Capitolo 1

Antipasti per iniziare

Una inquietudine ricorrente degli studenti a fronte di un corso di matematica, a volte espressa esplicitamente, altre volte manifestata magari soltanto agli amici più intimi, è qualcosa del genere: *Ma a che diavolo serve tutto questo? A cosa possono mai servire nella vita di tutti i giorni x e y?* A volte tali commenti hanno un puro scopo destabilizzante e il docente, specie se tutto questo accade durante le sue ore di lezione, in genere liquida in tutta fretta la faccenda. Ma più spesso, dietro esternazioni di tal fatta si nasconde in realtà una incomprensione di fondo sul senso generale di quello che si sta facendo. Questa incomprensione, unita alla difficoltà dello studio, genera l'impressione di star sprecando un sacco di tempo. Nei corsi di matematica, anche per mancanza di tempo sufficiente, molte questioni *di fondo* in genere sono tralasciate o date per scontate. Sommariamente, il ragionamento alla base è che a scuola o all'università il docente, per definizione, insegna cose importanti e significative. Purtroppo, per vari motivi, questa posizione sta perdendo oggi molto del suo vigore. Il fatto è che il prestigio e l'importanza delle istituzioni scolastiche e universitarie è in preoccupante declino. A questo proposito, può risultare utile allora *perdere un po' di tempo* per fornire qua e là motivazioni e alcuni sfondi culturali più ampi. Specialmente all'inizio di un percorso, questo aspetto può essere importante. Se ad esempio lo studente percepisce che può capire qualcosa e che gli oggetti del suo studio possono anche avere per lui un interesse culturale più vasto, magari in seguito sarà più disposto a fare qualche sacrificio quando per forza di cose bisognerà *correre* o trattare faccende più tecniche. Se invece si corre come un treno sin dall'inizio si rischia di arrivare alla fine del percorso da soli.

1.1 Matematica linguaggio della natura!?

Come scuola superiore ho frequentato un istituto tecnico commerciale, la classica *ragioneria* per intenderci. Il fatto è che quando a suo tempo i miei genitori mi suggerirono questa scelta non avevo nessuna idea di cosa la ragioneria potesse essere. Allora dovette sembrare anche a me una buona scelta e così accettai. In realtà, i primi anni filarono via piuttosto lisci, visto che erano di carattere piuttosto generale. Ma arrivato agli ultimi anni di scuola l'insofferenza cominciava ormai a manifestarsi.

In effetti, mentre frequentavo l'ultimo anno prima del diploma, ero piuttosto insoddisfatto degli studi in cui mi imbattevo a scuola. Parlare tutto il tempo di banche, azioni, bilanci ecc... mi sembrava troppo riduttivo per i miei gusti. No, non era cosa per me. Mi sembrava di soffocare seppellito da fatture, assegni e partite doppie. Anche se alla fine mi ero diplomato con il massimo dei voti, la decisione era presa: *Se troverò un lavoro o continuerò gli studi farò senz'altro qualcosa di completamente diverso!* Così, in quel periodo cominciai un po' a guardarmi intorno. Alcuni docenti illuminati organizzarono presso la nostra scuola un corso pomeridiano di filosofia. Restai affascinato e, con il senno di poi, anche un po' perplesso. Allora perché non studiare filosofia all'università? Già, perché no? Così, il pomeriggio sbrigavo in fretta i miei compiti quotidiani e, dopo il calcio o la pallavolo, mi divertivo a curiosare qua e là tra i libri che trovavo in casa su temi e argomenti correlati ai contenuti di quel corso extra-scolastico. Mentre scartabellavo qua e là, tra le altre cose, galeotto fu il seguente passo di Galileo tratto dal *Saggiatore*:

La natura è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi agli occhi (e dico l'universo), ma non si può intendere se prima non s'impara a intender la lingua, a conoscer i caratteri ne' quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi e altre figure geometriche senza i quali mezzi è impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi, è un aggirarsi vanamente per un oscuro labirinto.

Ebbene, queste parole di Galileo sono state uno dei motivi principali per cui poi ho deciso invece di studiare matematica all'università. Decisi che se volevo capire qualcosa della natura delle cose senz'altro mi serviva conoscere la matematica. Così è cominciata la mia avventura nello studio di questa scienza che, naturalmente, continua ancor oggi.

Allo stesso tempo, avevo finalmente compreso anche perché i miei genitori avessero riempito negli anni la casa di libri. Quando ero piccolo non capivo. Con il lavoro che facevano non avevano certo il tempo di leggerli. Ma oggi anch'io collezziono libri di tutti i generi nel mio studiolo. Io forse non avrò mai il tempo di sfogliarli tutti, ma un domani qualcuno in casa potrebbe leggere qualcosa e trovare qualche idea interessante. Grazie papà, grazie mamma, è stata una scelta saggia. Una buona idea non ha prezzo!

Dunque, nel passo appena citato Galileo ci dice che non è possibile capire qualcosa della natura senza la matematica. Ma molti studenti e penso molti tra i lettori, nonostante l'autorevolezza di Galileo, non saranno certo ancora persuasi di questo. Perché abbiamo bisogno di tutte le complicazioni e sofisticazioni della matematica? Non potremmo farne a meno?

1.2 Fondamenti della Conoscenza

Per noi uomini disporre di conoscenze accurate e precise è un fatto fondamentale, anzi, a volte si tratta di una questione di vita o di morte. Quando assumiamo un farmaco ci aspettiamo che qualcuno abbia prima *dimostrato* che esso è afficace per il nostro male. Ci aspettiamo pure che chi ha progettato la nostra casa lo abbia fatto in modo da essere *sicuri* che resti in piedi e non ci crolli addosso all'improvviso. Certo c'è una bella differenza tra il *dimostrare* che, ad esempio, l'aspirina guarisce il mal di testa e il *dimostrare* che un palazzo *regge* o ancora che due più due fa quattro. Magari, tra i milioni di persone che assumono un farmaco per il mal di testa ce ne è anche qualcuna che incorre in gravi conseguenze, come in genere riportano i fogli illustrativi, fino talvolta alla morte. Di passare, il mal di testa è passato, ma forse è un modo troppo radicale per curarsi questo! Stiamo scherzando naturalmente e non voglio spaventare nessuno ma, se ci pensiamo, sono tantissime le occasioni durante le nostre giornate in cui affidiamo la nostra incolumità a conoscenze che riteniamo sicure ed affidabili. Da quando saliamo su un mezzo di trasporto per recarci a scuola o al lavoro, a quando impostiamo la radio-sveglia per il giorno seguente. Ma come facciamo ad essere *sicuri* che, ad esempio, l'automobile improvvisamente non ci farà saltare in aria? Immagino perché ci fidiamo dei costruttori che si presume abbiano realizzato l'auto secondo rigorosi criteri *scientifici*.

In genere, la nascita della scienza moderna si colloca nel XVII secolo con scienziati del calibro di Galileo, Newton, Leibniz. Naturalmente la scienza non nasce dal nulla e lo stesso Newton dirà di aver potuto vedere tanto lontano proprio perché sostenuto dalle spalle di giganti. Anche se, pare che il commento di Newton fosse in realtà una *frecciatina* ad un suo collega e rivale, il Prof. Hooke, che era piccolo di statura, e quindi non era certo a lui che Newton doveva qualcosa!

In effetti, sono tante le tappe significative del pensiero che hanno aperto la strada alla scienza così come oggi la conosciamo. Se vogliamo, possiamo immaginare per un attimo un nostro antico antenato che alla fine di una dura giornata, dopo aver soddisfatto le sue necessità primarie, si sia sdraiato sull'erba a guardare le stelle. Forse davanti a quello spettacolo si sarà domandato: ma che saranno mai quelle luci? dei fuochi? e chi le ha poste così in alto? un gigante? un dio? Ecco così nascere in un sol colpo le radici di scienza, filosofia e religione. Ad un certo punto saranno poi emerse delle domande su sé stessi e sul mondo che ci circonda. Chi siamo? Da dove veniamo? Cos'è la vita? E la morte? Cosa c'è dopo la morte? Cosa è giusto? Cos'è l'universo? Qualcuno lo ha creato? È finito o infinito? Può sembrare strano, ma sono proprio quesiti di tal fatta che ancora oggi tengono viva la scienza, come pure la filosofia e la religione, insieme naturalmente alla necessità di cercare risposte in qualche modo adeguate a tuuti quei quesiti che non ci lasciano indifferenti.

Una delle prime tappe di avvicinamento alla scienza può allora forse essere individuata nell'invenzione del linguaggio. Quest'ultimo infatti consente di rappresentare e comunicare la natura in termini indipendenti da essa. Se dico infatti che oggi è una buona giornata, queste poche parole comunicano una complessa realtà senza nessun riferimento alla situazione metereologica propriamente detta. Il linguaggio inoltre è uno strumento essenziale per lo sviluppo del pensiero.

Un'altro passo decisivo in avvicinamento alla scienza moderna è una grande invenzione del mondo greco: il pensiero formale. Se dico:

Antonio è un *trasalentizio*,
e tutti i *trasalentizi* sono *pincoledosi*,

potremo senz'altro dedurre che allora Antonio è un *pincoledoso*, indipendentemente dall' eventuale significato delle parole *trasalentizio* e *pincoledoso* che ho inventato di sana pianta. Circa 2500 anni fa si afferma dunque nel pensiero greco la capacità del linguaggio di operare deduzioni attraverso la logica, senza riferimenti alla realtà vera e propria. Il pensiero, da solo, poteva allora addirittura scoprire la *verità*. Ma il linguaggio da solo non può bastare. Anzi, in certe occasioni può anche essere controproducente. Come si sa, un bravo avvocato può a volte fare la differenza, indipendentemente dalla colpevolezza o meno dell'imputato.

Credete in Babbo Natale? No? Non avete mai visto quell'uomo barbuto, vestito di rosso, e che guida una slitta trainata da renne volanti per distribuire regali la notte di Natale? Bene, allora devo proprio fermarmi un attimo per dimostrarvi che Babbo Natale esiste davvero! Consideriamo la seguente tabella di proposizioni:

1)	Babbo Natale esiste
2)	entrambe le frasi della tabella sono false

Ragioniamo sulla seconda frase della tabella qui sopra. La frase 2) è vera oppure è falsa. Questo è il contenuto del cosiddetto *principio del terzo escluso* che afferma che per una proposizione data esistono solo due alternative (vero o falso) e nessuna terza possibilità è consentita. Ora, se la frase 2) è vera, allora deve essere anche falsa perché è lei stessa che lo dice. Ma questo non può essere. Altrimenti si violerebbe il cosiddetto principio di non contraddizione per il quale una cosa non può essere contemporaneamente sia vera che falsa. Allora, non potendo essere vera, deve pertanto essere per forza falsa. Ma questo vuol dire (si veda anche la sezione 1.4.2) che almeno una delle due frasi della tabella deve essere vera, e poiché abbiamo trovato che la frase 2) è falsa, allora deve essere vera la frase 1). Dunque, Babbo Natale esiste!

Che dire? In effetti, si potrebbe perlomeno avere la sensazione che quello appena visto sia soltanto un gioco di parole, o al più di un gioco di prestigio, del tipo: *il trucco c'è ma non si vede*. Se di trucco si può parlare, è chiaro che deve riguardare la frase 2). È anche evidente la notevole somiglianza con il cosiddetto paradosso del mentitore: *Io sto mentendo*. Allora, se mento dico la verità. Ma se dico la verità, allora sto mentendo. In effetti, in entrambi i casi, si tratta di frasi che praticamente affermano la falsità di sé stesse. Bertrand Russell (1872-1970) farà notare che il paradosso del mentitore e le sue varianti scaturiscono proprio dalla possibilità di costruire frasi che si autoattribuiscono la falsità. Una volta, lo stesso Russell illustrò tali evenienze autoreferenziali con l'esempio del barbiere di una caserma. Un giorno il comandante lo convoca ordinandogli: *fai la barba a tutti coloro che non se la fanno da soli. Sì, Signore!* Allora il barbiere comincia il suo giro per la ceserma chiedendo a tutti: *Che fai oggi, ti fai la barba? Sì, non ti preoccupare, oggi me la faccio da solo. OK, allora andiamo avanti, e tu che fai? No, non me la faccio. Va bene, allora te la faccio io.* Stanco della giornata di lavoro, il barbiere si ritira finalmente nella sua stanza. Ma un tremendo quesito si affaccia: *Ma io me la devo fare la barba o no? Perché il comandante ha detto di farla a chi non se la fa da solo. Allora, se mi rado, mi sto facendo la barba da solo e così disubbidisco agli ordini. Ma se non mi rado, allora non mi faccio la barba da solo e allora il comandante ha ordianto di radermi. Cavoli e contro cavoli! E adesso che faccio?* Mi sembra possibile che anche il cantautore Fabrizio De André abbia inserito forse un'allussione alla vicenda del barbiere nella canzone Don Raffaé:

> Qui ci stà l'inflazione, la svalutazione
> e la borsa ce l'ha chi ce l'ha
> io non tengo compendio che chillo stipendio
> e un ambo se sogno 'a papà
> aggiungete mia figlia Innocenza
> vuo' marito non tiene pazienza
> non chiedo la grazia pe' me
> vi faccio la barba o la fate da sé.

Dunque, essendoci la possibilità di occorrenze paradossali, il linguaggio naturale è contraddittorio, e quindi si può dimostrare tutto e il contrario di tutto (anche se non è proprio così soddisfacente). Il fatto che da una contraddizione si possa derivare qualsiasi cosa è anche nota come legge di Duns Scoto (1206-1308), frate francescano, detto *dottor sottile*, per la sua arguzia e profondità di pensiero.

Pertanto, anche a causa della formazione di paradossi, il linguaggio naturale, da solo, non è adatto a dare un fondamento sicuro alla conoscenza. Allora, se la matematica è il linguaggio della natura allora essa deve necessariamente essere un linguaggio non naturale. Il *matematichese* costituisce l'estremizzazione di questa necessità limitando accuratamente gli oggetti di cui si può parlare (attraverso la definizione) e di come se ne possa parlare (attraverso i teoremi). Magari in questo modo non potremo parlare di tutto, per esempio di quel povero barbiere di prima, ma almeno su quel poco che potremo dire saremo in grado di costruire conoscenze ragionevolmente affidabili e certe. Chiariamo ancora questo punto.

Periodicamente, perlomeno fino a qualche tempo fa, le acque del fiume Nilo inondavano vasti appezzamenti di terreno. Ritirandosi, le acque lasciavano sul terreno il limo, un prezioso fertilizzante naturale. I terreni lungo le sponde del Nilo sono anche per questo da sempre utilizzati con profitto in agricoltura. Ma c'è un problema. Ad ogni inondazione potevano anche venire cancellati i confini dei terreni. Pertanto, sin dall'antichità, si poneva il problema di ricostruire periodicamente lo status quo dei possedimenti agrari. Si capisce che questo doveva essere fatto avvalendosi di conoscenze molto approfondite e affidabili. Fare degli errori significava perdere o guadagnare porzioni di terreno prezioso e se si urtava gli interessi di qualche personaggio importante le cose potevano pure finire male. Così, gli antichi egizi divennero dei veri esperti nel piantare paletti e tirare funi costruendo un corpo notevole di conoscenze geometriche semi-empiriche. Ma per accedere e tramandare queste conoscenze alle generazioni future, non era indispensabile piantare i paletti e tirare le funi materialmente. Lo si può fare anche in modo idealizzato con uno stilo sulla sabbia o su una tavoletta, o disegnando su un papiro, o con carta e penna come faremmo oggi. I paletti corrispondono a ciò che chiamiamo punti, le funi a ciò che chiamiamo segmenti. Ma come facciamo a sapere che le conoscenze che abbiamo accumulato sono realmente affidabili? Non è che ci stiamo sbagliando su qualcosa? Noi per comodità tendiamo la fune tra due paletti. Ma la fune potrebbe essere anche sostituita da innumerevoli paletti uno accanto all'altro. Possiamo cioè pensare un segmento come fatto di punti un po' come la materia è fatta di atomi? I punti sono gli *atomi* della geometria? I punti hanno una misura? Se sì, allora ogni segmento è fatto da un certo numero di punti. Allora tutti i segmenti sarebbero *commensurabili.* Il loro rapporto cioè sarebbe sempre una frazione. Ma già i pitagorici avevano scoperto che non sempre è così. La diagonale e il lato del quadrato unitario non sono commensurabili tra loro (si veda Teorema 20). Allora i punti non hanno misura. Devono avere lunghezza zero. Ma allora come fa un segmento che ha una certa lunghezza ad essere composto da punti che non ne hanno? Allora questi punti non possono essere in numero finito, poiché la somma di tanti zeri è comunque sempre zero. Allora dovranno essere in numero *infinito*. Ok, ma infiniti quanti? Se consideriamo la figura 1.1, fissato un punto P del primo segmento più

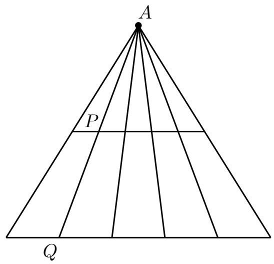

Figura 1.1: Segmenti di diversa lunghezza hanno lo stesso numero di punti

corto, considerato il segmento che unisce tale punto con A si determina un punto Q dell'altro segmento più *lungo* e viceversa, fissato un punto del secondo segmento si determina univocamente un punto del primo. Pertanto, qualunque esso sia, i due segmenti hanno lo stesso numero di punti. Ma, come è possibile visto che un segmento è più lungo dell'altro? Ma scusate, similmente può allora il tempo essere fatto di tanti istanti *posti* uno dopo l'altro? Cavolini, qui c'è proprio qualcosa che non quadra! Se pensavamo di aver capito qualcosa di paletti e corde forse faremmo bene invece a ripensare il tutto. A maggior ragione che tutto questo ha portato alla luce quesiti tremendi sulla natura del mondo che ci circonda. Forse vale la pena allora riflettere un attimino più seriamente.

Sapete qual è il libro che vanta il maggior numero di stampe ed edizioni? Sì, la Bibbia naturalmente. E sapete quale libro occupa il secondo posto? Gli *Elementi* di Euclide. Gli Elementi di Euclide sono il principale tentativo, dovuto agli antichi greci, di sistematizzare e fondare la conoscenza, quella geometrica in particolare. Ancora oggi, con i dovuti adattamenti, a scuola la geometria ci viene, o ci dovrebbe, essere presentata alla maniera di Euclide. Il punto di vista di Euclide è grossolanamente il seguente. Partiamo da alcuni enti, detti primitivi, pochi, su cui più o meno tutti possiamo accordarci su cosa siano. Che so, ad esempio il concetto di punto, segmento, ecc... Tutti gli altri enti di cui vogliamo parlare dovranno essere definiti rigorosamente a partire da questi pochi enti primitivi. Poi consideriamo alcuni fatti, pochi, detti postulati o assiomi, che assumeremo per buoni su questi enti primitivi. Naturalmente si tratterà di fatti assolutamente *evidenti* in modo tale che nessuno, dal fruttivendolo al giornalaio, abbia motivo di dubitarne. Ad esempio, il fatto che per due punti passi uno ed un solo segmento. Allora, le conoscenze affidabili, *vere*, saranno composte da tutto quello che riusceremo a dimostrare a partire dagli enti primitivi e dagli assiomi. Naturalmente dovremo anche specificare delle *regole di deduzione* che precisino cosa voglia dire *dimostrare*. Magari sarà un modo anche un po' pedante di procedere, prima di arrivare ad esempio al Teorema di Pitagora occorrono prima un sacco di risultati preparatori, ma alla fine se un risultato è dimostrato saremo garantiti sulla sua fondatezza. Se non c'è una dimostrazione, un fatto sarà al massimo plausibile, vero-simile, ma solo sulla base di una dimostrazione saremo pronti a metterci una mano sul fuoco. Si tratta di un abbozzo di quella che possiamo chiamare scienza ipotetico-deduttiva. Le conoscenze sono deduzioni a partire da ipotesi. Dunque la verità è subordinata in questo caso a quella degli assiomi di partenza.

1.3 Vedere l'invisibile

L'importanza della matematica non sta soltanto nel problema di fondare rigorosamente e sistematizzare la conoscenza attraverso la deduzione logica. Senza strumenti come il telescopio o il microscopio non avremmo mai potuto immaginare quanto popolato fosse il cosmo e il microcosmo. Ebbene, la matematica è anche, e forse soprattutto, una sorta di telescopio che permette di vedere ciò che ad occhio nudo è invisibile. La matematica è un potente strumento, anche se puramente intellettuale, di indagine.

Un giorno, il vostro datore di lavoro vi convoca per dirvi che purtroppo la recessione economica ha messo l'azienda in grave crisi. Allora, decurterà gli stipendi del 10% almeno fino a quando la crisi non sia superata. A malincuore accettate questo sacrificio. Successivamente, quando vi accorgete che ormai l'azienda non sta poi messa così male, vi affacciate dal vostro capo: *Beh, forse ora la crisi è superata, no? Sì, avete ragione. Allora vi riaumento lo stipendio del* 10%. Soddisfatti, ritornate a casa. Ma il vostro sonno è turbato dal sorgere di un tremendo dubbio: non è che il capo ci vuole imbrogliare? Allora vi alzate nel cuore della notte e prendete carta e penna. Allora, se S è il mio stipendio, la decurtazione era pari a $S - S \times 0,1$. Chiamiamo S_1 lo stipendio decurtato. Ma il capo ci proponeva un aumento del 10% di S_1. Quindi abbiamo:

$$S_1 + S_1 \times 0,1 = S - S \times 0,1 + (S - S \times 0,1) \times 0,1 =$$

$$S - S \times 0,1 + S \times 0,1 - S \times 0,01 = S - S \times 0,01.$$

Ma è inferiore al mio stipendio! Ah, domani mi sentiranno al lavoro!

Facciamo un altro esempio. Il comune appalta alla vostra azienda il lavoro di disporre un cavo, una fibra ottica ad esempio, ottorno allo stadio della città. Allora cominciate il lavoro facendo aderire il cavo lungo il perimetro e dopo un giro completo avviene la sorpresa: avanza un metro di cavo! Ah, lo sapevo io! Vatti a fidare degli enti pubblici. Questi non sanno nemmeno quanto è grande lo stadio! Certo la colpa potrà anche essere della ditta che ha confezionato il cavo sbagliandone la misura, ma adesso che facciamo? Non posso certo lasciarlo così a penzoloni e nemmeno posso tagliarlo. Questo è un cavo costoso, con quei pochi soldi che prendo se facciamo qualche danno ci rimettiamo pure. Aspetta, sai che possiamo fare? Se invece che proprio aderente, distanzio il cavo un pochino dal perimetro con dei supporti? Ok, ma di che lunghezza devono essere? Qualche centimetro dovrebbe bastare ma se sono troppo corti avanzerà ancora del cavo, se invece sono troppo lunghi allora il cavo sarà troppo corto. No, qui serve proprio sapere una misura precisa, se ci mettiamo ad andare per tentativi si perderà un sacco di tempo, e il tempo è denaro! Ehi, Giulio, tu non eri ferrato in matematica a scuola? Senti un po', secondo te possiamo determinare con precisione la lunghezza dei supporti? Allora Giulio lascia per un po' trapano e giraviti per prendere carta e penna. Allora, quanto sarà grande lo stadio? Non lo sappiamo, ma è una struttura circolare. Se vogliamo possiamo provare a misurarne il raggio, ma per ora, prima di perder tempo inutilmente, lasciamo stare. Vediamo alla fine cosa eventualmente veramente ci serve sapere. Allora, se il raggio è un certo R, la lunghezza del perimetro sarà $2\pi R$. E su questo non ci piove, lo sa anche mio fratello piccolo. Ma allora, visto che è avanzato un metro, il nostro cavo è lungo $2\pi R+1$. Va bene. In realtà, piantando dei supporti non stiamo facendo altro che aumentare il raggio della circonferenza di una quantità pari a quella dei supporti. Chiamiamo x l'altezza di questi supporti. Allora noi è proprio questo x che vogliamo conoscere. Ora, il nostro desiderio è che con la nuova circonferenza il cavo si disponga esattamente lungo il suo perimetro. Dunque, la lunghezza della circonferenza nuova deve essere pari a quella del cavo. Ma allora deve valere la seguente equazione

$$2\pi(R+x) = 2\pi R + 1.$$

Se ricaviamo x il gioco è fatto. Allora, $2\pi R+2\pi x = 2\pi R+1$, da cui $2\pi x = 1$, ovvero $x = \frac{1}{2\pi}$. Eccolo! Dunque π è circa $3,14$ e pertanto x è circa $0,16$. Se prendi i supporti di circa 16 centimetri ce la dovresti fare. Ma non serviva misurare il raggio? No, non serve. La formula che abbiamo ottenuto è indipendente dal raggio. Quindi, in realtà quello che abbiamo detto varrebbe anche se avessimo un arancio o anche tutto il pianeta! I supporti sarebbero sempre di 16 centimetri! Fantastico, chi l'avrebbe mai detto? Se facessimo il giro della Terra e ci avanzasse un metro di cavo avremmo comunque bisogno di supporti di 16 centimetri. Ok, torniamo al lavoro adesso. Giulio, vai a comprare i supporti di 16 centimetri. Se hai ragione tu in mezza giornata ci dovremmo sbrigare. Il resto della giornata è libera, andiamo pure a festeggiare, oggi ti sei guadagnato proprio un bel premio.

1.4 Genesi

L'esempio precedente, ad un esame più attento, in realtà è piuttosto avanzato. In effetti richiede di saper valutare la lunghezza di una circonferenza. Ma come si fa a determinare la lunghezza di una curva? E chi è π? Bene, è arrivato il momento allora di iniziare il nostro viaggio alla (ri)scoperta della matematica scolastica.

1.4.1 Enti primitivi e definizioni

Abbiamo detto che ci serve un punto di partenza, degli enti primitivi e degli assiomi su cui elaborare le nostre *teorie*. Il nostro punto di partenza saranno i numeri interi o numeri naturali $(\mathbb{N}, +, \cdot)$. Con la lettera $\mathbb{N}$ indichiamo l'insieme dei numeri naturali. Il concetto di insieme è primitivo. Dunque, quando diciamo che E è un insieme, facciamo tutti finta di sapere di cosa stiamo parlando. Tanto per fissare un po' di linguaggio, diremo che un oggetto x è elemento di un insieme E, con la scrittura

$$x \in E \qquad (x \text{ è un elemento di } E, \text{ oppure } x \text{ appartiene ad } E).$$

L'appartenenza è un concetto primitivo. Dunque facciamo ancora tutti finta di sapere cosa significa $0 \in \mathbb{N}, 3 \in \mathbb{N}$, ovvero 0 e 3 sono numeri naturali e cose del genere. Quando abbiamo scritto $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ volevo intendere che facciamo finta di sapere cosa sono i numeri interi e anche cosa sono le operazioni di somma e prodotto. Qui stiamo usando la convenzione di indicare il prodotto di due numeri a, b con un puntino $a \cdot b$. Anzi, sovente il puntino si sottintende per cui scriveremo ab per intendere $a \cdot b$. Se vogliamo, potremo prendere le proprietà di somma e prodotto come assiomi.

Principio 1 (Proprietà di somma e prodotto)**.** $\forall a, b, c \in \mathbb{N}$ *(che si legge:* per ogni a, b, c numeri naturali, per tutti i numeri naturali a, b, c, quali che siano i numeri naturali a, b, c, ecc.*) valgono le seguenti proprietà:*

1. *(commutatività della somma)* $a + b = b + a$,
2. *(commutatività del prodotto)* $ab = ba$,
3. *(associatività della somma)* $a + (b + c) = (a + b) + c$,
4. *(associatività del prodotto)* $a(bc) = (ab)c$,
5. *(proprietà distributiva)* $a(b + c) = ab + bc$
6. *(elemento neutro della somma)* $a + 0 = a$,
7. *(unità del prodotto)* $1 \cdot a = a$,

Si osservi che oltre ai simboli $+, \cdot$, stiamo dando per buono anche il simbolo di $=$, come pure ad esempio il *quantificatore* $\forall$. Su tali simboli logici diremo comunque qualcosa nel seguito. In soldoni $a = b$ indica che ciò che è scritto a sinistra è la stessa cosa di quanto è scritto a destra. Ovvero che a, b sono lo stesso ente e dunque in ogni occorrenza successiva siamo autorizzati a sostituire a con b oppure b con a. Più precisamente, il simbolo $=$ soddisfa le proprietà

1. (riflessiva) $a = a$,
2. (simmetria) $a = b$ se e soltanto se $b = a$,
3. (transitiva) se $a = b$ e $b = c$, allora anche $a = c$.

Tali proprietà si possono interpretare anche dicendo che il simbolo $=$ definisce una relazione di equivalenza in $\mathbb{N}$ (si veda più avanti la sezione 5.1). Tra le proprietà fondamentali dell'uguaglianza enunciamo, se vogliamo come ulteriore assioma, la compatibilità con la somma

$$a = b \Leftrightarrow a + c = b + c, \tag{1.1}$$

dove il simbolo di equivalenza logica $\Leftrightarrow$ sta per *se e soltanto se* ed indica che i due enunciati sono interscambiabili tra loro (si veda comunque più avanti la sezione 1.4.2). L'uguaglianza è anche compatibile con il prodotto

$$a = b \Leftrightarrow ac = bc, \tag{1.2}$$

per ogni $c \neq 0$ (c *diverso* da zero).

Le parentesi indicano come è solito la precedenza nell'eseguire diverse operazioni. Il primo membro della 3) nel Principio 1 dice allora che bisogna sommare prima b e c, il risultato, stante la proprietà commutativa, va poi sommato ad a. Il secondo membro invece chiede di sommare prima a e b, e poi il risultato a c. Il contenuto della proprieà è allora che queste due operazioni, a priori diverse, sono in realtà la stessa cosa e quindi la somma di più numeri non dipende da come questi si associano tra loro per ottenere risultati parziali. La proprietà distributiva è molto importante poiché relaziona tra loro due operazioni diverse, il prodotto e la somma, permettendo di scrivere un prodotto come una somma e viceversa, una somma come un prodotto. Ma su questo punto torneremo più volte nel seguito. Negli esempi della sezione precedente questa proprietà ha avuto un ruolo essenziale. Da questa discende anche per esempio che il prodotto è in realtà un'abbreviazione di una somma:

$$ac = a(\underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{c-\text{volte}}) = \underbrace{a + a + \ldots + a}_{c-\text{volte}}.$$

Una semplice ma importante proprietà è la seguente

Teorema 1 (Legge di annullamento del prodotto)**.**

$$a \cdot b = 0 \Leftrightarrow (a = 0) \vee (b = 0).$$

Il prodotto di due numeri a, b è nullo se e soltanto se a è nullo oppure ($\vee$) b è nullo.

Dimostrazione. Si voglia valutare il prodotto $a \cdot 0$. Osserviamo che $a + a \cdot 0 = (1 + 0) \cdot a = 1 \cdot a = a$. Allora, per la (1.1) non c'è scampo, dev'essere $a \cdot 0 = 0$. Viceversa, sia dunque $ab = 0$. Se $a \neq 0$, avremmo $a \cdot b = 0 = a \cdot 0$. Da cui (per la (1.2)) seguirebbe $b = 0$. Allo stesso modo, se fosse invece $b \neq 0$ seguirebbe $a = 0$. Pertanto, in ogni caso almeno uno tra i numeri a e b deve essere zero. □

Il quadratino in un testo di matematica indica usualmente dove una dimostrazione termina. Talvolta ci si può imbattere nella fatidica sigla c.v.d. (come volevasi dimostrare), o in altri simboli o sigle a seconda dei gusti dell'autore.

Dalle nozioni primitive si costruiscono enti più complessi attraverso la definizione. Una buona definizione dovrà contenere soltanto enti primitivi o già definiti precedentemente. Ad esempio possiamo introdurre il concetto di sottoinsieme

Definizione 2 (Sottoinsieme)**.** *Si dice che un insieme A è sottoinsieme di un insieme B, in simboli scriveremo $A \subset B$ (A è sottoinsieme di B, oppure A è contenuto in B), se ogni elemento di A è anche elemento di B.*

Come si vede, nella definizione intervengono soltanto i concetti primitivi di insieme e di appartenenza. Nel seguito utilizzeremo anche altri modi per definire qualcosa. Ad esempio scriveremo

$$A \subset B \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall x \in A : x \in B,$$

che si legge A è contenuto in B se e soltanto se (per definizione) per ogni elemento x di A risulta che x appartiene a B. Quello che stiamo dicendo è che i due enunciati sono *equivalenti* e la precisazione del *def* sta ad indicare che tale equivalenza non richiede una dimostrazione o verifica: l'enunciato nuovo di sinistra è in altre parole una abbreviazione di quello a destra. Anche qui abbiamo utilizzato il nuovo simbolo $\forall$ di quantificatore universale che potremo considerare come concetto primitivo della logica. Sui connettivi logici ($\forall, \exists, \vee, \wedge, \rightarrow$) diremo comunque qualcosa più avanti qua e là, ma senza pretesa di precisione. La logica matematica e la teoria degli insiemi non sono teorie elementari. Come ulteriore esempio introduciamo la nozione di uguaglianza tra insiemi attraverso la seguente definizione

$$A = B \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (A \subset B) \wedge (B \subset A),$$

ovvero, A e B sono uguali se e soltanto se A è sottoinsieme di B e allo stesso tempo ($\wedge$) anche B è sottoinsieme di A. Dunque, stante la definizione di sottoinsieme, due insiemi sono uguali, come insiemi, se hanno tutti e soli gli stessi elementi. Vale la pena rimarcare il fatto che l'uguaglianza tra insiemi qui non è più un concetto primitivo. Quindi, se scriviamo $A = B$ non non si tratta più di qualcosa da prendere per buono ma di qualcosa da verificare. Ovvero che tutti gli elementi di A stanno anche in B e che viceversa tutti gli elementi di B stanno anche in A.

Talvolta, nuovi insiemi possono essere definiti specificando una *proprietà* che i suoi elementi devono soddisfare. Naturalmente, tale proprietà deve essere in grado di stabilire con certezza se un dato oggetto appartiene o no all'insieme. L'insieme dei numeri *belli* ad esempio non è ben definito fintanto che non sia possibile stabilire se un dato numero sia bello o no. L'insieme dei numeri pari $\mathcal{P} \subset \mathbb{N}$ è invece ben definito. Basta vedere se un numero è o no multiplo di due, ovvero della forma $2n$, affinché la proprietà di essere pari sia soddisfatta o no. Più concisamente scriveremo

$$\mathcal{P} := \{n \in \mathbb{N} \ : \ \exists m \in \mathbb{N} \text{ t. c. } n = 2m\}, \tag{1.3}$$

che si legge $\mathcal{P}$ è l'insieme dei numeri interi n per i quali esiste un intero m tale che (t. c.) $n = 2m$. Ovvero tutti multipli di due. Qui gli elementi dell'insieme sono indicati tra parentesi graffe, a sinistra dei due punti si specifica da quale insieme preesistente questi oggetti sono presi, in questo caso tra i numeri interi, mentre a destra si specifica la proprietà che tali elementi devono soddisfare per stare nell'insieme dato, nel caso specifico quella di essere multipli di due. In questo modo, in altri termini, si definisce un insieme prendendo un sottoinsieme di un insieme dato formato da tutti gli elementi accomunati dal soddisfare una stessa specifica proprietà. Il simbolo $:=$ invece indica il fatto che l'uguaglianza è data *per definizione* e non va verificata come andrebbe fatto per gli insiemi. Quindi stiamo dicendo alla fine che il simbolo $\mathcal{P}$ non è altro che una abbreviazione di quanto scritto a destra dell'uguale. In genere, dovrebbe risultare chiaro dal contesto se una equivalenza logica o una uguaglianza sono utilizzati a scopo definitorio. A scanso di equivoci, quando necessario utilizzeremo comunque le notazioni $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}, :=$.

1.4.2 Teoremi

Un Teorema è in genere una scrittura del tipo

$$A \Rightarrow B,$$

che si legge A implica B, o in soldoni se è vero A allora è vero anche B. Più precisamente, $A \Rightarrow B$ è l'enunciato che, per definizione, è falso se A è vera e

B è falsa, mentre è vero in tutti gli altri casi. Dunque, con l'affermare che A implica B è vera si esclude che da una premessa vera se ne possa dedurre una conclusione falsa. Naturalmente, questo significa ancora che B può essere vera anche nel caso in cui A risulti falsa. A e B sono degli enunciati che vengono detti rispettivamente ipotesi (A) e tesi (B) del Teorema. Si dice anche che A è condizione sufficiente per B e che B è condizione necessaria per A. Chiariamo con un esempio. Consideriamo l'implicazione: *se minaccia pioggia allora prendo l'ombrello.* Se questa implicazione è vera, ciò significa che ogni volta che minaccia pioggia mi porto dietro l'ombrello. In tal caso la minaccia di pioggia è condizione sufficiente a prendere l'ombrello. Quindi è sufficiente che senta alla radio le previsioni di pioggia per mettere automaticamente nella mia borsa l'ombrello. D'altro canto, il prendere l'ombrello è condizione necessaria alla minacia di pioggia. Cioè, se c'è minaccia di pioggia *necessariamente* mi porto dietro l'ombrello. Ciò significa anche che se mi accorgo che nella mia borsa non c'è l'ombrello, allora certamente non può minacciare pioggia (altrimenti avrei preso l'ombrello). Quindi, dire che B è condizione necessaria per A vuol dire anche che se B non si verifica allora non può verificarsi neppure A.

Facciamo notare che B potrebbe verificarsi anche indipendentemente da A. Per esempio potrei portarmi dietro l'ombrello in valigia per un lungo viaggio indipendentemente da quanto possano dire le previsioni del tempo. Questo non contraddice l'implicazione $A \Rightarrow B$.

Dunque, un teorema richiede innanzitutto di stabilire la verità di enunciati. Questi possono essere costruiti in diversi modi e pertanto vale la pena soffermarsi un attimino su questi temi. Dato un enunciato P se ne può costruire la sua negazione che indicheremo con $\neg P$. La negazione, per definizione, è l'operazione che trasforma il vero in falso e il falso in vero. La cosiddetta tavola di verità corrispondente è qualcosa del genere

P	$\neg P$	$\neg\neg P$
V	F	V
F	V	F

La terza colonna della tabella mostra che la negazione è un'operazione *involutoria*, ossia se applicata due volte ci si riporta indietro allo stato di partenza. Per l'implicazione, la relativa tavola di verità è la seguente

A	B	$A \Rightarrow B$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Dati invece due enunciati P e Q, possiamo costruire la congiunzione $P \wedge Q$ (P e Q) e la disgiunzione $P \vee Q$ (P o Q). La congiunzione è l'enunciato che, per definizione, è vero soltanto quando entrambi gli enunciati lo sono, mentre è falso in tutti gli altri casi. La disgiunzione invece è, per definizione, sempre vera tranne il caso in cui gli enunciati P, Q sono entrambi falsi. La tavola di verità della negazione mostra anche che $P \Leftrightarrow \neg\neg P$ è un teorema, per il semplice fatto che i due enunciati hanno le medesime occorrenze di verità o falsità. Teoremi di questo tipo vengono usualmente detti *tautologie*. Si tratta dunque di risultati in cui non hanno importanza gli enunciati specifici che vi compaiono e la cui verità dipende unicamente proprio dalla struttura logica con la quale sono costruiti. L'enunciato P potrebbe infatti riferirsi ad una canzone o a qualsiasi altra cosa. Una contraddizione è invece un enunciato che, per la sua struttura, è sempre falso. La tipica contraddizione è l'enunciato $C \wedge \neg C$. Il lettore può ad esempio controllare che l'enunciato $A \Rightarrow B$ è equivalente a $\neg B \Rightarrow \neg A$. Per essere più precisi, la doppia implicazione, o equivalenza logica, si può in realtà introdurre tramite la seguente

$$A \Leftrightarrow B \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A), \tag{1.4}$$

che si legge invece dicendo che gli enunciati A e B sono equivalenti o che A è condizione necesssaria e sufficiente per B. Dire allora ad esempio che $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$ significa dire che tale enunciato è sempre vero indipendentemente dagli enunciati A, B.

Quale utile esercizio studiamo le negazioni della congiunzione e della disgiunzione. Cominciamo con il costruire la seguente tavola di verità

P	Q	$P \wedge Q$	$\neg(P \wedge Q)$
V	V	V	F
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

L'ultima colonna della tavola mostra che l'enunciato $\neg(P \wedge Q)$ è sempre vero tranne che in un caso. Tutto allora lascia pensare che tale enunciato sia allora equivalente ad una disgiunzione. Ma una disgiunzione è falsa solo quando sono entrambi falsi gli enunciati che la compongono. Ma la prima riga corrisponde a P, Q entrambi veri. Ok, allora $\neg P, \neg Q$ sono entrambi falsi. Bene, dunque deve valere la seguente equivalenza

$$\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q. \tag{1.5}$$

Per scrupolo calcoliamo la tavola di verità corrispondente.

P	Q	$\neg P \vee \neg Q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	V

Pertanto, la negazione di *vado al mare e faccio il bagno* è l'enunciato: *Non vado al mare oppure (caso mai ci andassi) non faccio il bagno.* Le ultime colonne delle due tavole di sopra coincidono e pertanto l'equivalenza (1.5) è ben stabilita. In modo simile possiamo studiare l'enunciato $\neg(P \vee Q)$. Il lettore è invitato a farlo per esercizio. Con un po' di astuzia possiamo evitare questo modo un po' tedioso di procedere. Infatti, per stabilire un teorema è anche lecito basarsi su qualsiasi cosa sia stata provata in precedenza, oltre che sugli assiomi e le ipotesi naturalmente. Ora, guardando un po' più attentamente la (1.5), ci accorgiamo che forse ci può essere utile leggerla da destra verso sinistra per ottenere informazioni sulla disgiunzione di due enunciati. Sì, ma noi abbiamo bisogno di P, Q invece che di $\neg P, \neg Q$. Ma certo, basta ricordarsi che $\neg\neg P \Leftrightarrow P$. Allora, mettendo $\neg P, \neg Q$ al posto di P, Q nella (1.5) si ottiene

$$\neg(\neg P \wedge \neg Q) \Leftrightarrow (\neg\neg P) \vee (\neg\neg Q) \Leftrightarrow P \vee Q.$$

Allora, negando quest'ultimo enunciato si ottiene

$$\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg\neg(\neg P \wedge \neg Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q.$$

Pertanto la negazione di: *vado al mare o in montagna* è l'enunciato: *non vado al mare e neppure in montagna (e quindi trascorro le vacanze al parco vicino casa).* In particolare, questo l'esercizio appena fatto mostra che l'enunciato $P \vee Q$ potrebbe essere introdotto attraverso la congiunzione ($\wedge$) e la negazione ($\neg$) invece che come enunciato primitivo.

Quale utile esercizio si verifichi che

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \vee A).$$

Pertanto, anche il simbolo $\Rightarrow$ potrebbe essere introdotto a partire dalla negazione e dalla disgiunzione invece che essere dato come primitivo.

I connettivi consentono anche di definire delle operazioni insiemistiche, si veda la figura 1.4.2. Definiamo la riunione di due insiemi A e B contenuti in uno stesso insieme U tramite la seguente

$$A \cup B := \{x \in U \ : \ (x \in A) \vee (x \in B)\}$$

e l'intersezione definita da

$$A \cap B := \{x \in U \ : \ (x \in A) \wedge (x \in B)\}.$$

Mentre la differenza tra due insiemi è data da

$$A \setminus B := \{x \in U \ : \ (x \in A) \wedge (x \notin B)\},$$

dove $x \notin B \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \neg(x \in B)$.

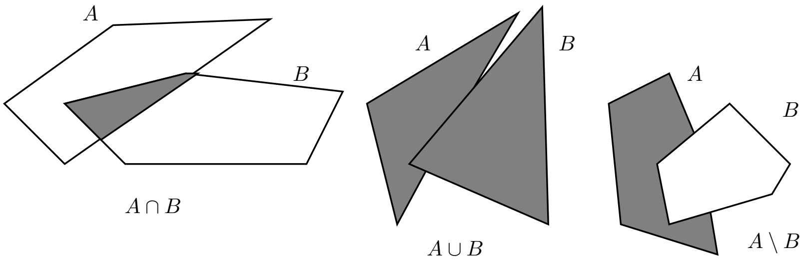

Figura 1.2: Alcune operazioni insiemistiche

L'operazione di differenza si chiama anche complementazione e ci si riferisce a $A \setminus B$ come al complementare di B rispetto ad A per enfatizzare il fatto che si tratta dell'insieme che resta quando da A si tolgono gli elementi di B. Quando l'insieme da cui si toglie, cioè A, è chiaro dal contesto, e resta così sottointeso, si parla semplicemente di complementare e si scrive $B^c := A \setminus B$. Ad esempio, se ci limitiamo a sottoinsiemi di $\mathbb{N}$, potremo dire che definendo i numeri dispari come successivi di numeri pari, ovvero

$$\mathcal{D} := \{x \in \mathbb{N} \ : \ \exists n \in \mathbb{N} \ t.c. \ x = 2n + 1\},$$

allora si ha che $\mathcal{D} = \mathcal{P}^c$, dove $\mathcal{P}$ è l'insieme dei numeri pari definito dalla (9.11). Inoltre, ovviamente $\mathbb{N} = \mathcal{P} \cup \mathcal{D}$ e $\mathcal{P} \cap \mathcal{D} = \emptyset$. Abbiamo indicato con $\emptyset$ l'insieme vuoto, ossia quell'insieme che, per definizione, non contiene nessun elemento. Quando due insiemi hanno intersezione vuota si dice anche che i due insiemi sono disgiunti.

1.4.3 Negazione dei quantificatori

Consideriamo un enunciato del tipo: *Tutti i cigni sono bianchi.* Qual è la sua negazione? Esiste almeno un cigno nero, direte voi. Forse vale la pena essere più precisi, in effetti anche un cigno viola andrebbe bene lo stesso per confutare il fatto che tutti i cigni sono bianchi. Pertanto sarebbe meglio dire: *esiste almeno un cigno non-bianco.* Formalmente, abbiamo dunque un enunciato, come il fatto di essere bianco, che dipende da una variabile, il cigno in questo caso. Se indichiamo con x il generico cigno, si tratta di un enunciato della forma $P(x) := x$ è bianco. Possiamo allora esprimere la negazione dell'enunciato *Tutti i cigni sono bianchi* nel seguente modo:

$$\neg(\forall x : P(x)) \Leftrightarrow \exists x : \neg P(x). \tag{1.6}$$

Qual è invece la negazione di *esiste un cigno nero?* Tutti i cigni sono bianchi! No, potrebbero anche essere viola, gialli, rossi. L'importante è che non siano neri. Dunque la negazione di un tale enunciato è: *Tutti i cigni sono non-neri.* Formalmente, vale allora la seguente

$$\neg(\exists x : P(x)) \Leftrightarrow \forall x : \neg P(x). \tag{1.7}$$

Il lettore può osservare che la (1.7) si può ottenere dalla (1.6) sostituendo P con $\neg P$.

1.5 Teoremi e dimostrazioni

Abbiamo detto che un teorema è una scrittura del tipo $A \Rightarrow B$. Una dimostrazione invece è una sequenza di *argomenti* che mostri come partendo dalle ipotesi (se A è vero) si possa concludere con la tesi (allora anche B è vero). Pertanto è estremamente importante riconoscere in un Teorema quali enunciati costituiscano le ipotesi e quali invece la tesi. Questo è un fatto trascurato da molti studenti. Se non è chiaro da dove partiamo e dove vogliamo arrivare che senso ha mettersi in cammino? Consideriamo l'enunciato: *La somma di due numeri pari è a sua volta un numero pari.* A quesiti del genere la risposta di molti studenti è qualcosa del tipo: $2+2=4, 2+4=6, 4+4=8$, ok, allora è vero, la somma di due numeri pari è sempre pari. E chi ci dice che la somma di due numeri pari di mille cifre è ancora pari? Anche se fosse vero, tutta la fatica fatta per verificarlo potrebbe essere vana. Magari ci potranno essere numeri pari di diecimila cifre la cui somma, per qualche strana ragione, non è pari. Faremmo bene a riflettere sul contenuto della sezione precedente. Un singolo cigno nero può dimostrare che non tutti i cigni sono bianchi. Ma una miriade di cigni bianchi non dimostra che allora tutti i cigni debbono esserlo. A meno che non scandagliamo scrupolosamente il pianeta controllando i cigni uno per uno. Dunque, se esibiamo un controesempio, nella fattispecie due numeri pari la cui somma non lo sia, abbiamo terminato. L'enunciato è falso. Ma se invece è vero, neanche milioni di esempi positivi ci possono rassicurare. Albert Einstein disse una volta: *mille esperimenti non possono provare che ho ragione. Ma un singolo esperimento può sempre provare che ho torto.* La matematica esiste anche per questo.

Teorema 3. *La somma di due numeri pari è a sua volta un numero pari*

Dimostrazione. Se vogliamo scrivere il teorema nella forma $A \Rightarrow B$, allora possiamo scrivere qualcosa del genere: $a, b \in \mathcal{P} \Rightarrow a + b \in \mathcal{P}$. Prendiamo dunque due numeri a, b pari. Questa è la nostra ipotesi. Dobbiamo dimostrare, e questa è la nostra tesi, che anche $a + b$ è un numero pari. Essendo pari, per la (9.11) esistono due interi m, n per cui $a = 2m, b = 2n$. Allora, utilizzando la proprietà distributiva otteniamo

$$a + b = 2m + 2n = 2(m + n),$$

e dunque anche $a + b$ è un multiplo di due, ovvero è un numero pari. $\square$

1.6 Per assurdo

La dimostrazione che abbiamo appena proposto è, per così dire, diretta, procedendo dall'ipotesi verso la tesi. Esiste anche un modo indiretto per provare qualcosa. Si tratta della cosiddetta dimostrazione per assurdo. L'argomento indiretto in genere può creare qualche perplessità e disorientamento. Pertanto vale senz'altro la pena di soffermarvici su più estesamente.

Nei giochi a quiz, o in occasione dei test di ingresso all'università, ogni domanda è corredata da una lista di possibili risposte, composta ad esempio diciamo da quattro alternative. Ovviamente, se il concorrente conosce la risposta giusta dà questa risposta e tutto finisce lì. Questo è il metodo diretto. Ma c'è anche un altro modo, più indiretto, per rispondere. Sherlock Holmes, il famoso detective, in una sua avventura affermò: *quando si sia escluso l'impossibile, ciò che resta, per quanto improbabile, è pur sempre la verità.* Mi pare di aver sentito anche il vulcaniano Spock affermare qualcosa del genere in un episodio della storica serie televisiva Star Trek. E se lo dice Spock c'è da fidarsi!

D'altronde, il ragionamento di Holmes è, o almeno dovrebbe essere, limpido: è un ragionamento per esclusione. Io non conosco la risposta esatta. Ma so che esiste una sola risposta corretta. Allora, se riesco ad escludere tre risposte su quattro perché non possono essere la risposta giusta, quella che resta, per quanto bizzarra possa essere, deve essere la risposta giusta. E il gioco è fatto. Dovrebbe essere chiaro anche perché si tratta di un metodo indiretto. Diamo la risposta giusta non perché conosciamo la risposta esatta, ma soltanto perché le altre risposte non possono esserlo. Del resto, questo succede spesso quando ad esempio ci rivolgiamo ad un medico. Dopo il colloquio e la visita, anche se non ce lo dice, spesso il medico continua a non sapere da quale malattia siamo affetti. Allora, in base ai sintomi, dentro di sé può pensare qualcosa del genere: *Ok, quindi può essere una infezione di questo batterio, o di un certo virus, che potrebbe passare da sola tra qualche giorno, o la malattia cavolina (una malattia che mi sto inventando al momento e che si cura mangiando cavolo per un mese). Va bene, allora gli prescrivo un antibiotico. Intanto, l'effetto placebo qualcosina può sempre fare. Comunque sia, alla fine della cura, se il paziente è guarito tanto di guadagnato. Se non è guarito gli faccio mangiare cavoli a merenda. Se poi i sintomi persistono mi rivolgo allora all'antivirale. Se poi* *il paziente muore allora cosa volete da me? Sono un povero dottore non un mago!*

Naturalmente, le cose nella realtà sono ancora più complicate. Chi ha avuto a che fare con i medici o ha visto dottor House in TV può intuire di cosa si tratti. Il problema è che in medicina o nelle indagini di polizia, le alternative possibili possono essere anche molte di più di tre o quattro e potrebbero riguardare anche a volte cose (ad esempio malattie) ancora da scoprire. Anche chi ha figli piccoli spesso deve ragionare in questo modo. Se il bimbo piange avrà fame. Se non ha fame allora potrebbe avere il pannolino sporco. Altrimenti avrà sonno. E se continua a piangere inconsolabile allora forse non si sente bene ed è meglio consultare il pediatra.

Ora, la dimostrazione per assurdo è un caso semplificato rispetto al caso dei test di ingresso o dei quiz televisivi. Si tratta del caso in cui ci sono soltanto due alternative tra le quali scegliere. Un enunciato può essere vero o falso. Se escludiamo che sia falso, allora deve essere vero. Se invece escludiamo che sia falso, allora deve essere vero. Tutto qui. Si tratta di un metodo indiretto perché non proviamo ad esempio che una cosa è vera, ma soltanto che non può essere falsa. Naturalmente, in quanto detto fino ad ora c'è qualcosa di implicito che vale la pena discutere. Il primo assunto implicito, come abbiamo già detto in precedenza, è il cosiddetto *principio del terzo escluso*. Cioè stiamo ammettendo che per un enunciato esistono soltanto due possibilità, vero o falso. Nessuna terza opzione. Se vogliamo, questo corrisponde ad una logica a due soli valori, V, F di verità. L'altro assunto implicito è il cosiddetto *principio di non contraddizione*, per il quale niente può essere contemporaneamente vero e falso. Questo corrisponde al desiderio di evitare i paradossi, le contraddizioni. Nella nostra teoria cioè non deve poter essere C e $\neg C$ per uno stesso enunciato C. Questo corrisponderebbe a qualcosa di analogo a quanto abbiamo visto su Babbo Natale. Sarebbe allora valido tutto e il contrario di tutto. Un vero caos insomma. Ciò detto, il tipico schema di un ragionamento per assurdo è qualcosa di simile al seguente. Si voglia dimostrare ad esempio che l'enunciato B è vero. Allora dobbiamo escludere che sia vero $\neg B$. Supponiamo allora per assurdo che sia vero $\neg B$. Se da questo deiviamo una contraddizione, o un assurdo come talvolta si dice, del tipo $C \wedge \neg C$, allora siamo a cavallo. La contraddizione è emersa dall'aver supposto $\neg B$ vero. Pertanto, posto che contraddizioni non ce ne possono essere, allora $\neg B$ non può essere vero. Allora per forza di cose deve essere vero B, che è proprio quanto volevamo dimostrare. Ma ora basta con le chiacchiere. È venuto il momento di passare all'azione. Consideriamo il seguente

Teorema 4. *L'unità del prodotto è unica.*

Dimostrazione. Tra gli assiomi dell'aritmetica abbiamo la proprietà $\forall a \in \mathbb{N} : a \cdot 1 = a$. Il contenuto del presente teorema è che 1 è l'unico numero che verifica questa proprietà. Ragioniamo per assurdo. Suponiamo allora per assurdo che l'enunciato del teorema sia falso. Ovvero che esista un numero $c \neq 1$ tale che $\forall a \in \mathbb{N} : a \cdot c = a$. Dove $c \neq 1$ sta naturalmente per $\neg(c = 1)$. Ma tale proprietà vale quale che sia $a \in \mathbb{N}$. Allora, quanto detto deve valere anche per $a = 1$. In questo caso allora si ottiene

$$1 \cdot c = 1 \Leftrightarrow c = 1.$$

Ma questo è assurdo perché c sarebbe uguale e allo stesso tempo diverso da uno. Allora, non potendo essere falso, l'enunciato deve essere vero.

$\square$

Quale utile esercizio, il lettore può ad esempio verificare che anche l'elemento neutro della somma è unico.