Politecnico di Bari

Ingegneria Elettronica e delle Telecomunicazioni

A.A. 2007-2008 Esercitazione Aprile 2008

Cognome .... Nome .... N. matricola ....

1. Sia $A = \{(x, y) \in I\!R^2 \mid 2 < x < 4,\ 5 \le y < x^2 + 1\} \cup \{(x, y) \in I\!R^2 \mid 4 \le x \le 6,\ y = 5\}$. Determinare $\mathring{A}$, ∂A, $\overline{A}$. L'insieme A è convesso, connesso, compatto? Motivare adeguatamente le risposte.

2. Studiare la continuità della funzione
$$f(x, y) = \begin{cases} \arctan \frac{x}{x^2+y^2}, & (x, y) \ne (0, 0) \\ \frac{\pi}{2} & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

3. Data la funzione
$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{4x^2y+5xy^2}{2x^2+3y^2} & (x, y) \ne (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$
   - se ne studi la continuità.
   - si determini la derivata parziale della f nel punto $(0, 0)$ nella generica direzione v.
   - Determinare se esiste il piano tangente alla superficie $z = f(x, y)$ nel punto $(1, 1, \frac{9}{5})$.
   - dire se f è differenziabile in $(0, 0)$.

4. Studiare la differenziabilità della funzione
$$f(x, y) = \frac{xy}{1 + x^2 + y^2}.$$

5. Sia $A =]0, 1[\times]0, 1[$ e sia $f : A \to I\!R$ una funzione differenziabile e tale che $|\nabla f(x)| \le 1$ per ogni $x \in A$. Esistono $x, y \in A$ tali che $|f(x) - f(y)| > 2$? Giustificare la risposta.

6. Sia $A =]0, 1[\times]0, 1[$ e sia $f : A \to I\!R$ una funzione differenziabile. Dire quali delle seguenti affermazioni risultano in generale vere.

   a) $\forall x \in A$, $\forall e \in I\!R^2\ \exists\ \dfrac{\partial f}{\partial e}(x)$;

   b) $\exists c > 0$ tale che $\forall x \in A$, $\forall e \in I\!R^2$: $|\dfrac{\partial f}{\partial e}(x)| < c$.

   Giustificare le risposte.

7. Studiare, al variare del parametro reale k, i punti critici della funzione
$$f_k(x, y) = x^2 + 2xy + (k + 1)y^2 - \frac{y^4}{2}.$$

8. Detto K l'insieme di definizione della funzione
$$f(x, y) = \sqrt{2(x + 2y) - x^2 - 2y^2 - 1}$$
trovare se esistono il massimo ed il minimo assoluto della f in K.