightarrow f'_C$;
- si calcola Df_C e DI ;
- si calcola la rotta lossodromica quadrantale con la relazione $\tan R_v = \frac{DI}{Df_C}$ ed i cui cardini sono assegnati da quelli di Df_C e DI ;
- si calcola M' e M con la relazione che definisce la lunghezza dell'arco di meridiano oppure con le apposite tavole di trasformazione;

- si calcola la seguente differenza $DM = M' - M$;
- si calcola il percorso lossodromico con la relazione $m = DM \sec R_V$.

Tabella 6.3 – Calcoli per il II problema della lossodromia sull'ellissoide

<i>Dati</i>	<i>Latitudine</i>	<i>Longitudine</i>	<i>Latitudine</i>	<i>Longitudine</i>
	35°20.0' N	17°20.7' E	45°34.7' N	27°55.7' E
Calcolati	$M = +2092.1$, $f_C = +2255.4$		$M' = 2726.4$, $f_C' = +3062.7$	
	$\Delta M = +634.3$, $\Delta f_C = 807.3$, $\Delta I = +635.0$, $\Delta f = +614.7$			
	$\tan R_V = \frac{\Delta I}{\Delta f_C}$, $R_V = N 38.1^\circ E$		$m = \Delta M \sec R_V$, $m=780.9\text{mg}$	

Esercizi per il II Problema

Lat. Partenza	Long. Partenza	Lat. Arrivo	Long. arrivo	Rotta	m
40°20.0' N	14°15.0' E	37°15.0' N	28°54.8' E	105.1	710.1
40°20.0' S	14°15.0' W	36°36.6' S	18°53.7' W	315.7	312.2
35°14.7' S	17°27.7' W	33°29.3' S	26°39.9' W	283.0	467.8
60°55.5' S	150°15.7' W	58°30.2' S	97°58.7' W	84.75	1587.9

6.4.4 – Navigazione lossodromica sulla Terra sferica

Consideriamo il triangolo rettangolo sferico mistilineo infinitesimo sulla sfera di raggio unitario definito dai punti PQK rettangolo in K , ed i cui lati sono:

$$\begin{aligned}
 PK &= d\mathbf{f} \quad , \quad \text{arco di meridiano} \\
 KQ &= dp = d\mathbf{m} \quad , \quad \text{arco di parallelo} \\
 PQ &= dm \quad , \quad \text{arco di lossodromia}
 \end{aligned}
 \tag{6.18}$$

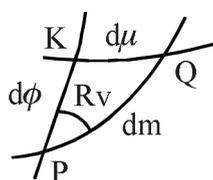


Figura 6.8 – Triangolo infinitesimo sulla sfera

Gli elementi (6.18), applicando le relazioni trigonometriche al triangolo piano, danno le due seguenti relazioni:

$$d\mathbf{f} = d\mathbf{m}\cos R_v \quad , \quad d\mathbf{n} = d\mathbf{m}\sin R_v \quad (6.19)$$

la cui integrazione fornisce le relazioni:

$$\mathbf{Df} = \mathbf{m}\cos R_v \quad , \quad \mathbf{n} = \mathbf{m}\sin R_v \quad (6.20)$$

Si fa osservare che la seconda delle (6.20) nota come appartamento o allontanamento rappresenta la somma di tanti piccoli archetti di parallelo dei triangoli infinitesimi relativi a tutti gli elementi lineari di cui è costituito l'arco lossodromico compreso tra il punto di partenza e quello di arrivo; la prima delle (6.20) rappresenta la differenza di latitudine corrispondente all'arco lossodromico. I segni di \mathbf{Df}, \mathbf{m} dipendono, come già precedentemente detto, dai segni della rotta quadrantale.

Per ottenere la differenza di longitudine, osserviamo che tra i paralleli compresi tra il punto di partenza e quello di arrivo, esiste un parallelo il cui appartamento è uguale proprio a \mathbf{m} ; se indichiamo con \mathbf{f}_m la latitudine di questo parallelo, allora per la ben nota relazione tra arco di parallelo e il corrispondente arco di equatore, è possibile calcolare la differenza di longitudine:

$$\begin{aligned} \mathbf{Dl} &= \mathbf{n} \sec \mathbf{f}_m \\ \cos \mathbf{f}_m &= \frac{\mathbf{m}}{\mathbf{Dl}} \end{aligned} \quad (6.21)$$

Si può dimostrare che la latitudine \mathbf{f}_m è prossima al valore della latitudine media tra il punto di partenza e quello di arrivo:

$$\mathbf{f}_m = \frac{\mathbf{f} + \mathbf{f}'}{2} \quad (6.22)$$

per cui la (6.21) può essere sostituita con la seguente relazione:

$$\mathbf{Dl} = \mathbf{n} \sec \mathbf{f}_m \quad (6.23)$$

nota come formula approssimata della differenza di longitudine.

6.5 – Navigazione piana.

Le formule della navigazione lossodromica possono essere risolte graficamente mediante i seguenti tre triangoli piani rettangoli e fissando una opportuna scala:

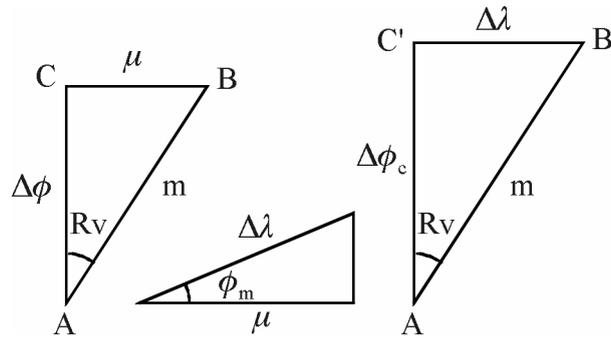


Figura 6.9 – Navigazione piana – Triangolo di rotta, del parallelo medio e di Mercatore

Questi triangoli servono a risolvere graficamente i due problemi lossodromici; il triangolo di rotta fornisce lo spostamento in latitudine e l'appartamento; il triangolo del parallelo medio trasforma l'appartamento in differenza di longitudine; il triangolo di Mercatore rappresenta quello che si traccia sulla carta di Mercatore quando si unisce un punto di partenza con un punto di arrivo.

Inoltre, con le formule della navigazione lossodromica, è stato possibile costruire delle tavole, dette appunto Tavole del punto, costruite con un passo angolare di un grado per la rotta e la latitudine media e passo di un miglio per il percorso.

Un altro metodo di risolvere le formule della navigazione lossodromica sono le tavole logaritmiche che oggi sono state completamente sostituite dalle calcolatrici tascabili.

Infine è esposta una risoluzione grafica dei due problemi sulla carta di Mercatore, utilizzando soltanto la scala costante delle longitudini. Per ottenere la posizione del punto di arrivo $B(\mathbf{f}', \mathbf{l}')$ conoscendo quello di partenza, la rotta ed il cammino; per la costruzione del triangolo, si traccia una semiretta inclinata sul meridiano di un angolo pari alla rotta a partire dal punto A ; su questa semiretta si porta il percorso m misurato sulla scala delle longitudini, ottenendo il punto B' (v. figura 6.10); quindi, si abbassa da esso la perpendicolare al meridiano, ottenendo il punto C' ; il triangolo $AB'C'$ è il *triangolo di rotta*: la distanza AC' , misurata sulla scala delle longitudini, rappresenta la differenza di latitudine Df che sommata alla latitudine di partenza da quella di arrivo $\mathbf{f}' = \mathbf{f} + Df$. Il parallelo del punto di arrivo individua sul meridiano passante per A il punto C dal quale, tracciando il parallelo, si individua il punto B ; il segmento BC rappresenta la differenza di longitudine DI

con cui si ottiene poi la longitudine del punto di arrivo: $I' = I + DI$; il segmento AC rappresenta la Df_c .

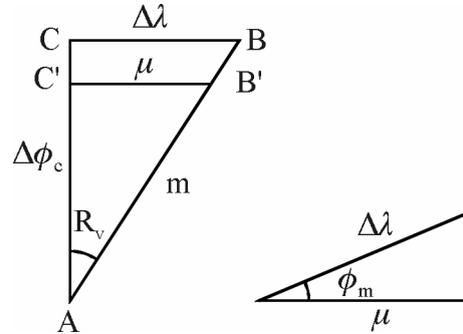


Figura 6.10 – Triangolo di Mercatore e del parallelo medio

Il triangolo ABC , così ottenuto, rappresenta il *triangolo di Mercatore*.

6.5 - Navigazione ortodromica sulla sfera

Se si considerano due punti sulla superficie terrestre, considerata sferica, l'intersezione del piano contenente detti punti e passante per il centro (in questo caso il piano contiene le normali alla superficie), determina una curva che esprime la minima distanza tra detti punti. Detta curva rappresenta una *circonferenza massima* e rappresenta una *geodetica* sulla sfera; in navigazione la circonferenza massima (*CM*) è detta *ortodromia*.

La *CM* incontra l'equatore terrestre in due punti, detti nodi; per convenzione, quello che si trova nell'emisfero orientale, è detto *nodo principale*.

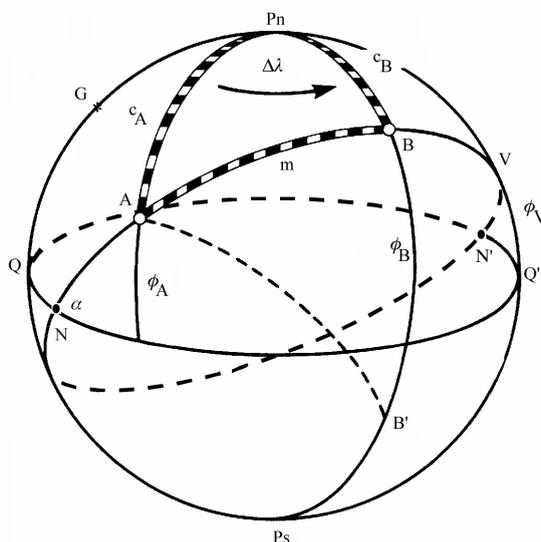


Figura 6.11 – Triangolo ortodromico

La *CM* incontra i meridiani sotto angoli differenti, si sviluppa metà nell'emisfero settentrionale e metà in quello meridionale; i due punti della *CM* che hanno la massima latitudine sono detti *vertici*; la differenza di longitudine tra i due vertici è di 180° mentre tra un vertice ed un nodo è di 90° ; l'angolo tra la *CM* ed il vertice è di 90° .

Ogni *CM* sulla sfera è individuata, senza ambiguità, da due parametri che sono caratteristici della stessa *CM*: la *longitudine del nodo* I_N e l'*inclinazione* a della *CM* sull'equatore; quest'ultimo parametro è uguale alla latitudine del vertice; l'inclinazione a della *CM*, per convenzione è misurata sul nodo principale nel senso antiorario (verso l'emisfero nord); esiste, infine, una relazione tra l'inclinazione e la latitudine del

vertice: se $a < 90^\circ$ la latitudine del vertice $f_v = a$, se invece $a > 90^\circ$ $f_v = 180^\circ - a$.

6.5.1 – Equazione della circonferenza massima

Consideriamo un generico punto sulla CM di coordinate $A(f, I)$ ed il triangolo sferico di vertici NAA_1 rettangolo in A_1 .

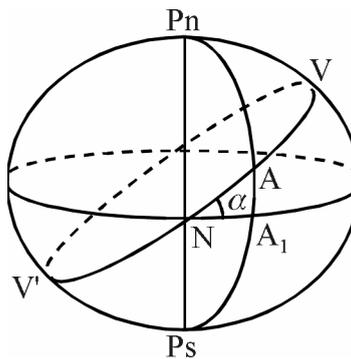


Figura 6.12 – CM e triangolo sferico

Applicando le regole sui triangoli sferici rettangoli si ha:

$$\tan f = \tan a \sin(I - I_N) \quad (6.24)$$

La (6.24) rappresenta l'equazione della CM dato che fissato un meridiano I , che individua sulla CM il punto P , si ottiene la sua latitudine f ; cosicché al variare I è possibile ricavare tutti i punti appartenente alla CM caratterizzata dalle due costanti (a, I_N) .

E' importante ricordare che la CM , essendo una geodetica per la sfera, soddisfa ad una importante proprietà nota come Teorema di *Clairaut* qui di seguito riportato:

Sulle superfici di rotazione, è costante il prodotto del raggio del parallelo per il seno dell'angolo a che la geodetica forma con il meridiano.

Per dimostra questa proprietà per la CM sulla sfera, consideriamo la seguente espressione trigonometrica calcolata dal triangolo sferico rettangolo di figura 6.12:

$$\cos a = \cos f \sin q \quad (6.25)$$

che confrontata dall'asserto di Clairaut:

$$r \sin \mathbf{q} = R \cos \mathbf{f} \sin \mathbf{q} = \cos \mathbf{f} \sin \mathbf{q} = C \quad (6.26)$$

che confrontata con la (6.25) da la seguente relazione:

$$\cos \mathbf{a} = C \quad (6.27)$$

essendo \mathbf{a} costante uno dei due parametri che definisco la CM . Infine si può dimostrare la proprietà dell'angolo \mathbf{q} nei vertici della CM dalla seguente relazione calcolata dal già triangolo sferico:

$$\cos \mathbf{q} = \sin \mathbf{a} \cos(\mathbf{I} - \mathbf{I}_N) \quad (6.28)$$

per cui essendo il vertice a 90° dal nodo, la (6.28) si annulla solo se $\mathbf{q} = 90^\circ$.

Passiamo, ora, al calcolo dei parametri \mathbf{a} e \mathbf{I}_N della CM ; per ottenere questi due parametri, consideriamo due punti della CM di coordinate note: $A(\mathbf{f}_1, \mathbf{I}_1)$ e $B(\mathbf{f}_2, \mathbf{I}_2)$; applicando l'equazione della CM otteniamo il seguente sistema che va risolto rispetto alla longitudine del nodo:

$$\begin{aligned} \tan \mathbf{f}_1 &= \tan \mathbf{a} \sin(\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_N) \\ \tan \mathbf{f}_2 &= \tan \mathbf{a} \sin(\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_N) \end{aligned} \quad (6.29)$$

Operando il rapporto si ha:

$$\frac{\tan \mathbf{f}_1}{\tan \mathbf{f}_2} = \frac{\sin(\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_N)}{\sin(\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_N)}$$

ed applicando la regola del componendo ed il dividendo si ottiene:

$$\frac{\tan \mathbf{f}_2 + \tan \mathbf{f}_1}{\tan \mathbf{f}_2 - \tan \mathbf{f}_1} = \frac{\sin(\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_N) + \sin(\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_N)}{\sin(\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_N) - \sin(\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_N)}$$

semplificando il primo membro ed applicando le formule di prostaferesi al secondo si ha:

$$\tan\left(\frac{\mathbf{I}_2 + \mathbf{I}_1}{2} - \mathbf{I}_N\right) = \frac{\sin(\mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_1)}{\sin(\mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_1)} \tan \frac{\mathbf{I}_2 + \mathbf{I}_1}{2} \quad (6.30)$$

relazione che permette di calcolare \mathbf{I}_N . Questo valore, poi, può essere usato nell'equazione della CM (6.24) per ricavare l'inclinazione della CM .

Infine è importante conoscere, fornendo la CM la minima distanza tra due generici punti, la differenza in distanza con l'arco lossodromico passante per gli stessi due punti. E' bene ricordare che la CM volge la concavità all'equatore mentre la lossodromia volge la sua concavità al

polo, per cui la CM si sviluppa a latitudini più alte rispetto alla CM , per cui può capitare l'arco ortodromico in zone la cui latitudine è pericolosa alla navigazione marittima. La differenza tra questi due percorsi è data dalla seguente espressione:

$$D = m_{loss} - m_{CM} = \frac{m_{Loss}^3}{24} \sin R_V \tan^2 f \sin^2 1' \quad (6.31)$$

che si ricava confrontando l'equazione della lossodromia con quella dell'ortodromia ed i cui termini a secondo membro si riferiscono ad elementi lossodromici.

Dalla (6.31) si può notare che la differenza D aumenta con la distanza lossodromica m_{Loss} , con la latitudine e con l'approssimarsi della rotta lossodromica a 90° o 270° ; viceversa la differenza tende ad annullarsi per rotte prossime al meridiano (per rotte 0° e 180° la lossodromia e l'ortodromia si sovrappongono).

6.5.2 – Risoluzione di problemi ortodromici

La navigazione ortodromica o per circolo massimo richiede che siano noti i parametri che definiscono i parametri della CM . I problemi di navigazione si risolvono considerando il triangolo sferico ortodromico definito dai due vertici rappresentati dai punti di partenza, $A(f, l)$, di arrivo $B(f, l')$ e dal polo dell'emisfero di uno dei due punti; il triangolo ortodromico, pertanto, è limitato dai due meridiani (DI), dai due lati opposti rappresentati dalle collatitudini c_A, c_B e dal lato rappresentato dalla distanza ortodromica m . Quando i due punti si trovano in emisferi opposti il lato legato al punto di arrivo è maggiore di 90° ; la distanza ortodromica sarà sempre minore di 180° (10800 miglia).

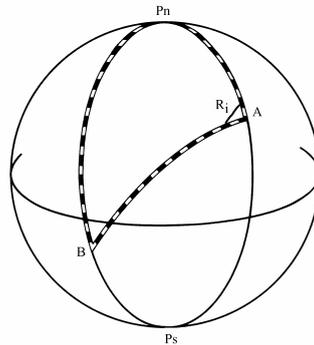


Figura 6.13 – Triangolo sferico ortodromico

Nel risolvere le relazioni trigonometriche relative ai triangoli sferici occorre sempre definire il polo di riferimento che normalmente è sempre quello del punto di partenza; le relazioni trigonometriche relative al triangolo ortodromico, normalmente, sono espresse in termini della latitudine per cui nel risolvere le relazioni occorre, essendo esse sempre minore di 90° occorre definire un criterio per risolverle. Pertanto si pone sempre positiva la latitudine del punto di partenza (*I quadrante*); se il punto di arrivo è nello stesso emisfero di quello di partenza, allora, la latitudine è ancora considerata positiva altrimenti va considerata negativa (*IV quadrante*) e nel risolvere le relazioni trigonometriche queste regole vanno sempre rigorosamente applicate.

6.5.3 – Determinazione della distanza ortodromica e della rotta iniziale

Questo problema è enunciato nel seguente modo:

- *date le coordinate del punto di partenza e quelle del punto di arrivo calcolare la distanza ortodromica e la rotta iniziale.*

Per risolvere questo problema consideriamo il triangolo ortodromico riportato in figura 6.14 i cui vertici sono:

- il punto di partenza $A(f, l)$;
- il suo polo omonimo;
- il punto di arrivo $B(f', l')$.

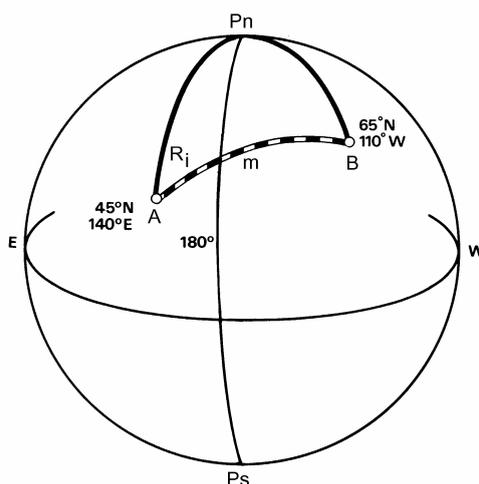


Figura 6.14 – Risoluzione del triangolo ortodromico:

$$m=3444.5 \text{ mg.}, R_i=N28.1^\circ E$$

dal triangolo ortodromico applicando la relazione fondamentale della trigonometria sferica all'elemento centrale m si ha:

$$\begin{aligned} \cos m &= \cos c_A \cos c_B + \sin c_A \sin c_B \cos DI \\ \cos m &= \sin f \sin f' + \cos f \cos f' \cos DI \end{aligned} \quad (6.32)$$

ed il teorema di Vieta:

$$\begin{aligned} \cot c_B \sin c_A &= \cos c_A \cos \Delta I + \sin \Delta I \cot R_i \\ \cot R_i &= \cos f [\tan f' \operatorname{cosec} \Delta I - \tan f \cot \Delta I] \end{aligned} \quad (6.33)$$

La (6.32) fornisce la distanza ortodromica m , sempre minore di 180° ; la (6.33) la rotta iniziale i cui quadrante dipende se positivo dal polo omonimo al punto di partenza se negativo dal polo opposto; il verso è definito dall'emisfero della differenza di longitudine.

Esempi di calcolo ortodromico

Lat. Partenza	Long. Partenza	Lat. Arrivo	Long. arrivo	Rotta	m
40°20.0' N	14°15.0' E	37°15.0' N	128°54.8' E	46.9	4922.1
40°20.0' S	14°15.0' W	36°36.6' S	118°53.7' W	232.9	4597.7
35°14.7' S	17°27.7' W	33°29.3' N	126°39.9' E	82.9	9029.8
60°55.5' S	150°15.7' W	58°30.2' S	67°58.7' W	124.3	2328.1

In qualche caso è richiesta anche la rotta finale, cioè l'angolo che la CM forma con il meridiano nel punto di arrivo; in questo caso occorre utilizzare la seconda delle (6.33) scambiando il lato di arrivo con quello di partenza e tenere presente la $R_f = 180^\circ - \mathbf{b}$ con \mathbf{b} angolo interno nel vertice del punto di arrivo:

$$\begin{aligned} \cot c_A \sin c_B &= \cos c_B \cos DI + \sin DI \cot \mathbf{b} \\ \cot \mathbf{b} &= \cos f' [\tan f \operatorname{cosec} DI - \tan f \cot DI] \end{aligned} \quad (6.34)$$

Se le due località sono nello stesso emisfero, la rotta finale è data da $R_f = 180^\circ - \mathbf{b}$; se invece, le due località sono in emisferi opposti la rotta finale è data dall'angolo interno calcolato con il cardine definito dal polo del punto di arrivo.

6.5.4 – Definizione delle coordinate del vertice

Per una CM passante per due punti che si trovano nello stesso emisfero può verificarsi che il vertice si trovi ad una latitudine che per motivi di sicurezza (ghiacci, Iceberg e condizione meteo avverse) non è conve-

niente navigare. Per tutti questi motivi, nella fase di progettazione di un percorso ortodromico è importante calcolare le coordinate del vertice.

Questo problema si enuncia nel seguente modo:

date le coordinate del punto di partenza e la rotta iniziale, determinare le coordinate del vertice.

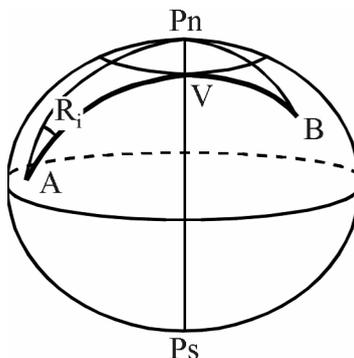


Figura 6.15 – CM e suo vertice V

Importante proprietà dei triangoli sferici è se i due angoli inerti R_i e b associati ai due vertici relativi al punto di partenza A e di arrivo B sono entrambi minori o maggiori di 90° allora il vertice capita all'interno dell'arco ortodromico tra A e B.

Per ottenere le coordinate del vertice V, si consideri il meridiano perpendicolare alla CM e passante per il polo omonimo al punto di partenza; in questo modo si ottengono due triangoli rettangoli sferici dai quali è possibile, applicando le regole per i triangoli sferici rettangoli si ha:

$$\cos c_A = \sin f_A = \cot R_i \cot \Delta I_V \quad , \quad \cot \Delta I_V = \sin f_A \tan R_i \quad (6.35)$$

$$\cos f_V = \sin c_A \sin R_i \quad , \quad \cos f_V = \cos f_A \sin R_i \quad (6.36)$$

con f_V sempre minore di 90° ed omonima in segno alla latitudine di partenza e $\Delta I_V < 0 >$ di 90° a seconda della R_i ; con il valore di ΔI_V si ricava la longitudine del vertice con la relazione:

$$I_V = I + \Delta I$$

e quindi le coordinate del vertice $V = (f_V, I_V)$

Ricavate le coordinate del vertici è facile determinare le coordinate del vertice opposto :

$$V' = \begin{cases} I'_V = I_V \pm \Delta I \\ f'_V = -f_V \end{cases}$$

6.5.5 – Calcolo delle coordinate di un punto della CM

Nel percorrere la *CM*, in molti casi, è richiesto di conoscere le coordinate di un punto della *CM* ottenute come intersezione della *CM* con un meridiano oppure con un parallelo.

Questo problema si enuncia nel seguente modo:

*date le coordinate del punto di partenza $A(\mathbf{f}, \mathbf{I})$, la rotta iniziale R_i e la longitudine (latitudine) del punto generico P sulla *CM*, determinare la sua latitudine (longitudine).*

Consideriamo il caso che sia nota la longitudine \mathbf{I}_L ; in questo caso si considera il triangolo sferico AP_nL e si applica la formula di Vieta:

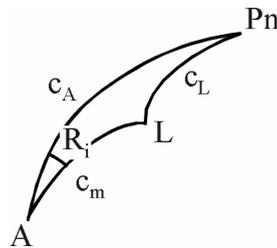


Figura 6.16 - Intersezione della *CM* con un meridiano

$$\begin{aligned} \cot c_L \sin c_A &= \cos c_A \cos \Delta \mathbf{I}_L + \sin \Delta \mathbf{I}_L \cot R_i \\ \tan \mathbf{f}_L &= \tan \mathbf{f}_A \cos \Delta \mathbf{I}_L + \sec \mathbf{f}_A \sin \Delta \mathbf{I}_L \cot R_i \end{aligned} \quad (6.37)$$

La seconda relazione delle (6.37) fornisce il valore della latitudine del punto di intersezione del meridiano \mathbf{I}_L con la *CM*; per la risoluzione della (6.37) occorre applicare le regole precedentemente considerate per i triangoli sferici. Se il secondo membro risulta positivo allora la \mathbf{f}_L avrà lo stesso segno della latitudine del punto di partenza A ; se il valore finale è negativo, allora il cardine della latitudine di P sarà quello opposto di quello di partenza.

Consideriamo ora il secondo caso: intersezione della *CM* con un parallelo. In questo caso, osserviamo che il parallelo interseca, nello stesso emisfero, la *CM* in due punti B e B' (v. figura 6.17).

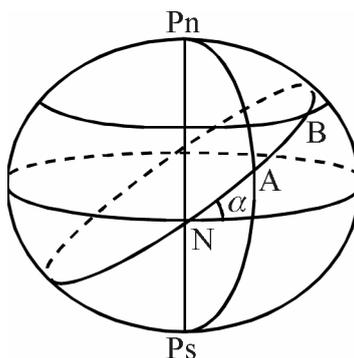


Figura 6.17 – Intersezione della CM con un parallelo $f_B < f_V$

Applicando ancora la formula di Vieta si ha:

$$\tan f_B = \tan f_A \cos \Delta I_B + \sec f_A \sin \Delta I_B \cot R_i$$

dalla quale, dopo aver ricavato ΔI_B , si trova la longitudine del punto di intersezione del parallelo con la CM ; si fa osservare però, che l'equazione non è lineare dato che perché ΔI_B è argomento sia della funzione seno che di coseno per cui occorre sostituire a $\cos \Delta I_B = \sqrt{1 - \sin^2 \Delta I_B}$ e risolvere una equazione di secondo in termini di $\sin \Delta I_B$. Si ottengono due valori che permettono di ricavare le longitudini dei due punti intersezione della CM con il parallelo prefissato.

Una procedura più semplice ed univoca è quella di ricavare la longitudine del punto di intersezione utilizzando il triangolo sferico rettangolo relativo al vertice più vicino al punto di intersezione; così, considerando il triangolo sferico PP_eV , rettangolo in V di figura 6.15, si ha:.

$$\begin{aligned} \cos DI_p &= \cot f_p \cot f_v \\ \cos DI_p &= \tan f_p \cot f_v \end{aligned} \quad (6.38)$$

dalla quale si ricava il valore di DI_p ; se il parallelo di intersezione si trova nello stesso emisfero del vertice allora il valore di DI_p è minore di 90° altrimenti sarà maggiore di 90° . La longitudine dei due punti sarà:

$$[I_p]_{1,2} = I_v + (\pm DI_p)$$

6.5.6 – Calcolo delle coordinate di un punto della *CM* distante *m* dal punto di partenza

In navigazione ortodromica, infine, si può avere la necessità di ricavare dei punti sulla *CM* che distano della distanza ortodromica *m* dal punto di partenza.

Questo problema si può porre nel seguente modo:

*Note le coordinate geografiche del punto di partenza $A(\mathbf{f}, \mathbf{I})$ e la rotta iniziale R_i , determinare le coordinate di un punto sulla *CM* posto alla distanza *m*.*

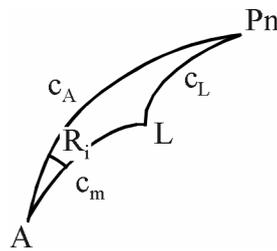


Figura 6.18 - Triangolo sferico relativo al punto *L* posto alla distanza *m* dal punto di partenza *A*.

Le coordinate del punto $L(\mathbf{f}_L, \mathbf{I}_L)$ si ricavano considerando il triangolo sferico AP_nL nel quale sono noti il lato relativo alla collatitudine di *A* e la rotta iniziale R_i . Applicando la relazione fondamentale della trigonometria sferica al lato LP_n sia ha:

$$\begin{aligned} \cos c_L &= \cos c_A \cos m + \sin c_A \sin m \cos R_i \\ \sin \mathbf{f}_L &= \sin \mathbf{f}_A \cos m + \cos \mathbf{f}_A \sin m \cos R_i \end{aligned} \quad (6.39)$$

con \mathbf{f}_L dello stesso segno della \mathbf{f}_A ; applicando la formula di Vieta:

$$\begin{aligned} \cot d \sin c_A &= \cos c_A \cos R_i + \sin R_i \cot \Delta \mathbf{I}_L \\ \cot \Delta \mathbf{I}_L &= \cot d \cos \mathbf{f}_A \operatorname{cosec} R_i - \sin \mathbf{f}_A \cot R_i \end{aligned} \quad (6.40)$$

dalla quale si ricava il valore della differenza di longitudine $\Delta \mathbf{I}_L$ il cui segno è quello della rotta iniziale R_i ; le coordinate del punto *L*, pertanto, sono:

$$L = \begin{cases} \mathbf{f}_L \\ \mathbf{I}_L = \mathbf{I}_A + \Delta \mathbf{I}_L \end{cases} \quad (6.41)$$

6.5.7 – Calcolo della variazione di rotta lungo la CM

Un ulteriore elemento del triangolo ortodromico è la variazione di rotta lungo la *CM* nota in navigazione come *convergenza dei meridiani*; in particolare, in alcuni problemi, si richiede la rotta finale R_f e la differenza tra rotta iniziale R_i e quella finale $DR = R_f - R_i$.

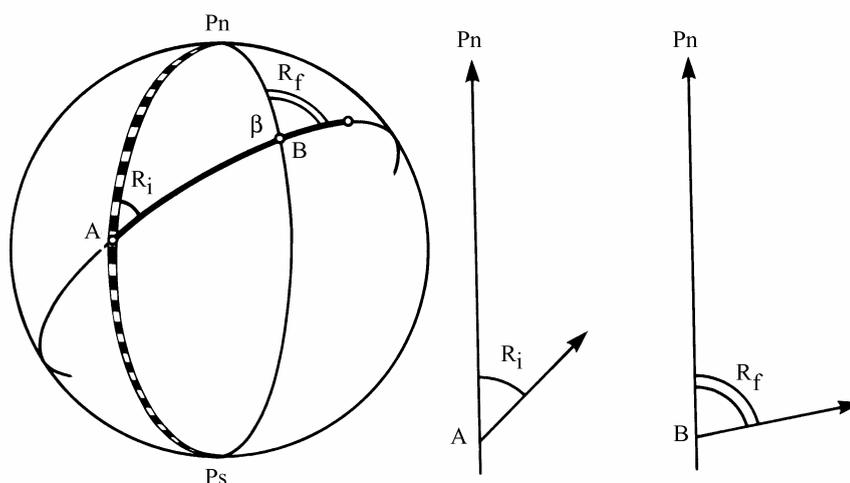


Figura 6.19 – Triangolo ortodromico e variazione di rotta

Questa relazione è calcolata per mezzo di una delle analogie di Nepero; dal triangolo ortodromico si ha:

$$\tan \frac{R_i + b}{2} = \tan \frac{R_i + 180^\circ - R_f}{2} = \frac{\cos \frac{c_G - c_F}{2}}{\cos \frac{c_G + c_F}{2}} \cot \frac{DI_{GF}}{2}$$

che può essere ulteriormente semplificata nel seguente modo:

$$\tan \frac{180^\circ - (R_f - R_i)}{2} = \tan \left(90^\circ - \frac{DR}{2} \right) = \frac{\cos \frac{Df}{2}}{\sin f_m} \cot \frac{DI}{2}$$

e quindi

$$\cot \frac{DR}{2} = \frac{\cos \frac{Df}{2}}{\sin f_m} \cot \frac{DI}{2} \quad (6.42)$$

Inoltre, si può osservare che, per $DI = 0$ si ha $DR = 0$ e per $DI = 180^\circ$ si ha $DR = 180^\circ$; nel primo caso i punti di partenza e di arrivo sono sullo stesso meridiano; nel secondo caso i punti si trovano su meridiani opposti.

6.5.7 – Navigazione mista

Quando il punto di partenza $A(f, I)$ e quello di arrivo $B(f', I')$ sono situati sullo stesso emisfero ed a grande differenza di longitudine ΔI ed a piccola differenza di latitudine Df la CM che passa per i due punti si sviluppa sicuramente in zone di alta latitudine nelle quali si trova il vertice V , caratterizzate da avversità meteo marine e pericolose per la navigazione. Per evitare alla nave di attraversare queste zone pericolose, si decide di non oltrepassare un dato parallelo detto, parallelo limite, la cui latitudine viene indicata con f_L ; il percorso più breve diventa la somma di tre percorsi di cui due ortodromici ed un lossodromico.

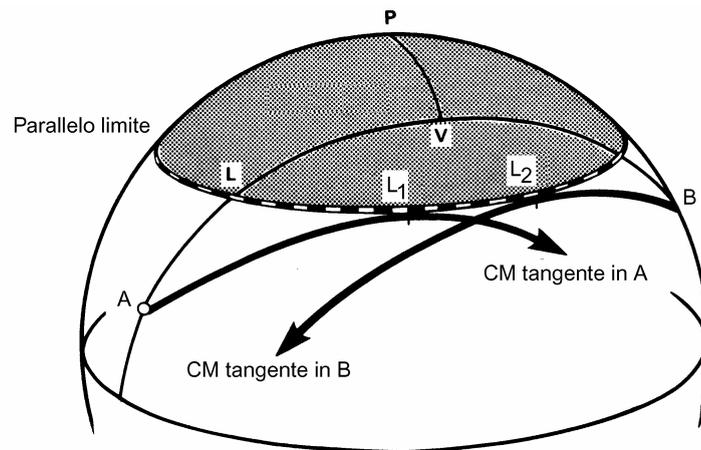


Figura 6.20 – Traiettorie in navigazione mista

Per determinare allora il cammino totale occorre considerare i tre triangoli sferici rappresentati in figura 6.21. Partendo da A si percorre l'arco ortodromico AL , arrivati in L si percorre l'arco di parallelo LL' (arco di lossodromia); infine, si percorre il secondo arco ortodromico $L'B$ per arrivare in B . Gli elementi ortodromici dei due triangoli sferici AP_NL e $L'P_NB$ si ricavano dalle seguenti relazioni:

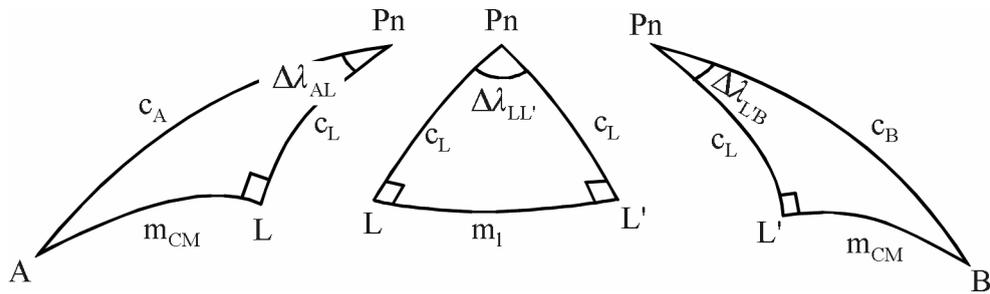


Figura 6.21 – Triangoli sferici in navigazione mista

$$\begin{aligned} \cos d_{AL} &= \sin f_A \operatorname{cosec} f_L \quad , \quad \cos d_{BL'} = \sin f_B \operatorname{cosec} f_L \quad , \\ \cos \Delta l_{AL} &= \tan f_A \cot f_L \quad , \quad \cos \Delta l_{BL'} = \tan f_B \cot f_L \\ \sin R_i &= \sec f_A \cos f_L \end{aligned}$$

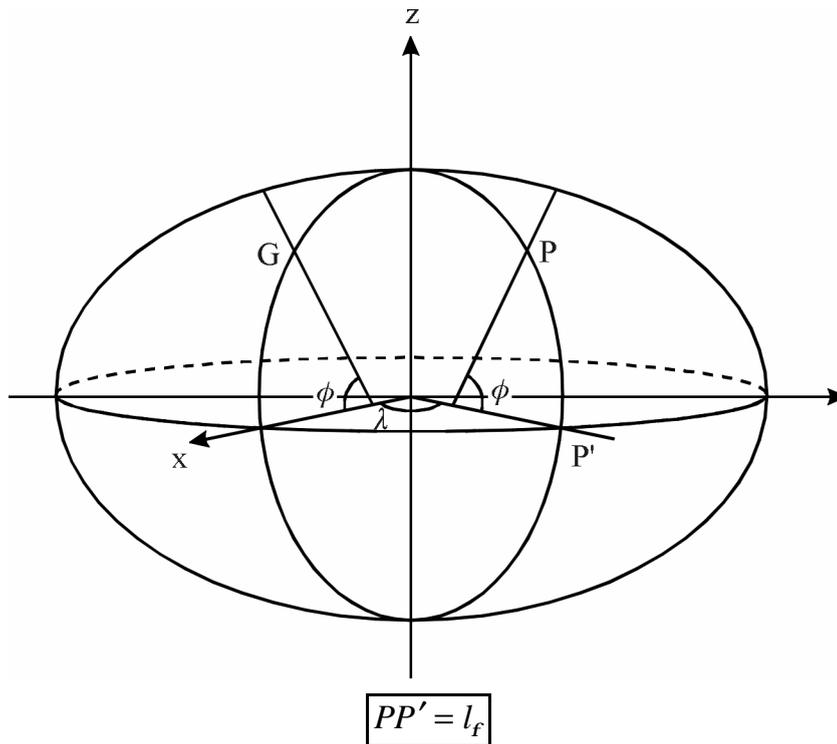
Non occorre trovare una quarta relazione per la rotta iniziale nel punto L', essendo questo un angolo retto. La differenza di longitudine, tra L e L' si ricava per differenza trovando la longitudine dei punti L e L' con le due seguenti relazioni:

$$l_L = l_A + (\pm \Delta l_{AL}) \quad , \quad l_{L'} = l_B - (\pm \Delta l_{BL'})$$

Appendice A

CALCOLO DELLA LUNGHEZZA DELL'ARCO DI MERIDIANO – TERRA ELLISSOIDICA.

La lunghezza dell'arco di meridiano per la terra ellissoidica si calcola per mezzo della formula che fornisce l'arco infinitesimo di meridiano dm in funzione del raggio di curvatura r dell'arco di meridiano ed integrando fra il parallelo considerato e l'equatore:



$$l_f = \int_0^f r d\mathbf{f} = \int_0^f \frac{a(1-e^2)}{[1-e^2 \sin^2 \mathbf{f}]^{\frac{3}{2}}} d\mathbf{f} = a(1-e^2) \int_0^f [1-e^2 \sin^2 \mathbf{f}]^{\frac{3}{2}} d\mathbf{f}$$

la cui integrazione va effettuata sviluppando in serie binomiale l'espressione da integrare;

$n = -\frac{3}{2}$ e $x = -e^2 \sin^2 \mathbf{f}$ si ha:

$$(1+x)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i = \binom{n}{0} x^0 + \binom{n}{1} x^1 + \binom{n}{2} x^2 + \binom{n}{3} x^3 + \binom{n}{4} x^4 + \binom{n}{5} x^5 + \dots$$

con:

$$\begin{aligned} \binom{n}{1} &= n = -\frac{3}{2} \\ \binom{n}{2} &= \frac{n(n-1)}{2!} = \frac{15}{8} \\ \binom{n}{3} &= \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} = \frac{35}{16} \\ \binom{n}{4} &= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!} = \frac{315}{128} \\ \binom{n}{5} &= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5!} = \frac{693}{256} \end{aligned}$$

sostituendo i coefficienti binomiali si ha:

$$\begin{aligned} l_f &= a(1-e^2) \left[\int_0^f d\mathbf{f} + \frac{3}{2} \int_0^f e^2 \sin^2 \mathbf{f} d\mathbf{f} + \frac{15}{8} \int_0^f e^4 \sin^4 \mathbf{f} d\mathbf{f} + \frac{35}{16} \int_0^f e^6 \sin^6 \mathbf{f} d\mathbf{f} \right] + \\ &+ a(1-e^2) \left[\frac{315}{128} \int_0^f e^8 \sin^8 \mathbf{f} d\mathbf{f} + \frac{693}{256} \int_0^f e^{10} \sin^{10} \mathbf{f} d\mathbf{f} \right] \end{aligned}$$

Il calcolo dell'arco si trova, calcolando gli integrali definiti sviluppando prima le potenze della funzione \sin in termini della stessa e di argomenti ($n\mathbf{a}$), i cui sviluppi sono riportati nell'appendice B; passiamo ora al calcolo degli integrali:

$$\int_0^f d\mathbf{f} = \mathbf{f}$$

$$\frac{3}{2} e^2 \int_0^f \sin^2 \mathbf{f} d\mathbf{f} = \frac{3}{2} e^2 \int_0^f \left[\frac{1}{2} - \frac{\cos 2\mathbf{f}}{2} \right] d\mathbf{f} = \frac{3}{4} - \frac{3}{8} e^2 \sin 2\mathbf{f}$$

$$\begin{aligned} \frac{15}{8} e^4 \int_0^f \sin^4 \mathbf{f} d\mathbf{f} &= \frac{15}{8} e^4 \int_0^f \left[\frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2\mathbf{f} + \frac{1}{8} \cos 4\mathbf{f} \right] d\mathbf{f} = \frac{45}{64} e^4 \mathbf{f} + \\ &- \frac{15}{32} e^4 \sin 2\mathbf{f} + \frac{15}{256} e^4 \sin 4\mathbf{f} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{35}{16} e^6 \int_0^f \sin^6 f df &= \frac{35}{16} e^6 \int_0^f \left[\frac{5}{16} - \frac{15}{32} \cos 2f + \frac{3}{16} \cos 4f - \frac{1}{32} \cos 6f \right] df = \\ &= \frac{175}{256} e^6 f - \frac{525}{1024} e^6 \sin 2f + \frac{105}{1024} e^6 \sin 6f - \frac{35}{3072} e^6 \sin 6f \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{315}{128} e^8 \int_0^f \sin^8 f df &= \frac{315}{128} e^8 \int_0^f \left[\frac{35}{128} - \frac{7}{16} \cos 2f + \frac{7}{32} \cos 4f - \frac{1}{16} \cos 6f + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{128} \cos 8f \right] df = \\ &= \frac{11025}{16384} e^8 f - \frac{2205}{4096} e^8 \sin 2f + \frac{2205}{16384} e^8 \sin 4f - \frac{315}{12288} e^8 \sin 6f + \\ &+ \frac{315}{131072} e^8 \sin 8f \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{693}{256} e^{10} \int_0^f [\sin^{10} f df] &= \frac{693}{256} e^{10} \int_0^f \left[\frac{63}{256} - \frac{105}{256} \cos 2f + \frac{15}{64} \cos 4f + \right. \\ &- \left. \frac{45}{512} \cos 6f + \frac{5}{256} \cos 8f - \frac{1}{512} \cos 10f \right] df = \\ &= \frac{43659}{65536} e^{10} f - \frac{72975}{131072} e^{10} \sin 2f + \frac{10395}{65536} e^{10} \sin 4f - \frac{31185}{786432} e^{10} \sin 6f + \\ &+ \frac{3465}{542288} e^{10} \sin 8f - \frac{693}{131072} e^{10} \sin 10f \end{aligned}$$

raggruppando i termini comuni si ha:

$$\begin{aligned}
 l_f = & a(1-e^2) \left[1 + \frac{3}{4}e^2 + \frac{45}{64}e^4 + \frac{175}{256}e^6 + \frac{11025}{16384}e^8 + \frac{43659}{65536}e^{10} \right] f + \\
 & - a(1-e^2) \left[\frac{3}{4}e^2 + \frac{15}{16}e^4 + \frac{525}{512}e^6 + \frac{2205}{2048}e^8 + \frac{72975}{65536}e^{10} \right] \frac{\sin 2f}{2} + \\
 & + a(1-e^2) \left[\frac{15}{64}e^4 + \frac{105}{256}e^6 + \frac{2205}{4096}e^8 + \frac{10395}{16384}e^{10} \right] \frac{\sin 4f}{4} + \\
 & - a(1-e^2) \left[\frac{35}{512}e^6 + \frac{315}{3048}e^8 + \frac{31185}{131072}e^{10} \right] \frac{\sin 6f}{6} + \\
 & a(1-e^2) \left[\frac{315}{16384}e^8 + \frac{3465}{65536}e^{10} \right] \frac{\sin 8f}{8} + \\
 & - a(1-e^2) \left[\frac{693}{131072}e^{10} \right] \frac{\sin 10f}{10}
 \end{aligned}$$

che può essere ulteriormente semplificata nel seguente modo:

$$\begin{aligned}
 l_f = & a(1-e^2)A_0 - \frac{1}{2}a(1-e^2)A_1 \sin 2f + \frac{1}{4}a(1-e^2)A_2 \sin 4f + \\
 & - \frac{1}{6}a(1-e^2)A_3 \sin 6f + \frac{1}{8}a(1-e^2)A_4 \sin 8f - \frac{1}{10}a(1-e^2)A_5 \sin 10f
 \end{aligned}$$

dove:

$$\begin{aligned}
 A_0 &= \left[1 + \frac{3}{4}e^2 + \frac{45}{64}e^4 + \frac{175}{256}e^6 + \frac{11025}{16384}e^8 + \frac{43659}{65536}e^{10} \right] \\
 A_1 &= \left[\frac{3}{4}e^2 + \frac{15}{16}e^4 + \frac{525}{512}e^6 + \frac{2205}{2048}e^8 + \frac{72975}{65536}e^{10} \right] \\
 A_2 &= \left[\frac{15}{64}e^4 + \frac{315}{256}e^6 + \frac{2205}{4096}e^8 + \frac{10395}{16384}e^{10} \right] \\
 A_3 &= \left[\frac{35}{512}e^6 + \frac{315}{3048}e^8 + \frac{31185}{131072}e^{10} \right] \\
 A_4 &= \left[\frac{315}{16384}e^8 + \frac{3465}{65536}e^{10} \right] \\
 A_5 &= \left[\frac{693}{131072}e^{10} \right]
 \end{aligned}$$