

Esercizi svolti

Luca Granieri*

Gli esercizi qui raccolti sono tratti dalle prove assegnate nei concorsi di ammissione al dottorato di ricerca in matematica negli ultimi anni ed in diverse università italiane. Per ogni esercizio viene indicata la sede, l'anno e il tema in cui è stato assegnato. Si tratta di esercizi per lo più di analisi, scelti tra quelli che mi pareva di poter risolvere correttamente (a tal proposito ricevo volentieri ogni segnalazione di errore). Nonostante questa limitazione, credo comunque che possano risultare utili a quanti si preparano a detti concorsi, o agli studenti che abbiano lo scritto per gli esami degli ultimi anni, per i quali, in genere, non c'è molto materiale disponibile per potersi preparare adeguatamente. A tal fine, ho inserito anche diversi riferimenti bibliografici, utili per rivedere ed approfondire la teoria richiesta dagli esercizi.

Esercizio 1 (Milano, 2001, Tema C, Esercizio 5) Sia H_0^1 la chiusura di $\{u \in C^1([0, 1]), u(0) = u(1) = 0\}$ rispetto alla norma $\|u\|^2 = \int_0^1 (|u'|^2 + |u|^2) dx$. Siano

$$f : H_0^1 \rightarrow \mathbb{R} : f(v) = \int_0^1 (12x - 1)v dx$$

$$B : H_0^1 \times H_0^1 \rightarrow \mathbb{R} : B(u, v) = \int_0^1 (3x + 1)u'v' dx$$

- i) Dimostrare che f è un funzionale lineare limitato su H_0^1 , e B una forma bilineare che genera un prodotto scalare su H_0^1 ;
- ii) dimostrare che esiste un unico $\bar{u} \in H_0^1$ tale che $B(\bar{u}, v) = f(v)$, per ogni $v \in H_0^1$;
- iii) determinare \bar{u} .

svolgimento. Questo è un esercizio sugli spazi di Sobolev 1-dimensionali. Un buon riferimento è il capitolo 8 di [2]. Dunque, lo spazio di Sobolev H_0^1 è fatto dalle funzioni di $L^2([0, 1])$ la cui derivata debole è ancora in $L^2([0, 1])$ e che si annullano negli estremi dell'intervallo. [2, pag.211] Poichè la funzione integranda è lineare, allora ovviamente anche f è lineare. Essendo anche la

*Dipartimento di Matematica L. Tonelli
Università di Pisa, via Buonarroti 2, 56127 Pisa, Italy. granieri@mail.dm.unipi.it

derivazione debole una operazione lineare, è chiaro che B è bilineare. Utilizzando la disuguaglianza di Hölder abbiamo:

$$\begin{aligned} |f(v)|^2 &\leq \int_0^1 |12x - 1| |v(x)| dx \leq \left(\int_0^1 |12x - 1|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 |v(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq C \|v\|_2 \leq C \|v\| \end{aligned}$$

Pertanto f è continuo. Verifichiamo ora le ulteriore proprietà del prodotto scalare per B . Intanto è ovvio che $B(u, v) = B(v, u)$.

Inoltre $B(u, u) = \int_0^1 (3x + 1)(u')^2 dx \geq 0$, essendo la funzione $3x + 1$ positiva in $[0, 1]$. Infine

$$B(u, u) = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 (u')^2 dx = 0 \Rightarrow u' = 0 \quad q.o. \quad (1)$$

D'altronde sappiamo che per le funzioni di H^1 vale la formula fondamentale del calcolo integrale [2, pag.193], ovvero $\forall x, y \in [0, 1] : u(x) = u(y) + \int_x^y u'(t) dt$. Questo, unito alla (1), ci dice che u è costante in $[0, 1]$. Allora poichè u si annulla agli estremi, senz'altro dev'essere $u = 0$. Dunque il punto i) è verificato.

ii) Dobbiamo verificare che il funzionale f si può rappresentare mediante la forma bilineare B . Uno strumento naturale in questo frangente è il teorema di Lax-Milgram [2, pag.136], che ci dice che questo è possibile non appena B è continua e coercitiva. In effetti,

$$\begin{aligned} |B(u, v)| &\leq \int_0^1 |3x + 1| |u'| |v'| dx \leq \|3x + 1\|_\infty \left(\int_0^1 |u'|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 |v'|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \|3x + 1\|_\infty \|u\| \|v\| \end{aligned}$$

Donde B è continua. Utilizzando ora la disuguaglianza di Poincarè [2, pag.213] abbiamo

$$B(u, u) = \int_0^1 (3x + 1)(u')^2 dx \geq \int_0^1 (u')^2 dx = \|u'\|_2^2 \geq \|u\|_2^2$$

Donde B è coercitiva. ii) segue allora da Lax-Milgram.

iii) Dobbiamo determinare $\bar{u} \in H_0^1$ che verifichi l'equazione:

$B(\bar{u}, v) - f(v) = 0 \quad \forall v \in H_0^1$. Per semplificarci la vita, supponiamo che \bar{u}, v siano regolari. Per l'unicità, se troveremo una \bar{u} siffatta saremo a posto. integrando per parti abbiamo

$$\begin{aligned} B(\bar{u}, v) - f(v) = 0 &\Leftrightarrow \int_0^1 (3x + 1)\bar{u}' v dx - \int_0^1 (12x - 1)v dx = 0 \Leftrightarrow [(3x + 1)\bar{u}' v]_0^1 - \\ &- \int_0^1 [\bar{u}''(3x + 1) + 3\bar{u}'] v dx - \int_0^1 (12x - 1)v dx = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \int_0^1 [\bar{u}''(3x + 1) + 3\bar{u}' - 12x + 1] v dx = 0 \end{aligned}$$

In particolare ciò deve valere $\forall v \in \mathcal{C}_c([0, 1], \mathbb{R})$, pertanto dev'essere $(3x + 1)\bar{u}'' + 3\bar{u}' - 12x + 1 = 0$. Dunque abbiamo ricavato che \bar{u} soddisfa il seguente problema ai limiti:

$$\begin{cases} (3x + 1)u'' + 3u' - 12x + 1 = 0 \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Si tratta allora di risolvere una equazione differenziale ordinaria del second'ordine a coefficienti variabili. A tal fine cerchiamo di abbassarne l'ordine ponendo $z = u'$, da cui ricaviamo l'equazione

$$(3x + 1)z' + 3z - 12x + 1 = 0 \quad (2)$$

In forma normale abbiamo $z' = -\frac{3}{3x+1}z + \frac{12x-1}{3x+1}$. Quindi ci siamo ricondotti ad una equazione del prim'ordine. Consideriamo allora l'omogenea associata $z' = -\frac{3}{3x+1}z$. Separando le variabili, otteniamo che

$z(x) = ce^{-\lg(3x+1)} = c\frac{1}{3x+1}$. Per trovare un integrale particolare della (2) calcoliamo $\int \frac{12x-1}{3x+1}(3x+1)dx = \int (12x-1)dx = 6x^2 - x$. Pertanto un integrale particolare della (2) è $\frac{6x^2-x}{3x+1}$. In definitiva abbiamo che $z(x) = \frac{c}{3x+1} + \frac{6x^2-x}{3x+1}$. Allora abbiamo $u' = \frac{c}{3x+1} + \frac{6x^2-x}{3x+1}$. Integrando otteniamo

$$u(x) = c_1 \lg(3x + 1) + x^2 - x + c_2$$

Dalle condizioni ai limiti allora si ricava facilmente che $u(x) = x^2 - x$. Per l'unicità abbiamo trovato che $\bar{u} = x^2 - x$. \square

Esercizio 2 (Milano, 2001, Tema C, esercizio 6) Sia (X, \mathcal{M}, μ) uno spazio di misura.

i) Siano $1 < p < +\infty$ e q tali che $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Siano $\{f_n\}, \{g_n\}$ due successioni di funzioni misurabili tali che $f_n \rightarrow f$ in $L^p(X, \mu)$ e $g_n \rightarrow g$ in $L^q(X, \mu)$ per $n \rightarrow \infty$.

Mostrare che $f_n g_n \rightarrow fg$ in $L^1(X, \mu)$.

ii) Siano E uno spazio di Banach e E' il suo duale. Siano $\{f_n\} \subset E$ e $\{\phi_n\} \subset E'$ successioni tali che $f_n \rightarrow f$ (convergenza debole in E) e $\phi_n \rightarrow \phi$ (convergenza forte nel duale E'). Mostrare che $\langle \phi_n, f_n \rangle \rightarrow \langle \phi, f \rangle$ per $n \rightarrow +\infty$. Qui $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota la forma duale.

iii) Siano $X = \mathbb{R}$ e μ la misura di Lebesgue. Sia g una funzione misurabile tale che $g \in L^p(\mathbb{R})$ dove $1 < p < +\infty$. Discutere la convergenza forte (in norma $\|\cdot\|_p$) e convergenza debole delle successioni

$$f_n(x) = \arctan(n|x|)g(x) \quad e \quad g_n(x) = n^{\frac{1}{p}}g(nx).$$

svolgimento. Le nozioni fondamentali sugli spazi L^p e sui vari tipi di convergenza si possono trovare per esempio in [2].

i) Utilizzando la disuguaglianza di Hölder e il fatto che le successioni che convergono debolmente sono limitate [2, pag.53], abbiamo

$$\begin{aligned} \int_X |f_n g_n - fg| d\mu &\leq \int_X |f_n g_n - f_n g| d\mu + \int_X |f_n g - fg| d\mu = \int_X |f_n| |g_n - g| d\mu + \\ &+ \int_X |g| |f_n - f| d\mu \leq \|f_n\|_p \|g_n - g\|_q + \|g\|_q \|f_n - f\|_p \leq \end{aligned}$$

$$\leq C \|g_n - g\|_q + \|g\|_q \|f_n - f\|_p \rightarrow 0 \text{ per } n \rightarrow +\infty$$

ii) Ricordiamo che $f_n \rightarrow f \Leftrightarrow \forall \phi \in E' : \langle \phi, f_n \rangle \rightarrow \langle \phi, f \rangle$ per $n \rightarrow +\infty$
Allora

$$\begin{aligned} | \langle \phi_n, f_n \rangle - \langle \phi, f \rangle | &\leq | \langle \phi_n, f_n \rangle - \langle \phi, f_n \rangle | + \\ &+ | \langle \phi, f_n \rangle - \langle \phi, f \rangle | \leq \\ &\leq \| \phi_n - \phi \|_{E'} \|f_n\| + | \langle \phi, f_n \rangle - \langle \phi, f \rangle | \rightarrow 0 \text{ per } n \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

iii) Poniamo $\varphi_n(x) = \arctan(n|x|)$. Tranne che nell'origine, sappiamo che $\varphi_n \rightarrow \frac{\pi}{2}$. Dunque abbiamo:

$$|f_n(x) - \frac{\pi}{2}g(x)|^p = |g(x)|^p |\varphi_n(x) - \frac{\pi}{2}|^p \leq |g(x)|^p \in L^1$$

Mentre $\lim_{n \rightarrow +\infty} |f_n - \frac{\pi}{2}g|^p = 0$ q.o. Allora, per il teorema della convergenza dominata di Lebesgue, possiamo concludere che $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} |f_n - \frac{\pi}{2}g|^p dx = 0$. Pertanto $f_n \rightarrow \frac{\pi}{2}g$ in L^p . Ora osserviamo che

$$\int_{\mathbb{R}} |g_n(x)|^p dx = \int_{\mathbb{R}} n |g(nx)|^p dx = \int_{\mathbb{R}} |g(y)|^p dy \Rightarrow \|g_n\|_p = \|g\|_p$$

Poichè per $1 < p < +\infty$ lo spazio L^p è riflessivo, per Eberlein-Smulian [2, pag.76], almeno possiamo dire che c'è una estratta $g_{h(n)}$ che converge debolmente. Vediamo di determinarne il limite. Osserviamo che

$$\int_{\mathbb{R}} g_n(x) \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}} n^{\frac{1}{p}} g(nx) \varphi(x) dx = n^{(1/p)-1} \int_{\mathbb{R}} g(y) \varphi(y/n) dy$$

con $\varphi \in L^q$. Se scegliamo $\varphi \in \mathcal{C}_c$, per la convergenza dominata di Lebesgue, il secondo membro della precedente uguaglianza converge a zero. Allora, per densità, questo vale anche per $\varphi \in L^q$. Infatti, se fissiamo $\varphi \in L^q$ ed $\varepsilon > 0$, per densità, esiste $\varphi_\varepsilon \in \mathcal{C}_c$ tale che $\|\varphi - \varphi_\varepsilon\|_q < \varepsilon$. Allora, per n abbastanza grande, abbiamo pure che $\int_{\mathbb{R}} g_n \varphi_\varepsilon dx < \varepsilon$. Allora

$$\int_{\mathbb{R}} g_n \varphi dx \leq \int_{\mathbb{R}} |g_n \varphi - g_n \varphi_\varepsilon| dx + \int_{\mathbb{R}} g_n \varphi_\varepsilon dx < \|g_n\|_p \|\varphi - \varphi_\varepsilon\|_q + \varepsilon < \|g\|_p \varepsilon + \varepsilon$$

Pertanto, abbiamo che in effetti $g_n \rightarrow 0$. Poichè $\{g_n\}$ ha norma costante, allora la convergenza non può essere forte. \square

Esercizio 3 (Torino, 2001, Tema 3, esercizio 4) Sia $f_n : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ data da

$$f_n(x) = n^2 x^{\frac{1}{2}} e^{-nx}.$$

(a) Calcolare $\|f_n\|_\infty = \sup\{|f_n| : x \in [0, +\infty[\}$. Calcolare il limite puntuale f di f_n .

(b) E' vero che $f_n \rightarrow f$ uniformemente in $[0, +\infty[$? E in $[1, +\infty[$?

(c) E' vero che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} f_n(x) dx = \int_0^{+\infty} f(x) dx ?$$

svolgimento. Questo è un tipico esercizio di analisi II. Un ottimo testo per esercitarsi su questi temi è

(a) Cominciamo con l'osservare che si tratta di funzioni continue, positive, con $f_n(0) = 0$, mentre $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$. Allora senz'altro f_n è dotata di massimo in $[0, +\infty[$. Per $x \neq 0$ calcoliamo:

$$\begin{aligned} f'_n(x) &= n^2 \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{-nx} - n^3 \sqrt{x} e^{-nx} = n^2 e^{-nx} \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - n\sqrt{x} \right) \geq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}} \geq n\sqrt{x} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \geq nx \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{2n} < 1 \end{aligned} \quad (3)$$

Allora possiamo concludere che f_n ha un massimo nel punto $x = \frac{1}{2n}$. Pertanto

$$\|f_n\|_\infty = f_n\left(\frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} n^{\frac{3}{2}} e^{-1/2} \quad (4)$$

E' facile verificare che il limite puntuale è $f = 0$.

(b) La convergenza non può essere uniforme in $[0, +\infty[$, poichè dalla (4) risulta che $\|f_n\|_\infty \rightarrow +\infty$. La (3) ci dice che le f_n sono decrescenti in $[1, +\infty[$. In tal caso abbiamo che $\|f_n\|_\infty = f_n(1) = n^2 e^{-n} \rightarrow 0$. Quindi la risposta alla seconda domanda è positiva.

$$\begin{aligned} (c) \quad \int_0^{+\infty} f_n(x) dx &= \int_0^{+\infty} n^2 \sqrt{x} e^{-nx} dx = \int_0^{+\infty} \frac{n^2 \sqrt{y}}{n\sqrt{n}} e^{-y} dy = \\ &= \sqrt{n} \int_0^{+\infty} \sqrt{y} e^{-y} dy \rightarrow +\infty \text{ per } n \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

Pertanto la risposta è negativa. \square

Esercizio 4 (Torino, 2001, Tema 3, esercizio 5) Sia $\mathcal{D}(\mathbb{R}) = \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ e sia \mathcal{D}' il suo duale, cioè lo spazio delle distribuzioni su \mathbb{R} , $\delta \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ la delta di Dirac concentrata in $x = 0$. Sia

$$\varphi_\varepsilon(x) = \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2}$$

Si dimostri che in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ vale il seguente passaggio al limite

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varphi_\varepsilon(x) = \pi \delta$$

svolgimento. Una semplice introduzione alle distribuzioni si può trovare in [4]. Una trattazione più approfondita si trova in [9]. La famiglia di funzioni $(\varphi_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ è, a meno del fattore $\frac{1}{\pi}$, la famiglia regolarizzante associata al cosiddetto nucleo di Cauchy-Poisson: $\psi(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}$. In effetti si tratta di una funzione $\psi \in L^1(\mathbb{R})$ con $\int_{\mathbb{R}} \psi(x) dx = 1$. Infatti

$$\int_{\mathbb{R}} \psi(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{1}{\pi} [\arctan x]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{1}{\pi} \pi = 1$$

La famiglia regolarizzante è data allora da $\psi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} \psi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$. Naturalmente abbiamo anche $\int_{\mathbb{R}} \psi_\varepsilon(x) dx = \frac{1}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}} \psi(y) \varepsilon dy = 1$. Tra le proprietà fondamentali delle famiglie regolarizzanti c'è la seguente:

$$f \text{ uniformemente continua e limitata} \Rightarrow \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \psi_\varepsilon * f = f \text{ uniformemente} \quad (5)$$

(per le proprietà fondamentali della convoluzione e della regolarizzazione si può ad esempio consultare [2]). Per comodità del lettore diamo la dimostrazione di quanto affermato:

$$\begin{aligned} |\psi_\varepsilon * f(x) - f(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}} f(x-y)\psi_\varepsilon(y)dy - \int_{\mathbb{R}} \psi_\varepsilon(y)f(x)dy \right| \leq \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} |\psi_\varepsilon(y)||f(x-y) - f(x)|dy \end{aligned} \quad (6)$$

Fissato $r > 0$, per l'uniforme continuità, esiste $\delta > 0$ tale che

$$\forall u, v \in \mathbb{R} : |u - v| < \delta \Rightarrow |f(u) - f(v)| < r \quad (7)$$

Osserviamo che

$$\begin{aligned} \int_{|y|>\delta} |\psi_\varepsilon(y)|dy &= \int_{\mathbb{R}} |\psi_\varepsilon(y)|\chi_{\bar{B}(0,\delta)^c}(y)dy = \frac{1}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}} |\psi(y/\varepsilon)|\chi_{\bar{B}(0,\delta)^c}(y)dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}} |\psi(z)|\chi_{\bar{B}(0,\delta)^c}(z\varepsilon)dz = \int_{\mathbb{R}} |\psi(z)|\chi_{\bar{B}(0,\delta/\varepsilon)^c}(z)dz = \int_{|z|>\delta/\varepsilon} |\psi(z)|dz \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Pertanto esiste un ε_0 tale che

$$\forall \varepsilon \leq \varepsilon_0 : \int_{|y|>\delta} |\psi_\varepsilon(y)|dy < r \quad (8)$$

Allora se $\varepsilon < \varepsilon_0$ e $x \in \mathbb{R}$, a causa di (6), (7) e (8), abbiamo che:

$$\begin{aligned} |\psi_\varepsilon * f(x)| &\leq \int_{|y|\leq\delta} |f(x-y) - f(x)||\psi_\varepsilon(y)|dy + \int_{|y|>\delta} |f(x-y) - f(x)||\psi_\varepsilon(y)|dy < \\ &< r\|\psi\|_1 + 2\|f\|_\infty r = r(\|\psi\|_1 + 2\|f\|_\infty) \end{aligned}$$

Torniamo ora al nostro esercizio, ed osserviamo che $\varphi_\varepsilon = \pi\psi_\varepsilon$. Poichè si tratta di funzioni in L^1 , nel senso delle distribuzioni e tenuto conto della (5), abbiamo che

$$\forall f \in \mathcal{D}' : \varphi_\varepsilon(f) = \int_{\mathbb{R}} \varphi_\varepsilon(x)f(x)dx = \varphi_\varepsilon * f(0) \rightarrow \pi f(0) = \pi\delta(f) \quad \square$$

Esercizio 5 (S.I.S.S.A., Settore di Analisi Funzionale e applicazioni)
(1994, esercizio 2)

Sia

$$c_0 = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R} : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0\}$$

e sia $u : c_0 \rightarrow \mathbb{R}$ un funzionale lineare e continuo. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia $\eta_n = u(e^{(n)})$, dove $e_j^{(n)} = 0$ per $j \neq n$ e $e_n^{(n)} = 1$. Provare che $(\eta_n) \in \ell^1$ e $\|u\| = \sum_{n \in \mathbb{N}} |\eta_n|$.

svolgimento. Utilizzando il simbolo di Kronecker abbiamo: $e_j^{(n)} = \delta_{j,n}$. Dobbiamo verificare che $\sum_{n=0}^{+\infty} |\eta_n|$ è convergente. E' noto che $(c_0)' \approx \ell^1$. Allora esiste un unico $x = (x_j)_{j \in \mathbb{N}} \in \ell^1$ tale che $\forall y \in c_0 : u(y) = \sum_{j=0}^{+\infty} y_j x_j$. Dunque abbiamo:

$$\eta_n = u(e^{(n)}) = \sum_{j=0}^{+\infty} e_j^{(n)} x_j = \sum_{j=0}^{+\infty} \delta_{j,n} x_j = x_n$$

Pertanto $\eta = x \in \ell^1$. Resta da valutarne la norma.

$$|u(y)| \leq \sum_{j=0}^{+\infty} |y_j x_j| \leq \|y\|_\infty \|x\|_1 = \|y\|_\infty \|\eta\|_1 \Rightarrow \|u\| \leq \|\eta\|_1$$

Viceversa, consideriamo la successione:

$$\psi = \sigma(\eta) = \begin{cases} \frac{|\eta_n|}{\eta_n} & \text{se } \eta_n \geq 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Allora $\psi_j \eta_j = |\eta_j|$. Poichè $\eta \in \ell^1$, chiaramente $\psi \in c_0$, e inoltre $\|\psi\|_\infty = 1$. Dunque, tenuto conto che $x = \eta$, abbiamo:

$$u(\psi) = \sum_{j=0}^{+\infty} \psi_j \eta_j = \sum_{j=0}^{+\infty} |\eta_j| = \|\eta\|_1$$

Da cui $\|\eta\|_1 = u(\psi) \leq \|u(\psi)\| \leq \|u\| \|\psi\|_\infty = \|u\|$. \square

**Esercizio 6 (S.I.S.S.A. , Settore di Analisi Funzionale e applicazioni)
(1994 , esercizio 3)**

Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione convessa e per ogni $x \in \mathbb{R}$ sia

$$f'_+(x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Dimostrare che

$$\int_a^b f'_+(x) dx = f(b) - f(a)$$

per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$.

svolgimento. Intanto ricordiamo che le funzioni convesse sono dotate di derivata destra e sinistra. Essendo poi limite di funzioni misurabili, f'_+ è misurabile. Inoltre possiamo esprimere:

$$f'_+(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} n[f(x + 1/n) - f(x)]$$

Per le funzioni convesse sappiamo che il rapporto incrementale è una funzione crescente. Quindi possiamo dire che

$$|n[f(x + 1/n) - f(x)]| \leq |f'_+(x)|$$

Inoltre se $y < x$ abbiamo $\frac{f(b)-f(y)}{b-y} \geq \frac{f(x)-f(y)}{x-y}$. Al limite per $x \rightarrow y$ otteniamo $f'_+(y) \leq \frac{f(b)-f(y)}{b-y}$. Integrando otteniamo $\int_a^b f'_+(y) dy \leq \int_a^b \frac{f(b)-f(y)}{b-y} dy < \pm\infty$. In effetti basta osservare che

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{f(b) - f(y)}{b - y} dy &= \lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x \frac{f(b) - f(y)}{b - y} dy \leq \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(b) - f(a)}{b - y} (x - a) = \\ &= f'_-(b)(b - a) \end{aligned}$$

Petanto $f'_+ \in L^1[a, b]$. Applicando la convergenza dominata di Lebesgue e per la continuità di f abbiamo:

$$\begin{aligned} \int_a^b f'_+(x) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b n[f(x+1/n) - f(x)] dx = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \int_{a+1/n}^{b+1/n} f(t) dt - n \int_a^b f(t) dt \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \int_b^{b+1/n} f(t) dt - n \int_a^{a+1/n} f(t) dt \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \frac{f(\xi_n)}{n} - n \frac{f(\eta_n)}{n} \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} f(\xi_n) - \lim_{n \rightarrow \infty} f(\eta_n) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n) - f(\lim_{n \rightarrow \infty} \eta_n) = f(b) - f(a) \end{aligned}$$

Poichè per la media integrale $\xi_n \in [b, b+1/n]$ e $\eta_n \in [a, a+1/n]$. \square

Esercizio 7 (S.I.S.S.A. , Settore di Analisi Funzionale e applicazioni)
(1994 , esercizio 4)

Sia (X, d) uno spazio metrico completo, $\bar{x} \in X, r > 0$.

Posto $D = \{x \in X : d(x, \bar{x}) \leq r\}$, sia $f : D \rightarrow X$ soddisfacente

$$d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y) \quad \text{per ogni } x, y \in D$$

dove $k \in (0, 1)$ è una costante. Si provi che se $d(\bar{x}, f(\bar{x})) \leq r(1-k)$ allora f ammette un unico punto fisso.

svolgimento. E' chiaro che dovremo far riferimento al teorema di Banach sui punti fissi [7]. Essendo D chiuso, è esso stesso uno spazio completo. L'ipotesi dell'esercizio ci dice che f è contrattiva su D . Resta quindi da appurare se f applica D in sè. A tal fine se $x \in D$:

$$d(f(x), \bar{x}) \leq d(f(x), f(\bar{x})) + d(f(\bar{x}), \bar{x}) \leq kd(x, \bar{x}) + r(1-k) \leq kr + r(1-k) = r$$

Donde $f(x) \in D$. \square

Esercizio 8 (S.I.S.S.A. , Settore di Analisi Funzionale e applicazioni)
(1994 , esercizio 5)

Sia $I = (0, 1)$ e sia (f_n) una successione limitata in $L^p(I)$ ($1 < p < \infty$). Provare che se (f_n) converge a 0 in $L^1(I)$, allora converge a 0 in $L^r(I)$ per ogni r con $1 \leq r < p$.

svolgimento. Poichè $f_n \rightarrow 0$ in L^1 , allora esiste una estratta $(f_{k(n)})$ che converge q.o. Indicata con μ la misura di Lebesgue, è ovvio che $\mu(I) < \infty$. Possiamo allora applicare il teorema di Severini-Egorov (una dimostrazione del quale si trova nell'appendice di [2]) che ci dice che la convergenza è quasi uniforme. Ovvero, fissato $\varepsilon > 0$, esiste un insieme misurabile $E_\varepsilon \subset I$ con $\mu(E_\varepsilon) < \varepsilon$ tale che $(f_{k(n)})$ converge uniformemente in $(E_\varepsilon)^c$. Utilizzando la disuguaglianza di Hölder relativa agli esponenti $(\frac{p}{r}, \frac{p}{p-r})$ e la limitatezza della successione in L^p abbiamo:

$$\int_I |f_{k(n)}|^r d\mu = \int_{E_\varepsilon} |f_{k(n)}|^r d\mu + \int_{E_\varepsilon^c} |f_{k(n)}|^r d\mu \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq \left(\int_{E_\varepsilon} |f_{k(n)}|^p d\mu \right)^{r/p} (\mu(E_\varepsilon))^{\frac{p-r}{p}} + \int_{E_\varepsilon^c} |f_{k(n)}|^r d\mu \leq \\ &\leq M^r \varepsilon^{\frac{p-r}{p}} + \int_{E_\varepsilon^c} |f_{k(n)}|^r d\mu \end{aligned}$$

Passando al limite, essendo la convergenza uniforme nell'ultimo integrale, abbiamo:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I |f_{k(n)}|^r d\mu \leq M^r \varepsilon^{\frac{p-r}{p}}$$

Data l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$ otteniamo che $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I |f_{k(n)}|^r d\mu = 0$, ovvero che $f_{k(n)} \rightarrow 0$ in L^r . Verifichiamo adesso che in realtà la successione stessa converge a 0 in L^r . Infatti, se così non fosse, potremmo trovare un $\varepsilon > 0$ ed una estratta $(f_{h(n)})$ tale che

$$\int_I |f_{h(n)}|^r d\mu \geq \varepsilon > 0 \quad (9)$$

Ovviamente $(f_{h(n)})$ è limitata in L^p e $f_{h(n)} \rightarrow 0$ in L^1 . Ripetendo allora il ragionamento fatto in precedenza, possiamo trovare una nuova estratta $(f_{k(h(n))})$ tale che $\|f_{k(h(n))}\|_r \rightarrow 0$. Ma questo contraddice la (9). \square

Esercizio 9 (S.I.S.S.A. , Settore di Analisi Funzionale e applicazioni) (1995 , esercizio 2)

Una famiglia $\mathcal{F} \subset L^1(\mathbb{R})$ si dice equiassolutamente integrabile se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che $\int_E |u(t)| dt \leq \varepsilon$ per ogni $u \in \mathcal{F}$ e per ogni insieme misurabile $E \subset \mathbb{R}$ tale che $m(E) < \delta$. Sia

$$\mathcal{B} = \{u \in L^1(\mathbb{R}) : \int_{\mathbb{R}} |u(t)| dt \leq 1\}$$

e, assegnata $g \in L^1(\mathbb{R})$, sia

$$\mathcal{G} = \{g * u : u \in \mathcal{B}\}$$

dove $(g * u)(t) = \int_{\mathbb{R}} g(t-s)u(s) ds$.

(a) Provare che \mathcal{B} non è equiassolutamente integrabile.

(b) Provare che \mathcal{G} è equiassolutamente integrabile.

svolgimento. Per $\varepsilon > 0$ consideriamo il nucleo di Cauchy-Poisson

$\varphi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + x^2}$ già incontrato nell'esercizio 4. Pertanto $\varphi_\varepsilon \in \mathcal{B}$. D'altronde, tranne che nell'origine, risulta $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varphi_\varepsilon(x) = 0$. Se allora \mathcal{B} fosse equiassolutamente integrabile, a causa del teorema di Vitali, in un qualsiasi intervallo di misura finita $[-r, r]$, potremmo passare al limite sotto il segno di integrale. Dunque avremmo

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-r}^r \varphi_\varepsilon(x) dx = 0 \quad (10)$$

D'altra parte

$$\int_{-r}^r \varphi_\varepsilon(x) dx = \frac{1}{\pi \varepsilon} \int_{-r}^r \frac{1}{1 + x^2/\varepsilon^2} dx = \frac{1}{\pi} \int_{-r/\varepsilon}^{r/\varepsilon} \frac{1}{1 + y^2} dy =$$

$$= \frac{1}{\pi} [\arctan(y)]_{-r/\varepsilon}^{r/\varepsilon} = \frac{2}{\pi} \arctan(r/\varepsilon) \rightarrow 1 \text{ per } \varepsilon \rightarrow 0^+$$

Ma questo contraddice la (10) . Pertanto \mathcal{B} non è equiassolutamente integrabile.
 (b) Fissato $\varepsilon > 0$, per l'assoluta continuità dell'integrale, abbiamo che esiste un $\delta > 0$ tale che per ogni E misurabile con $m(E) < \delta : \int_E |g(x)|dx < \varepsilon$. Per ogni $u \in \mathcal{B}$ abbiamo:

$$\begin{aligned} \int_E |g * u(x)|dx &= \|g * u\|_{L^1(E)} \leq \|g\|_{L^1(E)} \|u\|_{L^1(E)} \leq \|g\|_{L^1(E)} = \\ &= \int_E |g(x)|dx < \varepsilon \quad \square \end{aligned}$$

Esercizio 10 (Roma-Tor Vergata, 2000, Tema 2, esercizio 5) *Sia X uno spazio topologico compatto non necessariamente di Hausdorff. Far vedere che ogni sottoinsieme infinito di X ha almeno un punto di accumulazione.*

svolgimento. Sia $E \subset X$ un sottoinsieme infinito. Se $x \in X$ non è di accumulazione per E allora esiste un aperto U_x tale che $U_x \cap E = (\emptyset) \vee (\{x\})$. Se nessun punto di X è di accumulazione per E ,la famiglia $(U_x)_{x \in X}$ è un ricoprimento di X . Per la compattezza possiamo allora considerare un sottoricoprimento finito. Ovvero $X = \bigcup_{i=1}^n U_{x_i}$. Ma allora $E = E \cap X$ è costituito al più dai punti $\{x_1 \dots x_n\}$, e questo contraddice il fatto che E è infinito. \square

Esercizio 11 (Roma-Tor Vergata, 2000, Tema 2, esercizio 9) *Sia X uno spazio di Banach riflessivo e Y un sottospazio chiuso di X . Dimostrare che per ogni $x \in X$ esiste almeno un elemento $\hat{x} \in Y$ tale che $\|x - \hat{x}\| = \inf_{y \in Y} \|x - y\|$. Dire se questa proprietà resta valida anche per spazi di Banach non riflessivi.*

svolgimento. Questo è un bell'esercizio di analisi funzionale che estende il noto teorema sulle proiezioni negli spazi di Hilbert. Per le proprietà degli spazi riflessivi e delle topologie deboli faremo riferimento a [2, cap.3] . Sia dunque $x \in X$ e poniamo $\varphi : Y \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $\varphi(y) = \|x - y\|$. Allora il nostro obiettivo è quello di mostrare che φ ammette minimo in Y . Intanto osserviamo che φ è continua. Inoltre è anche convessa. Infatti

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2) &= \|x - \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2\| = \|x - \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2 + \lambda x - \lambda x\| \leq \\ &\leq \|\lambda(x - y_1)\| + \|(1-\lambda)(x - y_2)\| = \lambda\varphi(y_1) + (1-\lambda)\varphi(y_2) \end{aligned}$$

Fisiamo ora un qualsiasi $a \in Y$ e poniamo $\lambda_0 = \varphi(a)$.

Sia ora $K = \{y \in Y : \varphi(y) \leq \lambda_0\}$. Per quanto detto su φ abbiamo che K è chiuso e convesso, quindi chiuso debolmente. Inoltre poichè

$$\| \|x\| - \|y\| \| \leq \|x - y\| = \varphi(y) \Rightarrow \lim_{\|y\| \rightarrow +\infty} \varphi(y) = +\infty$$

K è necessariamente limitato. Allora esiste un $r > 0$ tale che $K \subset rB'$, dove B' è la sfera chiusa unitaria di X . Poichè lo spazio è riflessivo, il teorema di Kakutani [2] ci dice che K è compatto debolmente.

Naturalmente, come già osservato, $\forall \alpha \in \mathbb{R} : \{y \in Y : \varphi(y) \leq \alpha\}$ è chiuso debolmente, ovvero φ è semicontinua inferiormente per la topologia debole. Allora, per il teorema di Weierstrass generalizzato, φ ammette minimo in K . Dunque esiste $\hat{x} \in K$ tale che $\forall y \in K : \varphi(\hat{x}) \leq \varphi(y)$. Se poi $y \in Y$ e y non è in K , abbiamo anche $\varphi(\hat{x}) \leq \lambda_0 < \varphi(y)$. Dunque \hat{x} è il punto cercato. Nella dimostrazione presentata la riflessività dello spazio è essenziale . \square

Riferimenti bibliografici

- [1] Sterling K. Berberian. *Foundamentals of real analysis*. Springer, 1998.
- [2] Haime Brezis. *Analisi funzionale. Teoria ed applicazioni*. Liguori, 1986.
- [3] L.C.Evans. *Partial Differential Equations*. Graduate studies in mathematics,19, AMS, 1998
- [4] G. Gilardi *Analisi 3* , Mc Graw-Hill
- [5] D.Gilbarg, N. Trudinger. *Elliptic Partial Equations of Second Order* , Springer, 1983
- [6] Luca Granieri. *Equazioni differenziali ordinarie. Aspetti del problema di Cauchy*. Disponibile online all'indirizzo: <http://www.dm.unipi.it/~granieri>
- [7] Luca Granieri. *Alcuni teoremi di punto fisso ed applicazioni*. Disponibile online all'indirizzo: <http://www.dm.unipi.it/~granieri>
- [8] A.Kolmogorov, S.Fomine. *Elementi di teoria delle funzioni e di analisi funzionale*. Mir, 1980
- [9] W. Rudin. *Functional Analysis*. Mc Graw Hill, 1973
- [10] G.E. Silov. *Analisi matematica. Funzioni di una variabile* Mir, 1978.
- [11] E.Zeidler *Nonlinear functional analysis and its applications*. Vol.1 , Springer, 1990