Sintesi

Spazi vettoriali: l'insieme V è uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$ se è definita in V un'operazione interna di addizione in modo tale che la struttura algebrica $(V, +)$ sia un gruppo commutativo, cioè se

(g_1) $u + (v + w) = (u + v) + w$ per ogni u, v, $w \in V$,

(g_2) esiste l'elemento neutro $\overline{0} \in V$ tale che $v + \overline{0} = \overline{0} + v = v$ per ogni $v \in V$,

(g_3) per ogni elemento $v \in V$ esiste l'elemento $-v \in V$ tale che $v + (-v) = (-v) + v = \overline{0}$,

(g_4) $v + w = w + v$ per ogni v, $w \in V$.

È inoltre definita un'operazione esterna in V rispetto a $\mathbb{K}$ in modo che le seguenti proprietà siano soddisfatte:

(p_1) $\alpha(v + w) = \alpha v + \alpha w$ per ogni $\alpha \in \mathbb{K}$ e v, $w \in V$,

(p_2) $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$ per ogni α, $\beta \in \mathbb{K}$ e $v \in V$,

(p_3) $(\alpha\beta)v = \alpha(\beta v)$ per ogni α, $\beta \in \mathbb{K}$ e $v \in V$,

(p_4) per ogni $v \in V$ si ha $1v = v$, dove 1 è l'unità del campo $\mathbb{K}$.

Lo spazio vettoriale $\mathbb{K}^n$ è costituito dalle n-uple ordinate di elementi di $\mathbb{K}$. Si può dare a $\mathbb{K}^n$ struttura di spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ definendo addizione interna e prodotto esterno: se $X = (x_1, \dots, x_n)$ e $Y = (y_1, \dots, y_n)$ sono due elementi di $\mathbb{K}^n$ e α è un qualsiasi elemento di $\mathbb{K}$, si pone

$$X + Y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

e

$$\alpha X = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n).$$

Spazi vettoriali di funzioni. Sia $\mathcal{F}(A, \mathbb{K})$ l'insieme delle applicazioni di A in $\mathbb{K}$. Addizione e prodotto esterno sono così definite, con f, $g \in \mathcal{F}(A, \mathbb{K})$ e $\alpha \in \mathbb{K}$:

$$(f + g)(a) = f(a) + g(a) \text{ per ogni } a \in A$$

e

$$(\alpha f)(a) = \alpha f(a) \text{ per ogni } a \in A.$$

Sistemi di generatori. In uno spazio vettoriale V si considerino n vettori v_1, ..., v_n. Per ogni n-upla di scalari il vettore di V $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n$ è detto *combinazione lineare* dei vettori v_1, ..., v_n. Il sottoinsieme W di V costituito da tutte le possibili combinazioni lineari di tali vettori è un sottospazio di V ed è indicato con $\langle v_1, \dots, v_n \rangle$. Si dice che gli n vettori sono un *sistema di generatori* per W.

Dipendenza lineare. Si dice che i vettori $v_1, \dots, v_n$ sono *linearmente dipendenti* su $\mathbb{K}$ se esiste una n-upla di scalari non tutti nulli tali che $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n = \overline{0}$, altrimenti si dicono *linearmente indipendenti.*

Basi e coordinate di un vettore. L'insieme ordinato di vettori $\{v_1 \dots, v_n\}$ è una *base* di V, se tali vettori sono linearmente indipendenti e se sono un sistema di generatori per V. Se B è una base di V, scelto comunque un vettore v, esiste una n-upla di scalari tale che $v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n$, in quanto B è un sistema di generatori per V. Inoltre, essendo i vettori di B linearmente indipendenti, l'n-upla $\alpha_1 \dots, \alpha_n$ è unica. Gli scalari $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ si chiamano *le coordinate* o *le*

componenti di v sulla base B.
Base canonica di $\mathbb{K}^n$. L'insieme $C = \{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$ costituito dai vettori di $\mathbb{K}^n$

$$\begin{gathered}\varepsilon_1 = (1, 0, \ldots, 0)\\ \varepsilon_2 = (0, 1, \ldots, 0)\\ \ldots\\ \varepsilon_n = (0, 0, \ldots, 1)\end{gathered}$$

è una base di $\mathbb{K}^n$, e prende il nome di *base canonica*, in quanto le coordinate del vettore $(x_1, \ldots, x_n)$ sulla base C sono proprio $x_1, \ldots, x_n$.
TEOREMA 1: *sia* $G = \{v_1, \ldots, v_n\}$ *un sistema di generatori per lo spazio vettoriale* $V(V \neq \{\overline{0}\})$. *Esiste allora un sottoinsieme di* G *che è una base di* V.
TEOREMA 2 *(dello scambio)*: *in uno spazio vettoriale* V, *siano* $\{v_1, \ldots, v_n\}$ *una base e* $\{w_1, \ldots, w_r\}$ *un insieme di vettori linearmente indipendenti. Allora* $r \leq n$.
Corollario 1: *siano* $\{v_1, \ldots, v_n\}$ *e* $\{w_1, \ldots, w_r\}$ *due basi dello spazio vettoriale* V. *Allora* $n = r$.
Corollario 2: *in uno spazio vettoriale* V *siano:* $\{v_1, \ldots, v_r\}$ *un insieme di vettori linearmente indipendenti,* $\{w_1, \ldots, w_n\}$ *una base di* V, $\{u_1, \ldots, u_s\}$ *un sistema di generatori per* V. *Allora* $r \leq n \leq s$.
TEOREMA 3: *Sia* V *uno spazio vettoriale di dimensione* n *e siano* $v_1, \ldots, v_n$ n *vettori di* V *linearmente indipendenti. Allora* $\{v_1, \ldots, v_n\}$ *è una base di* V.
TEOREMA 4: *Siano* V *uno spazio vettoriale di dimensione* n *e* $W \neq \{\overline{0}\}$ *un suo sottospazio. Allora* W *ha una base, si ha* $\dim W \leq \dim V$ *e se* $\dim W = \dim V$ *allora* $W = V$.
TEOREMA 5: *Siano* V *uno spazio vettoriale di dimensione* n *e* $v_1, \ldots, v_r$ *vettori linearmente indipendenti di* V. *Esistono allora dei vettori* $v_{r+1}, \ldots, v_n$ *tali che* $\{v_1, \ldots, v_n\}$ *sia una base di* V.
Applicazioni lineari. Siano V e W spazi vettoriali sullo stesso campo $\mathbb{K}$. Una *applicazione lineare*, o anche un *omomorfismo*, di V in W è una applicazione $L : V \to W$ con le seguenti proprietà:

(i_1) $L(u + v) = L(u) + L(v)$ per ogni u, $v \in V$,

(i_2) $L(\alpha u) = \alpha L(u)$ per ogni $\alpha \in \mathbb{K}$ e $u \in V$.

Quando inoltre L è biiettiva si chiama un *isomorfismo.* Ogni spazio vettoriale V, il cui campo sia $\mathbb{K}$ e avente su K dimensione n, è isomorfo a $\mathbb{K}^n$. Per ottenere un isomorfismo di V in $\mathbb{K}^n$ è sufficiente scegliere una base $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ di V e considerare l'applicazione L di V in $\mathbb{K}^n$ che associa a ciascun vettore di V la sua n-upla di coordinate sulla base B. Quindi se $v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n$ poniamo $L(v) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. L'applicazione è biiettiva e si verificano le proprietà (i_1) e (i_2).
Lo spazio $Hom(V, W)$. L'insieme costituito da tutte le applicazioni lineari di V in W si denota con $Hom(V, W)$. A tale insieme si può dare la struttura di spazio vettoriale su $\mathbb{K}$. Se infatti $(L+T)(v) = L(v)+T(v)$ e $(\alpha L)(v) = \alpha L(v)$, si dimostra che $(L+T)(u+v) = (L+T)(u)+(L+T)(v)$ e che $(\alpha L)(u+v) = (\alpha L)(u)+(\alpha L)(v)$, pertanto $L+T$ e αL godono della proprietà (i_1). Siccome poi $(L + T)(\lambda u) = \lambda(L + T)(u)$ e $(\alpha L)(\lambda u) = \lambda(\alpha L)(u)$, $L + T$ e αL godono della proprietà (i_2).
TEOREMA 1: *siano* V *e* W *spazi vettoriali sullo stesso campo. Se* $\{v_1, \ldots, v_n\}$ *è una base di* V *e* $\{w_1, \ldots, w_n\}$ *è un arbitrario insieme di vettori di* W, *esiste ed è unica l'applicazione lineare* $L : V \to W$ *tale che* $L(v_1) = w_1, \ldots, L(v_n) = w_n$.
Dimostrazione: sia $u = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n$ il generico vettore di V e consideriamo $L : V \to W$ così definita:

$$L(u) = \alpha_1 w_1 + \ldots + \alpha_n w_n.$$

Si ha che $L(v_1) = w_1, \ldots, L(v_n) = w_n$. Inoltre L è lineare in quanto, se si indica con $v = \beta_1 v_1 + \ldots + \beta_n v_n$ un generico secondo vettore di V, poichè le coordinate del vettore $u + v$ sulla base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ sono $(\alpha_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_n + \beta_n)$, si ha

$$L(u+v) = (\alpha_1+\beta_1)w_1+\ldots+(\alpha_n+\beta_n)w_n = (\alpha_1 w_1+\ldots+\alpha_n w_n)+(\beta_1 w_1+\ldots+\beta_n w_n) = L(u)+L(v).$$

Inoltre, se $\lambda \in \mathbb{K}$, le coordinate di λu sulla base data sono $(\lambda\alpha_1, \ldots, \lambda\alpha_n)$, ne segue

$$L(\lambda u) = (\lambda\alpha_1)w_1 + \ldots + (\lambda\alpha_n)w_n = \lambda(\alpha_1 w_1 + \ldots + \alpha_n w_n) = \lambda L(u).$$

Per l'unicità di L, se T è una qualsiasi applicazione lineare di V in W tale che $T(v_1) = w_1, \ldots, T(v_n) = w_n$, per ogni vettore $u = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n$ si ha

$$T(u) = T(\alpha v_1 + \ldots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 T(v_1) + \ldots + \alpha_n T(v_n) = \alpha_1 w_1 + \ldots + \alpha_n w_n = L(u),$$

e quindi $T = L$.

Nucleo e immagine di una applicazione lineare. Siano V e W spazi vettoriali sullo stesso campo $\mathbb{K}$ ed L una applicazione lineare di V in W. Si chiama *nucleo di* L, e si denota con $\ker L$, l'insieme dei vettori di V la cui immagine in L è il vettore nullo di W: $\ker L = \{v \in V | L(v) = \overline{0}\}$. Nel caso di una applicazione lineare, il sottoinsieme $L(V)$ di W si denota con Im L: Im $L = \{w \in W | L(v) = w$ per qualche $v \in V\}$. Come immediata conseguenza della linearità di L, si mostra che $\ker L$ e Im L sono sottospazi di V e W rispettivamente. Se infatti si scelgono arbitrariamente v_1, $v_2 \in \ker L$ e $\alpha \in \mathbb{K}$, da $L(v_1+v_2) = L(v_1)+L(v_2) = \overline{0}+\overline{0} = \overline{0}$ e $L(\alpha v_1) = \alpha L(v_1) = \alpha\overline{0} = \overline{0}$, segue che v_1+v_2 e αv_1 sono ancora vettori di $\ker L$. Analogamente se w_1 e w_2 sono due qualsiasi elementi di Im L e $\beta \in \mathbb{K}$, posto $w_1 = L(u_1)$ e $w_2 = L(u_2)$, si ha $w_1 + w_2 = L(u_1) + L(u_2) = L(u_1 + u_2)$ e $\beta w_1 = \beta L(u_1) = L(\beta u_1)$, quindi $w_1 + w_2$ e βw_1 sono vettori di Im L. Il nucleo dell'applicazione lineare L dà informazioni sulla iniettività di L, precisamente: *L è iniettiva se e solo se* $\ker L = \{\overline{0}\}$. Infatti, essendo $\ker L$ un sottospazio di V, si ha $\overline{0} \in \ker L$, cioè $L(\overline{0}) = \overline{0}$. Se L è iniettiva, $\ker L$ non può contenere alcun vettore $v \neq \overline{0}$ altrimenti $L(v) = L(\overline{0})$. Viceversa se $\ker L = \{\overline{0}\}$ e v, w sono due vettori di V tali che $L(v) = L(w)$, da $L(v) - L(w) = L(v - w) = \overline{0}$ segue che $v - w$ è un vettore di $\ker L$, quindi $v - w = \overline{0}$ cioè $v = w$. Nel caso che L sia iniettiva, questa muta vettori linearmente indipendenti di V in vettori linearmente indipendenti di W. Se infatti $v_1, \ldots, v_n$ sono vettori di V linearmente indipendenti e $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sono scalari tali che $\alpha_1 L(v_1)+\ldots+\alpha_n L(v_n) = \overline{0}$, si ha $L(\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n) = \overline{0}$, quindi $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n$ è un vettore di $\ker L$. Ma essendo L iniettiva, $\ker L$ contiene il solo vettore nullo di V, ne segue $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n = \overline{0}$ e, poichè i vettori $v_1, \ldots, v_n$ sono linearmente indipendenti, si ha $\alpha_i = 0$ per ogni $i = 1, \ldots, n$.

TEOREMA 2: *siano V e W spazi vettoriali di dimensione finita sullo stesso campo. Per ogni applicazione lineare L di V in W si ha*

$$\dim V = \dim \ker L + \dim \mathrm{Im}\ L.$$

TEOREMA 3: *siano V e W spazi vettoriali di dimensione finita sullo stesso campo* $\mathbb{K}$. *V e W sono isomorfi se e solo se* $\dim V = \dim W$.

Dimostrazione: supponiamo che L sia un isomorfismo di V in W. Essendo L iniettiva si ha $\ker L = \{\overline{0}\}$, ed essendo L suriettiva si ha Im $L = W$. Dal teorema 2 segue allora $\dim V = \dim W$. Viceversa, se $\dim V = \dim W = n$, gli spazi V e W sono isomorfi a $\mathbb{K}^n$. Esistono quindi un isomorfismo $L : V \to W$ ed un isomorfismo $T : W \to \mathbb{K}^n$, l'applicazione $T^{-1}L$ è allora un isomorfismo di V in W.

Spazi vettoriali di matrici. Una *matrice* $m \times n$ a elementi in $\mathbb{K}$ è un insieme di mn elementi di $\mathbb{K}$ disposti su m righe e n colonne nel modo seguente:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Dimensione di $M_{m\times n}(\mathbb{K})$. Lo spazio vettoriale $M_{m\times n}(\mathbb{K})$ ha dimensione mn, infatti una sua base è costituita dalle seguenti matrici, con le stesse peculiarità della base canonica:

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}, \ldots, E_{mn} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

Infatti $A = a_{11}E_{11} + a_{12}E_{12} + \ldots + a_{mn}E_{mn}$.
Prodotto righe-colonne. Si definisce *prodotto righe-colonne* delle matrici A e B la matrice $m \times r$ su $\mathbb{K}$

$$AB = \begin{pmatrix} A_1B^1 & \ldots & A_1B^r \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_mB^1 & \ldots & A_mB^r \end{pmatrix}.$$

L'elemento di posto (i, j) della matrice AB è quindi

$$A_iB^j = a_{i1}b_{1j} + \ldots + a_{in}b_{nj} = \sum_{h=1}^{n} a_{ih}b_{hj}.$$

Il prodotto righe-colonne gode di alcune proprietà:

(1) $(AB)C = A(BC)$. Siano infatti $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $C = (c_{ij})$. La riga i-esima della matrice AB è il vettore di $\mathbb{K}^r$ $(A_iB^1, \ldots, A_iB^r)$, mentre la colonna j-esima della matrice BC è il vettore di $\mathbb{K}^n$ $(B_1C^j, \ldots, B_nC^j)$. Ciò premesso, l'elemento di posto (i, j) della matrice $(AB)C$ è

$$(A_iB^1, \ldots, A_iB^r)C^j = (a_{i1}b_{11} + \ldots + a_{in}bn1)c_{1j} + \ldots + (a_{i1}b_{1r} + \ldots + a_{in}bnn)c_{rj} =$$

$$a_{i1}(b_{11}c_{1j} + \ldots + b_{1r}c_{rj}) + \ldots + a_{in}(b_{n1}c_{1j} + \ldots + b_{nr}c_{rj}) = A_i(B_1C^j, \ldots, B_nC^j),$$

che è l'elemento di posto (i, j) della matrice $A(BC)$.

(2) $A(B + C) = AB + AC$.

(3) $(\alpha A)B = \alpha(AB) = A(\alpha B)$.

(4) $(AB)^t = B^tA^t$.

(5) Una matrice quadrata A si dice *invertibile* se esiste B (quadrata, dello stesso ordine) tale che $AB = BA = I_n$.

Applicazioni lineari e matrici. Siano V e W spazi vettoriali su $\mathbb{K}$ di dimensione n e m. Fissate a piacere una base $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ di V e una base $B' = \{w_1, \ldots, w_m\}$ di W, ad ogni applicazione lineare $L : V \to W$ si può associare una matrice $m \times n$ nel modo seguente: se

$$\begin{aligned} &L(v_1) = \alpha_{11}w_1 + \ldots + \alpha_{m1}w_m \\ &\ldots \\ &L(v_n) = \alpha_{1n}w_1 + \ldots + \alpha_{mn}w_m, \end{aligned}$$

si associa a L la matrice

$$M^B_{B'}(L) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \ldots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}.$$

In virtù del teorema 1 sulle applicazioni lineari, esiste una e una sola $L : V \to W$ tale che A sia la matrice di L rispetto alle basi B e B'.
TEOREMA 1: *siano V e W spazi vettoriali su K di dimensioni rispettive n ed m. Fissate le basi B di V e B' di W, l'applicazione $L \to M(L)$ è un isomorfismo di $Hom(V, W)$ in $M_{m\times n}(\mathbb{K})$.*
Una conseguenza di questo isomorfismo è che lo spazio vettoriale $Hom(V, W)$ ha la stessa dimensione di $M_{m\times n}(\mathbb{K})$, cioè mn.
TEOREMA 2: *siano V e W spazi vettoriali su $\mathbb{K}$ di dimensioni rispettive n ed m. Siano L un'applicazione lineare di V in W e A una matrice $m \times n$ su $\mathbb{K}$. Fissate le basi B di V e B' di*

W, A è la matrice di L rispetto alle basi B e B' se e solo se $L(v)_{B'} = Av_B$ per ogni v in V.
Dimostrazione: siano $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$, $B' = \{w_1, \ldots, w_m\}$ e

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Se A è la matrice di L rispetto alle basi B e B', comunque si consideri un vettore $v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n$ di V, si ha

$$L(v) = \alpha_1 L(v_1) + \ldots + \alpha_n L(v_n) = \alpha_1(a_{11}w_1 + \ldots + a_{m1}w_m) + \ldots + \alpha_n(a_{1n}w_1 + \ldots + a_{mn}w_m) =$$

$$(a_{11}\alpha_1 + \ldots + a_{m1}\alpha_n)w_1 + \ldots + (a_{m1}\alpha_1 + \ldots + a_{mn}\alpha_n)w_m,$$

pertanto $L(v)_{B'} = Av_B$. Viceversa, se quest'ultima è soddisfatta per ogni vettore v di V, si ha in particolare per ogni $i = 1, \ldots, n$, $L(v_i)B' = A(v_i)_B = A\varepsilon^i = A^i$, dove ε^i è la colonna i-esima della matrice I_n e A^i è la colonna i-esima della matrice A. Ne segue che A è la matrice di L rispetto alle basi B e B'.
Nel caso in cui A sia la matrice di L rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{K}^n$ e $\mathbb{K}^n$, per ogni vettore colonna $X \in \mathbb{K}^n$ si può scrivere $L(X) = AX$.
Matrice di una applicazione lineare composta. Siano U, V, W spazi vettoriali sullo stesso campo e siano E, E', E'' loro basi rispettive fissate ad arbitrio. Date due applicazioni lineari $L : U \to V$ e $T : V \to W$, consideriamo l'applicazione lineare composta $TL : U \to W$ e le matrici

$$A = M^E_{E''}(TL), \quad B = M^{E'}_{E''}(T), \quad C = M^E_{E'}(L).$$

Dalla proprietà associativa (1) del prodotto righe-colonne e dal teorema 2 segue $A = BC$. Per ogni vettore $u \in U$ si ha infatti

$$[M^{E'}_{E''}(T)M^E_{E'}(L)]u_E = M^{E'}_{E''}(T)[M^E_{E'}(L)u_E] = M^{E'}_{E''}(T)L(u)_{E'} = TL(u)_{E''}.$$

Quindi, sempre per il teorema 2, $M^E_{E''}(TL) = M^{E'}_{E''}(T)M^E_{E'}(L)$.
Matrice del cambiamento di base. Consideriamo uno spazio vettoriale V di dimensione n sul campo $\mathbb{K}$ e due basi di V E ed E'. Essa è invertibile e la sua inversa è la matrice $M^E_{E'}(id)$ del cambiamento di base da E' a E, in quanto

$$M^E_{E'}(id)M^{E'}_E(id) = M^{E'}_{E'}(id) = I_n,$$

$$M^{E'}_E(id)M^E_{E'}(id) = M^E_E(id) = I_n.$$

Determinante di una matrice. Ad ogni matrice quadrata A, ad elementi in un fissato campo $\mathbb{K}$, si può associare un elemento di $\mathbb{K}$ detto *il determinante di A* e denotato con $D(A)$ oppure $det(A)$.
TEOREMA 1: *esiste una applicazione $D : M_{n\times n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ tale che le seguenti proprietà siano soddisfatte.*

(d_1) *Se la k-esima colonna della matrice A è somma di due vettori colonna, $A^k = B^k + C^k$, allora $D(A^1, \ldots, B^k + C^k, \ldots, A^n) = D(A^1, \ldots, B^k, \ldots, A^n) + D(A^1, \ldots, C^k, \ldots, A^n)$.*

(d_2) *Se $\lambda \in \mathbb{K}$, allora $D(A^1, \ldots, \lambda A^k, \ldots, A^n = \lambda D(A^1, \ldots, A^k, \ldots, A^n)$.*

(d_3) *Se nella matrice A due colonne contigue A^k e A^{k+1} $(1 \le k \le n-1)$ sono uguali, allora $D(A) = 0$.*

(d_4) $D(I_n) = 1$.

Il teorema precedente fornisce anche la formula per il calcolo di una matrice quadrata di ordine n, riconducendolo al calcolo di determinanti di matrici quadrate di ordine $n-1$, ovvero lo *sviluppo di Laplace* secondo gli elementi della riga i-esima:

$$D(A) = (-1)^{i+1} a_{i1} D(A_{i1}) + \ldots + (-1)^{i+n} a_{in} D(A_{in}),$$

dove A_{ji} è la matrice $(n-1) \times (n-1)$ che si ottiene da A sopprimendo la riga i-esima e la colonna j-esima di A.
La funzione determinante gode di alcune ulteriori proprietà:

(d_5) *Se nella matrice A si scambiano di segno due colonne contigue il determinante di A non cambia di segno.*

(d_6) *Se la matrice A ha due qualsiasi colonne uguali, allora $D(A) = 0$.*

(d_7) *Siano A^k e A^h due colonne distinte di A e sia λ uno scalare. Se la colonna A^k si sostituisce con la colonna $A^k + \lambda A^h$ il determinante non cambia.*

TEOREMA 2: *l'applicazione $D : M_{n\times n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ soddisfacente le proprietà (d_1), ..., (d_4) è unica.*
TEOREMA 3: *sia $A = (a_{ij})$ una matrice $n \times n$, allora $D(A) = D(A^t)$.*
TEOREMA 4: *siano $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ matrici $n \times n$. Allora $D(AB) = D(A)D(B)$.*
TEOREMA 5: *sia A una matrice quadrata di ordine n. Se A è invertibile allora $D(A) \neq 0$ e $D(A^{-1}) = D(A)^{-1}$.*
TEOREMA 6: *sia $\mathbb{K}$ un campo. Se i vettori colonna $A^1, \ldots, A^n$ di $\mathbb{K}$ sono linearmente dipendenti allora $D(A^1, \ldots, A^n) = 0$.*
TEOREMA 7: *sia A una matrice $n \times n$ su $\mathbb{K}$. Le seguenti proprietà sono equivalenti:*

(p_1) $D(A) \neq 0$.

(p_2) *Le colonne di A (o le righe di A) sono vettori di $\mathbb{K}^n$ linearmente indipendenti.*

(p_3) *La matrice A è invertibile.*

Dimostrazione: se $D(A) \neq 0$ i vettori colonna $A^1, \ldots, A^n$ della matrice A devono essere linearmente indipendenti per il teorema 6, quindi (p_1) implica (p_2). Supponiamo ora vera la (p_2). In questa ipotesi l'insieme $B = \{A^1, \ldots, A^n\}$ è un insieme di n vettori linearmente indipendenti di $\mathbb{K}^n$ quindi B è una base di $\mathbb{K}^n$. Detta C la base canonica di $\mathbb{K}^n$ si ha subito $A = M_C^B(id)$, e le matrici di cambiamento di base sono invertibili, dunque (p_2) implica (p_3). Che (p_3) implichi (p_1) è stato dimostrato con il teorema 5, pertanto le proprietà (p_1), (p_2), (p_3) sono equivalenti.
Sistemi di Cramer. Un sistema lineare di m equazioni in n incognite è detto un *sistema di Cramer* se $m = n$ e la matrice del sistema ha determinante diverso da 0.
TEOREMA 1: *sia $x_1 A^1 + \ldots + x_n A^n = B$ un sistema di Cramer. Esiste allora una ed una sola soluzione del sistema. Essa è, per $j = 1, \ldots, n$,*

$$x_{ij} = \frac{D(A^1, \ldots, B, \ldots, A^n)}{D(A)},$$

dove $(A^1, \ldots, B, \ldots, A^n)$ è la matrice che si ottiene da $A = (A^1, \ldots, A^n)$ sostituendo la colonna A^j con la colonna B.
Dimostrazione: La matrice A del sistema è una matrice $n \times n$ con determinante diverso da 0. Le sue colonne sono quindi vettori di $\mathbb{K}^n$ linearmente indipendenti, ed essendo n, sono una base di $\mathbb{K}^n$. Il vettore B si può allora esprimere in uno ed in un sol modo come combinazione lineare dei vettori $A^1, \ldots, A^n$. Ciò mostra che esiste una ed una sola soluzione del sistema. Sia essa $(x_1, \ldots, x_n)$ e calcoliamo il determinante della matrice $(A^1, \ldots, B, \ldots, A^n)$, ottenuta da A sostituendo A^j con B:

$$D(A^1, \ldots, B, \ldots, A^n) = D(A^1, \ldots, x_1 A^1 + \ldots + x_n A^n, \ldots, A^n) =$$

$$x_1 D(A^1, \ldots, A^1, \ldots, A^n) + \ldots + x_j D(A^1, \ldots, A^j, \ldots, A^n) + \ldots + x_n D(A^1, \ldots, A^n, \ldots, A^n).$$

Ma queste matrici hanno tutte due colonne uguali, eccetto la j-esima che è la matrice A, ne segue $D(A^1, \ldots, B, \ldots, A^n) = x_{ij} D(A)$, e quindi la soluzione del sistema è quella indicata nell'enunciato.
TEOREMA 2: *sia* $A = (a_{ij})$ *una matrice* $m \times n$ *su* $\mathbb{K}$, *allora* $\dim\langle A_1, \ldots, A_m\rangle = \dim\langle A^1, \ldots, A^n\rangle$.
Si chiama *rango o caratteristica* di A, e si indica con *rang* A, la dimensione su $\mathbb{K}$ del sottospazio di $\mathbb{K}^n$ generato dai vettori riga e del sottospazio di $\mathbb{K}^m$ generato dai vettori colonna di A. Si può dire che il rango di A è il massimo numero di righe e il massimo numero di colonne di A linearmente indipendenti.
TEOREMA 3: *il rango di una matrice* A *è l'ordine massimo dei minori di* A *aventi determinante diverso da 0.*
TEOREMA 4: *un sistema lineare omogeneo a coefficienti nel campo* $\mathbb{K}$ *ammette sempre soluzioni. Se* r *è il rango della matrice del sistema ed* n *è il numero delle incognite, le soluzioni del sistema costituiscono un sottospazio di* $\mathbb{K}^n$ *di dimensione* $n - r$.
Dimostrazione: siano m il numero delle equazioni del sistema e $A = (A^1, \ldots, A^n)$ la matrice dei coefficienti. Consideriamo l'applicazione lineare $L : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ definita da $L(x_1, \ldots, x_n) = x_1 A^1 + \ldots + x_n A^n$. L'insieme S delle soluzioni è l'insieme dei vettori $X = (x_1, \ldots, x_n)$ di $\mathbb{K}^n$ tali che $L(X) = \overline{0}$, ne segue $S = \ker L$. Pertanto S è un sottospazio di $\mathbb{K}^n$ e il vettore nullo di $\mathbb{K}^n$ è sempre una soluzione del sistema. Si ha inoltre $\mathrm{Im}\ L = \langle A^1, \ldots, A^n\rangle$ quindi si può scrivere $\dim \mathbb{K}^n = \dim S + \dim\langle A^1, \ldots, A^n\rangle$, cioè $\dim S = n - r$.
TEOREMA 5 *(di Rouché-Capelli)*: *il sistema lineare* $x_1 A^1 + \ldots + x_n A^n = B$ *ammette soluzioni se e solo se* $rang(A^1, \ldots, A^n) = rang(A^1, \ldots, A^n, B)$.
Dimostrazione: se i ranghi delle due matrici sono uguali, allora $B \in \langle A^1, \ldots, A^n\rangle$, e quindi esistono soluzioni del sistema. Viceversa, se il sistema ha soluzioni il vettore B appartiene allo spazio vettoriale $\langle A^1, \ldots, A^n\rangle$, si ha pertanto $\langle A^1, \ldots, A^n, B\rangle = \langle A^1, \ldots, A^n\rangle$, cioè $rang(A^1, \ldots, A^n) = rang(A^1, \ldots, A^n, B)$.
Sia $x_1 A^1 + \ldots + x_n A^n = B$ un sistema lineare non omogeneo. Si chiama sistema ad esso *associato* il sistema lineare omogeneo $x_1 A^1 + \ldots + x_n A^n = \overline{0}$. Denotiamo con S l'insieme delle soluzioni del primo sistema e con S_0 lo spazio delle soluzioni del secondo. Supponiamo inoltre $S \neq \emptyset$ e sia X una soluzione di S fissata ad arbitrio. Si ha allora

$$S = \{Y \in \mathbb{K}^n | Y = X + U \text{ con } U \in S_0\}.$$

Sia infatti $L : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ l'applicazione lineare $L(x_1, \ldots, x_n) = x_1 A^1 + \ldots + x_n A^n$. Se Y è un qualsiasi elemento di S, da $L(Y) = B$ e $L(X) = B$ segue $L(X) - L(Y) = L(X - Y) = \overline{0}$, pertanto il vettore $Y - X$ è un vettore di $\ker L = S_0$. Viceversa, per ogni elemento U di S_0, si ha $L(X + U) = L(X) + L(U) = L(X) = B$, quindi $X + U$ appartiene a S. L'applicazione $U \to X + U$ è una biiezione di S_0 in S, ed è solo in tal senso che si dice che anche S ha la dimensione di S_0. Si può semplicemente scrivere $S = X + S_0$.