Appunti di Analisi Matematica

Analisi per Ingegneria civile

Dr. Luca Granieri

18-20 Ottobre 2005

0.1 Continuità

Teorema 1 (degli zeri). *Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo e $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Se esistono due punti $a, b \in I$ tali che $f(a) < 0 < f(b)$, allora esiste un punto $x_0 \in I$ tale che $f(x_0) = 0$.*

Vediamo alcune applicazioni di questo risultato.

Esempio 2. *All'equatore ci sono almeno due punti con la stessa temperatura.*

Indichiamo con $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione che ad ogni posizione sull'equatore, che indentificheremo con una cordinata angolare, associa la sua temperatura. Poichè dopo un giro completo si ritorna alla stessa posizione, tale funzione sarà periodica di periodo 2π, ovvero

$$f(x + 2\pi) = f(x).$$

Se assumiamo che la funzione f sia continua, consideriamo la funzione ausiliaria

$$g(x) = f(x + \pi) - f(x),$$

che è ancora una funzione continua (verificheremo più avanti che la somma e la composizione di funzioni continue è ancora una funzione continua). Allora i punti in cui la g si annulla soddisfano la tesi. Sia allora $g(\bar{x}) > 0$. Osserviamo che

$$g(\bar{x} + \pi) = f(\bar{x} + 2\pi) - f(\bar{x} + \pi) = f(\bar{x}) - f(\bar{x} + \pi) = -g(\bar{x}) < 0.$$

Allora, per il Teorema degli zeri abbiamo che esiste $x_0 \in [0, 2\pi]$ tale che $g(x_0) = 0$, ovvero $f(x_0) = f(x_0 + \pi)$. Dunque abbiamo trovato due punti, diametralmente opposti, che hanno la stessa temperatura.

Esempio 3. *Ogni torta può essere divisa con un taglio in due parti uguali (di stessa misura).*

Indichiamo rispettivamente con S_x, D_x la parte della torta T che si trova a sinistra (risp. destra) della retta verticale passante per x. E consideriamo la funzione

$$f(x) = m(S_x) - m(D_x).$$

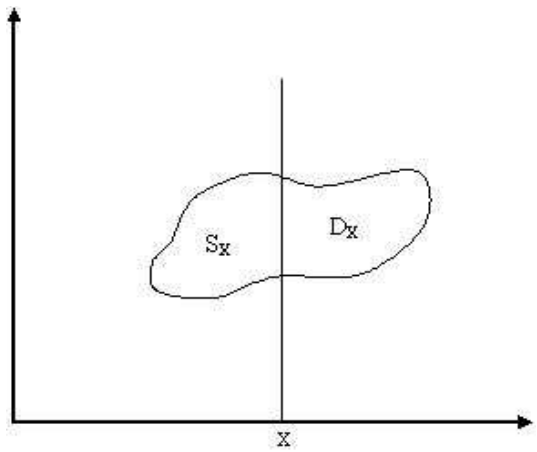

Figura 1: Ogni taglio divide la torta in due parti.

Possiamo intuire che tale funzione è continua. Inoltre, essendo la torta limitata si possono senz'altro trovare (vedi figura (2)) due valori $a, b \in \mathbb{R}$ tali che

$$f(a) = -m(T) < 0, \quad f(b) = m(T) > 0.$$

Allora, per il Teorema degli zeri, esiste $x_0 \in [a, b]$ *tale che* $f(x_0) = 0$*, ovvero per cui*

$$m(S_{x_0}) = m(D_{x_0}).$$

Resta dunque da verificare che la funzione f *sia continua. Fissiamo dunque* $x_0 \in \mathbb{R}$ *e sia* $\varepsilon > 0$*. Dobbiamo allora provare che si può scegliere* $\delta > 0$ *in maniera tale che*

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Essendo la torta limitata, questa può essere racchiusa in una scatola rettangolare di altezza h *(vedi*

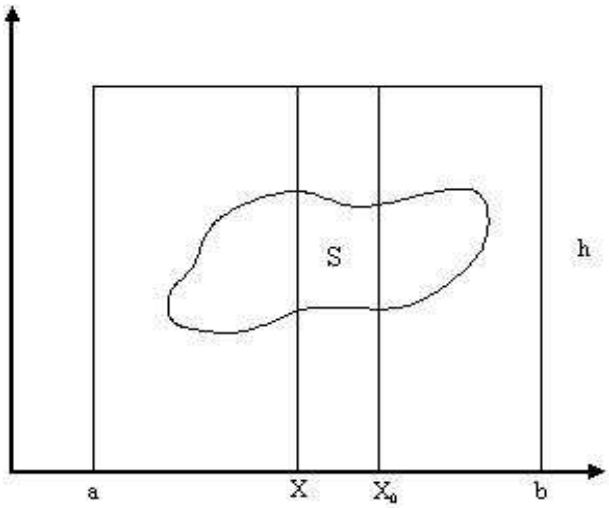

Figura 2: Torta inscatolata.

figura (2)). Se $|x - x_0| < \delta$*, abbiamo*

$$|f(x)-f(x_0)| = |m(S_x)-m(D_x)-m(S_{x_0})+m(D_{x_0})| = |m(S)+m(S)| = 2m(S) \leq 2|x-x_0|h < 2\delta h = \varepsilon,$$

scegliendo $\delta = \frac{\varepsilon}{2h}$.

Corollario 4 (Teorema dei valori intermedi). *Sia* $I \subset \mathbb{R}$ *un intervallo e* $f : I \to \mathbb{R}$ *una funzione continua. Dati due punti* $a, b \in I$*, la funzione* f *assume tutti i valori compresi tra* $f(a)$ *e* $f(b)$*.*

Dimostrazione. Sia $f(a) < k < f(b)$. Dobbiamo quindi mostrare che esiste un punto $x_0 \in I$ tale che $f(x_0) = k$. Consideriamo la funzione continua $g(x) = f(x) - k$. Allora

$$g(a) = f(a) - k < 0, \quad g(b) = f(b) - k > 0.$$

Per il Teorema degli zeri possiamo concludere che $g(x_0) = 0$ per un opportuno $x_0 \in I$. Ma allora $f(x_0) = k$. □

Esempio 5. *Sul pavimento di un vagone ferroviario è incernierata una sbarra (vedi figura (3)). Esiste una posizione iniziale per cui, quale che sia il moto del treno, la sbarra non cada sul pavimento ma arrivi alla fine del viaggio per esempio in posizione verticale?*

Indichiamo con x il valore dell'angolo che individua la posizione iniziale della sbarra e con $f(x)$ la posizione finale. Allora sarà $f(0) = 0$, $f(\pi) = 0$. Se, per ragioni fisiche, assumiamo che il moto della sbarra dipenda in maniera continua dal moto del treno potremo concludere che

$$\exists x_0 \in [0, \pi] \text{ t.c. } f(x_0) = \frac{\pi}{2}.$$

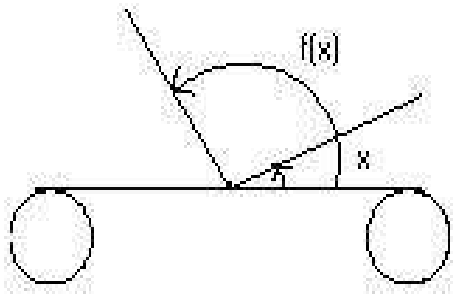

Figura 3: L'angolo x denota la posizione iniziale. L'angolo $f(x)$ è quello raggiunto alla fine del moto.

Esempio 6. *La funzione $P(x) = 3x^5 - 4x^2 - x + 1$ è continua? Vedremo in seguito che la risposta è affermativa. Osservato allora che*

$$P(0) = 1, \quad P(1) = -1,$$

per il Teorema degli zeri possiamo concludere che il polinomio $P(x)$ ammette almeno una radice.

Esempio 7. *La funzione $f(x) = x + c$ è continua. Infatti, fissato $\varepsilon > 0$, verifichiamo se è possibile scegliere $\delta > 0$ in modo che*

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Valutiamo che

$$|f(x) - f(x_0)| = |x + c - (x_o + c)| = |x - x_0| < \delta.$$

Basterà allora scegliere $\delta = \varepsilon$ per verificare la condizione di continuità.

Proposizione 8. *La composizione di due funzioni continue, ove definita, è una funzione continua.*

Dimostrazione. Sia dunque $f : I \to \mathbb{R}$ e $g : f(I) \to \mathbb{R}$ due funzioni continue. In queste ipotesi è definita la funzione composta

$$g \circ f : I \to \mathbb{R}$$

definita da

$$\forall x \in I : g \circ f(x) = g(f(x)).$$

Sia dunque $x_0 \in I$ e proviamo che la funzione $g \circ f$ è continua in x_0. Infatti, fissato $\varepsilon > 0$, dalla continuità di g in $f(x_0)$ segue che esiste $\delta_1 > 0$ tale che

$$\forall y \in f(I) : |y - f(x_0)| < \delta_1 \Rightarrow |g(y) - g(f(x_0))| < \varepsilon. \tag{1}$$

In corrispondenza di $\delta_1 > 0$, per la continuità di f in x_0 segue che esiste un $\delta > 0$ tale che

$$\forall x \in I : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \delta_1. \tag{2}$$

Mettendo insieme la (1) e la (2) si ottiene

$$\forall x \in I : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |g(f(x)) - g(f(x_0))| < \varepsilon.$$

□

0.2 Successioni

Definizione 9. *Si dice successione ogni funzione* $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. *Indicati con* $a_0 = a(0), \ldots, a_n = a(n)$, *si indicherà la successione semplicemente elencadone in maniera compatta i valori e scriveremo*

$$(a_n)_{n \geq 0}.$$

Definizione 10. *Si dice che una successione converge ad un numero reale* l *e si scrive*

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = l$$

se vale la seguente condizione

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \nu \in \mathbb{N} \ t.c. \ \forall n \geq \nu : |a_n - l| < \varepsilon.$$

Si dirà anche che la successione converge ad l *o tende a* l *o ha per limite* l *e si userà anche la scrittura più compatta* $a_n \to l$.

Osserviamo che la condizione che definisce il limite vale a meno di un numero finito di indici. Ogni volta che una proprietà vale fatta eccezione per un numero finito di indici diremo che essa vale definitivamente. Dunque la condizione di convergenza è sufficiente verificarla definitivamente.

Proposizione 11. *Il limite, se esiste, è unico.*

Dimostrazione. Supponiamo dunque che la successione ammetta due limiti distinti l_1 e l_2. Allora per la condizione di convergenza possiamo trovare $\nu_1, \nu_2 \in \mathbb{N}$ tali che

$$|a_n - l_1| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |a_n - l_2| < \frac{\varepsilon}{2}$$

rispettivamente per $n \geq \nu_1$ e $n \geq \nu_2$. Prendendo allora $n \geq \max(\nu_1, \nu_2)$ si avrebbe

$$|l_1 - l_2| = |l_1 - a_n + a_n - l_2| \leq |a_n - l_1| + |a_n - l_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

La disuguaglianza appena scritta vale quale che sia $\varepsilon > 0$. Allora deve essere $l_1 = l_2$. □

Esempio 12. *1.* $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Fissiamo $\varepsilon > 0$. *Poichè i numeri naturali non sono limitati in* $\mathbb{R}$ *possiamo trovare* $\nu \in \mathbb{N}$ *tale che* $\nu > \frac{1}{\varepsilon}$. *Allora*

$$\forall n \geq \nu : \frac{1}{n} \leq \frac{1}{\nu} < \varepsilon.$$

Le successioni che convergono a zero si dicono infinitesime.

2. $\lim_{n \to +\infty} \frac{n^2-1}{n^2+1} = 1$.

Infatti valutiamo che

$$\left| \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} - 1 \right| = \left| \frac{n^2 - 1 - n^2 + 1}{n^2 + 1} \right| = \left| \frac{-2}{n^2 + 1} \right| = \frac{2}{n^2 + 1} \leq \frac{2}{n}.$$

Tenendo presente il limite precedente, da un certo indice in poi, l'ultimo termine nella disugualianza precedente può essere reso piccolo quanto si vuole.

3. *La successione* $((-1)^n)_{n\geq 0}$ *non è convergente.*

   Infatti i termini della successione valgono alternatamente 1 *e* -1*, cosicchè la distanza da un qualsiasi numero reale può assumere soltanto due possibili valori e quindi non può diventare piccola a piacere.*

Definizione 13. *Una successione* $(a_n)_{n\geq 0}$ *si dice limitata se esiste* $M > 0$ *tale che*

$$\forall n \geq 0 \quad |a_n| \leq M.$$

Proposizione 14. *Ogni successione convergente è limitata.*

Dimostrazione. Sia dunque $a_n \to l \in \mathbb{R}$. Considerato ad esempio $1 > 0$, per definizione di convergenza esisterà $\nu \geq 0$ tale che per $n \geq \nu$ risulti

$$|a_n - l| < 1,$$

da cui

$$|a_n| \leq |l| + |a_n - 1| \leq |l| + 1.$$

Se allora prendiamo

$$M = \max\left(|l| + 1, |a_0|, |a_1|, \ldots, |a_\nu|\right)$$

avremo senz'altro che

$$\forall n \geq 0 \quad |a_n| \leq M.$$

□

Proposizione 15. *Il prodotto di una successione infinitesima per una limitata è infinitesimo.*

Dimostrazione. Sia dunque $(a_n)_{n\geq 0}$ una successione limitata e $(b_n)_{n\geq 0}$ una successione tale che $b_n \to 0$. Dimostriamo che $a_n b_n \to 0$. In effetti, tenendo conto della limitatezza, in corrispondenza di $\frac{\varepsilon}{M} > 0$ possiamo trovare $\nu \geq 0$ tale che per ogni $n \geq \nu$ si abbia $|b_n| < \frac{\varepsilon}{M}$. Allora si ha pure

$$|a_n b_n| = |a_n||b_n| \leq M|b_n| < M\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon.$$

□

Esempio 16. $\lim_{n\to+\infty} \frac{\cos\sqrt{n}}{n} = 0$.

Definizione 17. *Una successione* $(a_n)_{n\geq 0}$ *si dice divergente positivamente, o che tende a* $+\infty$ *e si scrive* $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$*, se vale la seguente condizione*

$$\forall M > 0 \ \exists \nu \in \mathbb{N} \ t.c. \ \forall n \geq \nu : a_n > M.$$

Si dice invece che la successone diverge negativamente, o che tende a $-\infty$ *se*

$$\forall K < 0 \ \exists \nu \in \mathbb{N} \ t.c. \ \forall n \geq \nu : a_n < K.$$

In maniera compatta talvolta scriveremo $a_n \to \pm\infty$.

Evidentemente, le successioni divergenti non sono limitate.

Esempio 18. $\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$.

Osserviamo che se due successioni verificano definitivamente

$$a_n \leq b_n$$

allora se la successione $(a_n)_{n\geq 0}$ *è divergente positivamente, anche la* $(b_n)_{n\geq 0}$ *lo è. Così, essendo* $n \leq n!$ *e* $n \leq n^n$*, si ha*

$$\lim_{n\to+\infty} n! = +\infty, \qquad \lim_{n\to+\infty} n^n = +\infty.$$

Esercizio $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}$.

Fissato $M > 0$*, tenuto conto dell'esempio precedente, possiamo trovare* $\nu \geq 0$ *tale che per* $n \geq \nu$ *si abbia* $n \geq M^2$*. Poichè la radice quadrata è una funzione crescente avremo pure che*

$$\forall n \geq \nu : \quad \sqrt{n} > M.$$

Pertanto $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$.

Proposizione 19 (Teorema dei due carabinieri). *Siano* $a_n \to l$ *e* $c_n \to l$*. Se* $(b_n)_{n\geq 0}$ *è una terza successione che definitivamente verifica*

$$a_n \leq b_n \leq c_n,$$

Allora si ha $b_n \to l$.

Dimostrazione. Definitivamente abbiamo $|a_n - l|, |c_n - l| < \varepsilon/2$. Allora definitivamente abbiamo pure che

$$|b_n - l| = \begin{cases} b_n - l \leq c_n - l \leq |c_n - l| + |a_n - l| < \varepsilon \\ l - b_n \leq l - a_n \leq |c_n - l| + |a_n - l| < \varepsilon \end{cases}$$

□

Esempio 20. $\lim_{n\to+\infty} \frac{1+2(-1)^n}{3n}$.

$$\frac{-1}{3n} \leq \frac{1+2(-1)^n}{3n} \leq \frac{1}{n}.$$

Allora possiamo concludere che $\lim_{n\to+\infty} \frac{1+2(-1)^n}{3n} = 0$.

$$a_n \to l \Rightarrow |a_n| \to |l|.$$

Basta infatti considerare che

$$||a_n| - |l|| \leq |a_n - l| \to 0.$$

Proposizione 21 (Permanenza del segno). *Sia* $a_n \to l$*. Se* $h < l < k$*, allora definitivamente si ha pure*

$$h < a_n < k.$$

Viceversa, se definitivamente $h < a_n < k$*, allora*

$$h \leq l \leq k.$$

Dimostrazione. Per definizione di convergenza, fissato $\varepsilon = l - h > 0$, definitivamente vale la disuguaglianza

$$|a_n - l| < l - h \Rightarrow h - l < a_n - l \Rightarrow h < a_n.$$

L'altra disuguaglianza si ottiene in maniera simile prendendo $\varepsilon = k - l > 0$. Il viceversa si ottiene per contrapposizione. □

Teorema 22 (Algebra dei limiti). *Siano* $(a_n)_{n\geq 0}$ *e* $(b_n)_{n\geq 0}$ *due successioni convergenti rispettivamente ad* $a, b \in \mathbb{R}$*. Allora si ha*

- $a_n + b_n \to a + b$;
- $a_n b_n \to ab$;

- $a_n - b_n \to a - b$;
- $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$, *se è* $b \neq 0$.

Dimostrazione. La prima affermazione discende dalla disuguaglianza

$$|a_n + b_n - a - b| \leq |a_n - a| + |b_n - b|.$$

Per la seconda basta considerare

$$|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| \leq |a_n b_n - a_n b| + |a_n b - ab| = |a_n||b_n - b| + |b||a_n - a|.$$

Per l'ultima affermazione proviamo che

$$b_n \to b \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{b_n} \to \frac{1}{b}.$$

Supponiamo per esempio che sia $0 < h < b$. Per la permanenza del segno avremo che definitivamente sarà $0 < h < b_n$. Allora

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \frac{|b - b_n|}{|b_n b|} \leq \frac{|b - b_n|}{bh}.$$

□

Valgono anche le seguenti regole algebriche per i limiti che si possono provare quale utile esercizio

- $a_n \to l, b_n \to \pm\infty \Rightarrow a_n + b_n \to \pm\infty$;
- $a_n \to +\infty, b_n \to +\infty \Rightarrow a_n + b_n \to +\infty$;
- $a_n \to -\infty, b_n \to -\infty \Rightarrow a_n + b_n \to -\infty$;
- $a_n \to l > 0, b_n \to \pm\infty \Rightarrow a_n b_n \to \pm\infty$;
- $a_n \to l < 0, b_n \to \pm\infty \Rightarrow a_n b_n \to \mp\infty$;
- $a_n \to +\infty, b_n \to \pm\infty \Rightarrow a_n b_n \to \pm\infty$;
- $a_n \to -\infty, b_n \to -\infty \Rightarrow a_n b_n \to +\infty$;
- $a_n \to l, b_n \to \pm\infty \Rightarrow a_n/b_n \to 0$.

Si osservi che nella precedente tabella non rientrano i casi

- $a_n \to +\infty, b_n \to -\infty \Rightarrow a_n + b_n \to ?$
- $a_n \to 0, b_n \to \pm\infty \Rightarrow a_n b_n \to ?$
- $a_n \to \pm\infty, b_n \to \pm\infty \Rightarrow a_n/b_n \to ?$
- $a_n \to 0, b_n \to 0 \Rightarrow a_n/b_n \to ?$

che andranno studiati volta per volta.

Esempio 23. $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+2n-1}{2n^2+1}$.

$$\frac{n^2 + 2n - 1}{2n^2 + 1} = \frac{1 + 2/n - 1/n^2}{2 + 1/n^2} \to \frac{1}{2}.$$

Esercizi

1. $\lim_{n\to+\infty} \frac{n+2+\cos n}{3-n}$,
2. $\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n}$
3. $\lim_{n\to+\infty} n - \sqrt{n}$
4. $\lim_{n\to+\infty} \frac{1-n}{\sqrt{n}+1}$
5. $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^3-2n^2}{n+3}$
6. $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n+2} - \sqrt{n-1}$

Teorema 24 (Continuità per successioni). *Una funzione $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua in un punto $x_0 \in I$ se e soltanto per ogni successione $(x_n)_{n\geq 0}$ di punti di I si ha*

$$x_n \to x_0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x_0). \tag{3}$$

Dimostrazione. Sia dunque $x_n \to x_0$ e fissiamo un arbitrario $\varepsilon > 0$. Per la continuità di f in x_0 possiamo trovare un $\delta > 0$ tale che

$$\forall x \in I : \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon. \tag{4}$$

In corrispondenza di $\delta > 0$, poichè $x_n \to x_0$ deduciamo che definitivamente vale $|x_n - x_0| < \delta$ e dalla (4) deduciamo allora che definitivamente vale $|f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon$, ovvero che $f(x_n) \to f(x_0)$.

Viceversa, vera la (3), dobbiamo dimostrare che la funzione f è continua in x_0. Procediamo per assurdo. Se la f non fosse continua in x_0, allora esisterebbe almeno un $\varepsilon > 0$ per cui valga:

$$\forall \delta > 0 : \exists x \in I, |x - x_0| < \delta, \ t.c. \ |f(x) - f(x_0)| > \varepsilon.$$

Allora, per ogni $n \geq 1$, preso $\delta = 1/n$, esisterebbero dei punti $x_n \in I$ tali che

$$|x_n - x_0| < \frac{1}{n}, \quad |f(x_n) - f(x_0)| > \varepsilon.$$

Per il Teorema dei due carabinieri, la prima disuguaglianza ci assicura che $x_n \to x_0$, ma allora la seconda disuguaglianza contraddice il fatto che per la (3) dovrebbe essere $f(x_n) \to f(x_0)$. Dunque la funzione f deve per forza essere continua in x_0. □

Teorema 25 (Algebra delle funzioni continue). *Siano $f, g : I \to \mathbb{R}$ due funzioni continue. Allora le funzioni $f + g, fg, f/g$ sono continue nel loro dominio.*

Dimostrazione. Sia $x_n \to x_0$. Allora

$$(f + g)(x_n) = f(x_n) + g(x_n) \to f(x_0) + g(x_0) = (f + g)(x_0).$$

Allo stesso modo si verificano le altre affermazioni. □

Dunque possiamo affermare che le funzioni polinomiali $P(x)$ sono continue. Allo stesso modo, tutte le funzioni razionali $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ sono continue.

Esempio 26. *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Si dimostri che se f è additiva, ovvero tale che $f(x + y) = f(x) + f(y)$, allora f è una retta passante per l'origine.*

Dobbiamo dunque verificare che $f(x) = mx$. Cominciamo con l'osservare che

$$f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0) \Rightarrow f(0) = 0.$$

Inoltre possiamo verificare cha la f è dispari. Infatti

$$0 = f(x - x) = f(x) + f(-x) \Rightarrow f(-x) = -f(x).$$

Sia ora $n \in \mathbb{N}$. Allora

$$f(nx) = f(x + \ldots + x) = f(x) + \ldots + f(x) = nf(x). \tag{5}$$

Dalla (5) deduciamo inoltre che per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha pure $1/nf(nx) = f(x)$. Allora per $x = y/n$ deduciamo

$$\forall y \in \mathbb{R}: \quad f(y/n) = 1/nf(y). \tag{6}$$

Preso allora un qualsiasi $q = m/n \in \mathbb{Q}$ le (5) e (6) insieme ci dicono che

$$f(qx) = qf(x). \tag{7}$$

Infine, se $\lambda \in \mathbb{R}$, per la densità dei razionali, possiamo trovare una successione di numeri razionali $(q_n)_{n\geq 0}$ tale che $q_n \to \lambda$. A causa della continuità di f abbiamo allora che

$$f(\lambda x) = \lim_{n\to+\infty} f(q_n x) = \lim_{n\to+\infty} q_n f(x) = \lambda f(x).$$

In definitiva abbiamo trovato che

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = f(1x) = xf(1).$$

Dunque basta porre $m = f(1)$ per avere che $f(x) = mx$.

Esempio 27.

- *Ogni funzione continua trasforma intervalli in intervalli.*

  Questa proprietà abbiamo visto essere una conseguenza del Teorema sui valori intermedi. In particolare si verifica che

  $$f(I) = \left(\inf_I f, \sup_I f\right).$$

- *Ogni funzione continua trasforma intervalli compatti (chiusi e limitati) in intervalli compatti.*

  Questa proprietà invece è diretta conseguenza del Teorema di Weierstrass in quanto gli estremi inferiore e superiore della funzione sono in questo caso raggiunti. Pertanto

  $$f(I) = \left[\min_I f, \max_I f\right].$$

- *Non esiste nessuna funzione continua ed invertibile dell'intervallo $[0,1]$ in $]0,1]$. Infatti Una tale funzione continua non potrebbe essere surgettiva essendo l'insieme di arrivo un intervallo aperto.*

- *Sia $F : X \to \mathbb{R}$ una funzione limitata e si considerino due numeri m, M tali che $m < \inf_X f$ e $M > \sup_X f$. Se $c \in [m, M]$ esiste sempre un $x \in X$ tale che $f(x) = c$? Cambia qualcosa se X è un intervallo e la funzione è continua?*

  La prima domanda ha senz'altro risposta negativa. Ad esempio, se $c = m$, c non può far parte dell'immagine della f poichè altrimenti $f(x) = c < \inf_X f \leq f(x)$. Tale affermazione rimane vera anche se X è un intervallo o se la f è continua. In quest'ultimo caso possiamo soltanto osservare che il problema posto è risolvibile nell'intervallo avente per estremi il minimo ed il massimo valore che la f assume in X.

0.3 Alcune applicazioni del Teorema di Weierstrass

- Si consideri il settore circolare della circonferenza unitaria contenuto nel primo quadrante. Fissato un punto P della circonferenza si costruisca il trapezio T inscritto che si ottiene congiungendo P con il punto $Q(1,0)$ e mandando la perpendicolare da P all'asse delle ordinate.

Tra tutti i trapezi inscritti, certamente non si può trovarne uno che abbia area più piccola di tutti. Infatti, quando P si sovrappone a Q il trapezio degenera in un segmento. Pertanto $\inf A(T) = 0$. Possiamo invece determinare un trapezio che abbia area massima?

Osserviamo che senz'altro $A(T) \leq \pi/4$. Dunque bisogna verificare che l'estremo superiore è questa volta raggiunto. A tal fine sarà sufficiente mostrare che l'area varia in maniera continua. Considerato allora che $P(x, \sqrt{1-x^2})$ avremo

$$A(T) = \frac{(1+x)\sqrt{1-x^2}}{2}.$$

Dunque l'area è espressa da una funzione continua definita nell'intervallo $[0, 1]$. Per il Teorema di Weierstrass allora esiste un trapezio inscritto di area massima.

- Siano $p, \varepsilon > 0$. Dimostriamo che esiste una costante $C_\varepsilon > 0$ tale che

$$\forall x \geq 0 : (x+1)^p \leq (1+\varepsilon)x^p + C_\varepsilon.$$

Osserviamo che tale disuguaglianza equivale a dimostrare che la funzione

$$f(x) = (x+1)^p - (1+\varepsilon)x^p$$

è limitata superiormente. In tal caso si potrà senz'altro prendere $C_\varepsilon = \sup_{x\geq 0} f$. Questa volta però la f è definita in $[0, +\infty[$ e quindi non possiamo applicare direttamente il Teorema di Weierstrass. Tuttavia, possiamo stabilire che

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (x+1)^p - (1+\varepsilon)x^p = \lim_{x\to+\infty} x^p \left[\left(\frac{x+1}{x}\right)^p - (1+\varepsilon)\right] = -\infty.$$

Allora, tenuto conto del Lemma seguente, possiamo concludere che la f è dotata di massimo.

Lemma 28. *Sia $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ una funzione continua. Se $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ (risp. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$) allora la f è dotata di massimo (risp. minimo).*

Dimostrazione. Prendiamo un punto qualsiasi dell'immagine di f, ad esempio $f(0)$. Per definizione di limite, esite un $\bar{x} \geq 0$ tale che

$$\forall x \geq \bar{x} : \ f(x) \leq f(0).$$

Sia allora

$$M = \max_{[0,\bar{x}]} f.$$

Allora M è il massimo della funzione. Infatti, se $x \in [0, \bar{x}]$ abbiamo $f(x) \leq M$. Se invece $x > \bar{x}$ abbiamo $f(x) \leq f(0) \leq M$. L'altro caso si verifica in maniera del tutto analoga. □

- Tra tutti i triangoli di assegnata base c e assegnata area A trovare quello che minimizza la somma degli altri due lati.

Essendo l'area e la base fissata, risulta che anche l'altezza h è fissata. Possiamo dunque limitarci a considerare i triangoli aventi gli estremi della base nell'origine e nel punto $C(c, 0)$ e l'altro vertice P sulla retta di equazione $y = h$. Detti l_1, l_2 i due lati del triangolo abbiamo

$$l_1 = \sqrt{x^2+h^2}, \quad l_2 = \sqrt{(x-c)^2+h^2}.$$

Pertanto la quantità da minimizzare è

$$l_1 + l_2 = \sqrt{x^2+h^2} + \sqrt{(x-c)^2+h^2} := f(x).$$

Dunque dobbiamo verificare se la funzione continua $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ ammette minimo. Ora, poichè

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

per il Lemma precedente ricaviamo che la f ammette un punto di minimo.

Da considerazioni geometriche (i raggi di luce si rifrangono con angoli di incidenza uguali) si vede che il triangolo ottimale è quello isoscele. Ovvero il minimo è unico ed è raggiunto nel punto $x = c/2$.

Esempio 29. – *L'equazione* $2x^3 + 3x - 3 = 0$ *amette una ed una sola soluzione reale.*

– *L'insieme*

$$A = \left\{ \log \left(\arccos \left(\frac{n-1}{n} \right) \right) : \ n > 1 \right\}$$

è limitato superiormente ma non inferiormente. Inoltre

$$\sup A = \log \frac{\pi}{2}.$$