i3HEV, ing. Mario Held

Nomogrammi logaritmici

Principi e metodi di realizzazione

Versione 1.1 del 31/12/99 – Distribuzione 31/12/99

1. PRINCIPI

Un nomogramma è costituito da un gruppo di tre assi paralleli, ciascuno dotato di una scala di taratura; ciascun asse rappresenta la misura di una grandezza collegata alle altre due cosicché, scelti due punti che rappresentano ciascuno la misura di una grandezza sul proprio asse, la retta tracciata per i due punti interseca il terzo asse nel punto che rappresenta la misura della terza grandezza collegata. Questo permette di realizzare diagrammi di progettazione utilizzabili anche da persone che non abbiano le conoscenze matematiche necessarie per procedere direttamente al calcolo.

1.1 Costruzione del nomogramma

Consideriamo tre rette parallele verticali ***a***, ***b***, ***c*** in un sistema cartesiano (fig. 1); siano $\mathbf{x_a}$, $\mathbf{x_b}$, $\mathbf{x_c}$ le ascisse delle rette e $\mathbf{y_a}$, $\mathbf{y_b}$, $\mathbf{y_c}$ le ordinate delle intersezioni di una retta trasversale con ciascuna delle tre parallele. Per ulteriore semplificazione, facciamo coincidere la retta ***b*** con l'asse y del sistema cartesiano e quindi porre $\mathbf{x_b = 0}$.

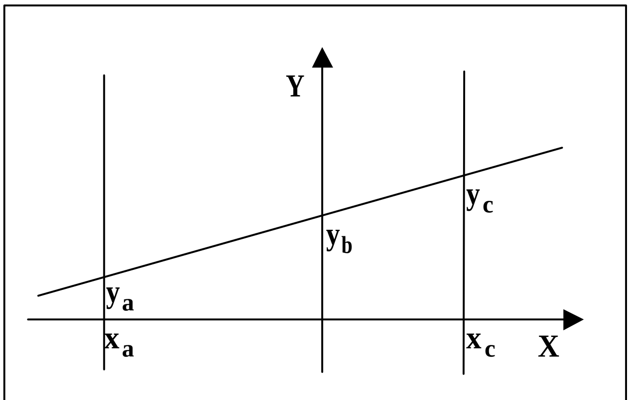

Fig. 1: costruzione geometrica del nomogramma

L'ordinata $\mathbf{y_b}$ del punto di intersezione sulla retta ***b*** si trova immediatamente risolvendo il sistema di equazioni delle rette:

(1.1.1)
$$\begin{cases} \dfrac{x_c - x_a}{x_c - x_b} = \dfrac{y_c - y_a}{y_c - y_b} \\ x_b = 0 \end{cases}$$

da cui si ricava:

(1.1.2)
$$y_b = \frac{x_c y_a - x_a y_c}{x_c - x_a},$$

dove $\mathbf{x_a}$ ed $\mathbf{x_c}$ sono le costanti di costruzione del nomogramma, $\mathbf{y_a}$ ed $\mathbf{y_c}$ sono le variabili note del problema ed infine $\mathbf{y_b}$ è l'incognita.

1.2 Invarianza del nomogramma

L'invarianza del nomogramma rispetto al cambiamento di unità di misura si dimostra direttamente a partire dalla (1.1.2); detti t_x e t_y due qualsiasi numeri reali non nulli, si trova subito che l'equazione è invariante rispetto alle sostituzioni:

$$\begin{cases} x_j = t_x x_j \\ h_j = t_x y_j \end{cases}$$

Questo significa che il nomogramma è insensibile al cambiamento dell'unità di misura degli assi orizzontale e verticale. In pratica ciò comporta la possibilità di ridimensionare il grafico sia in senso orizzontale che verticale indipendentemente. Si noti che questa proprietà non dipende dalle funzioni scelte per mappare le grandezze sugli assi, perciò è una proprietà generale del nomogramma.

Si osservi che questa invarianza si applica alle grandezze (x_j, y_j) e non alle grandezze w_j, sulle quali in generale non è lecito fare ipotesi; nel caso specifico dei nomogrammi logaritmici si può però aggiungere che il cambiamento di scala sulle grandezze w_j comporta per le ordinate y_j una semplice traslazione degli assi.

1.3 Taratura logaritmica delle scale

Ponendo che siano date tre funzioni arbitrarie $\mathbf{f_a(x)}$, $\mathbf{f_b(x)}$, $\mathbf{f_c(x)}$ che mappano le grandezze $\mathbf{w_a}$, $\mathbf{w_b}$, $\mathbf{w_c}$ rispettivamente sugli assi $\mathbf{y_a}$, $\mathbf{y_b}$, $\mathbf{y_c}$,:

$$\begin{cases} y_a = f_a(w_a) \\ y_b = f_b(w_b) \\ y_c = f_c(w_c) \end{cases}, \tag{1.3.3}$$

l'espressione sopra trovata fornisce il valore di $\mathbf{w_b}$ come:

$$w_b = f_b^{-1}\left(\frac{x_c f_a(w_a) - x_a f_c(w_c)}{x_c - x_a}\right). \tag{1.3.4}$$

Da questa espressione si vede come, con un'opportuna scelta delle funzioni utilizzate, si possano realizzare nomogrammi per l'esecuzione di un grande numero di calcoli pratici. In particolare, la taratura in scala logaritmica dei nomogrammi consente di effettuare operazioni di prodotto, divisione ed elevamento a potenza intera o frazionaria.

Supponiamo allora che sia:

$$(1.3.5)\qquad \begin{cases} y_a = m_a \ln(w_a) + k_a \\ y_b = m_b \ln(w_b) + k_b \\ y_c = m_c \ln(w_c) + k_c \end{cases}$$

la funzione inversa per $\mathbf{w_b}$ è:

$$(1.3.6)\qquad w_b = e^{\frac{y_b - k_b}{m_b}}$$

e la sua espressione diventa quindi:

$$(1.3.7)\qquad w_b = e^{\frac{\left(\frac{x_c[m_a \ln(w_a)+k_a]-x_a[m_c \ln(w_c)+k_c]}{x_c - x_a}\right)-k_b}{m_b}},$$

che opportunamente semplificata dà:

$$(1.3.8)\qquad \boldsymbol{w_b = K_0 w_a^{C_a} w_c^{C_c}},$$

nella quale sono state introdotte le definizioni:

$$(1.3.9)\qquad \begin{cases} C_a = \dfrac{m_a}{m_b} \cdot \dfrac{x_c}{x_c - x_a} \\ C_c = \dfrac{m_c}{m_b} \cdot \dfrac{-x_a}{x_c - x_a} \\ K_0 = e^{\frac{x_c(k_a-k_b)-x_a(k_c-k_b)}{m_b(x_c-x_a)}} \end{cases}$$

(si osservi che, per costruzione, è: $\mathbf{x_a} < 0$, $\mathbf{x_c} > 0$)

Nella formula trovata, i parametri $\mathbf{K_0}$, $\mathbf{C_a}$, $\mathbf{C_c}$ possono assumere sia valori interi che frazionari, sia positivi che negativi, cosicché è possibile svolgere mediante un nomogramma un'ampia gamma di operazioni.

1.4 Progettazione del nomogramma

La progettazione del nomogramma parte dalla (1.2.8); l'espressione da calcolare va quindi ridotta a questa forma 'normale' e si devono identificare i tre coefficienti $\mathbf{K_0}$, $\mathbf{C_a}$, $\mathbf{C_c}$.

Il passo successivo è quello di utilizzare il sistema fornito dalla (1.2.9) per identificare un sistema di parametri soddisfacente; si osservi che il sistema è indeterminato, in quanto contiene otto parametri per sole tre equazioni. Perciò cinque di questi parametri possono essere fissati ad arbitrio, secondo le esigenze pratiche del diagramma che si vuole ottenere.

Conviene ricordare il significato pratico di questi parametri:

$-x_a$, x_c: rappresentano la distanza tra gli assi delle variabili date e quello (centrale) delle incognite; la loro unità di misura è quindi [m]; per la costruzione effettuata, il valore di x_a è sempre negativo;

m_a, m_b, m_c: rappresentano dei fattori di scala tra il logaritmo e la sua rappresentazione sul diagramma; la loro unità di misura è quindi [m]; un valore negativo rappresenta una scala di taratura che *cresce verso il basso*;

k_a, k_b, k_c: rappresentano una traslazione della scala sul diagramma cartesiano; la loro unità di misura è quindi ancora [m]; un valore nullo rappresenta una scala che interseca lasse delle x in corrispondenza al valore unitario (che è lorigine di una scala logaritmica);

Per proseguire nellesposizione, converrà considerare un esempio pratico: si voglia quindi calcolare la frequenza di risonanza di un circuito accordato, che è data dalla formula:

$$\boldsymbol{f} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\boldsymbol{LC}}}$$

Confrontando questa formula con la (1.2.8) si trova subito che dev'essere:

$$\begin{cases} \boldsymbol{K}_0 = \dfrac{1}{2\pi} \\ \boldsymbol{C}_a = -1/2 \\ \boldsymbol{C}_c = -1/2 \end{cases}$$

Osserviamo che, dalla (1.2.9), si trova:

$$\frac{\boldsymbol{C}_a}{\boldsymbol{C}_c} = \frac{\boldsymbol{m}_a}{\boldsymbol{m}_c} \cdot \frac{\boldsymbol{x}_c}{-\boldsymbol{x}_a},$$

da cui si ha che, scegliendo il rapporto tra le distanze degli assi secondo il rapporto tra gli esponenti delle variabili, le scale per ***a*** e ***c*** risultano uguali (salvo leventuale traslazione dovuta ai parametri k_i), il che semplifica significativamente la grafica del nomogramma.

Nel nostro caso potremo allora porre ad esempio $-x_a = x_c = 1$, da cui si trova subito $m_a = m_c$.

Sostituendo nelle prime due delle (1.2.9) si trova anche subito:

$C_{a,c} = \frac{1}{2}\frac{m_{a,c}}{m_b}$, da cui si vede che dovremo porre **m a = -m b = m c**, per cui la scala relativa a ***b*** sarà uguale ma invertita rispetto alle altre due; possiamo porre **m a = -m b = m c = 1**.

Avendo così fissato arbitrariamente tre parametri, ci restano ancora due gradi di libertà nella scelta delle costanti di traslazione k **i**; la terza delle (1.2.9), sostituendo i valori trovati finora, fornisce:

$$\ln\left(\frac{1}{2p}\right) = \frac{k_a - 2k_b + k_c}{2}.$$

Possiamo allora porre k **a** = k **c** = **0**, che ci dà semplicemente:

$$k_b = \ln(2p)$$

Resta infine da scrivere le (1.2.5) esplicitandole con i valori trovati per i parametri:

$$\begin{cases} y_a = \ln(w_a) \\ y_b = -\ln(w_b) + \ln(2p) \\ y_c = \ln(w_c) \end{cases}$$