

## Discussione di Equazioni Parametriche

### Relazione fra media aritmetica e media geometrica.

Dati due numeri positivi  $x_1, x_2$  la loro media aritmetica e geometrica sono definite come

$$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad x_G = \sqrt{x_1 x_2}$$

**Lemma 1.** Proviamo che se  $x_1$  e  $x_2$  sono diversi fra loro, allora vale sempre la relazione

$$x_M > x_G \quad (1)$$

Infatti:

$$\begin{aligned} \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) > \sqrt{x_1 x_2} &\Rightarrow (x_1 + x_2) > 2\sqrt{x_1 x_2} \Rightarrow (x_1 + x_2)^2 > 4x_1 x_2 \Rightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 > 0 \\ &\Rightarrow x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 x_2 > 0 \Rightarrow (x_1 - x_2)^2 > 0 \end{aligned}$$

L'ultima disequazione è sempre verificata se  $x_1 \neq x_2$  e quindi risulta verificata anche la (1)

Per numeri negativi la media geometrica non è definita; tuttavia possiamo prendere il suo quadrato e far vedere che la relazione

$$x_M^2 > x_G^2 \Leftrightarrow \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 > x_1 x_2$$

è sempre verificata qualunque siano  $x_1, x_2$  purché diversi

Infatti, distinguiamo i seguenti casi:

- 1)  $x_1 > 0, x_2 > 0 \Rightarrow$  prendendo le radici quadrate di entrambi i membri si ritrova la relazione (1).
- 2)  $x_1 < 0, x_2 > 0$  oppure  $x_1 > 0, x_2 < 0 \Rightarrow$  è immediato in quanto il primo membro è sempre positivo mentre secondo membro è sempre negativo
- 3)  $x_1 < 0, x_2 < 0 \Rightarrow$  è immediato: basta prendere i valori assoluti

### Relazione fra il punto medio delle radici di un trinomio e un punto fisso

**Lemma 2.** Dato il trinomio

$$P(x) = a x^2 + b x + c$$

con  $a, b, c$  dipendenti da un parametro  $m$ ;

dato un punto  $\alpha$  sull'asse  $x$ ;

se esiste un intervallo  $I = [m_1, m_2]$  tale che per ogni  $m \in I$  si verifica

$$\begin{cases} \Delta > 0 & (1.1) \\ a \cdot P(\alpha) > 0 & (1.2) \end{cases}$$

Allora il punto  $\alpha$  si trova sempre a destra o sempre a sinistra del punto medio delle radici per ogni  $m \in I$ .

Dim: Dobbiamo provare che, dette  $x_1$  e  $x_2$  le radici del trinomio, certamente esistenti per l'ipotesi (1.1), si ha per ogni  $m \in I$ :

$$\frac{x_1 + x_2}{2} < \alpha \quad \text{oppure} \quad \frac{x_1 + x_2}{2} > \alpha$$

Al variare di  $m$  nel segmento  $I$ , le radici del polinomio variano con continuità. Consideriamo la funzione

$$d(m) = \frac{x_1 + x_2}{2} - a$$

Anche questa funzione è continua nella variabile  $m$ . Dobbiamo far vedere che il segno di questa funzione non varia per ogni  $m \in I$ . Ragioniamo per assurdo e ammettiamo che  $d(m)$  cambi di segno; allora per la continuità deve esistere almeno un punto  $m^*$  in cui la funzione si annulla, cioè deve essere

$$d(m^*) = \frac{x_1 + x_2}{2} - a = 0 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad (3)$$

Per l'ipotesi 1.1, il polinomio può essere scritto come:

$$P(x) = a x^2 + b x + c = a(x - x_1)(x - x_2) = a(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2)$$

E quindi:

$$P(a) = a(a^2 - (x_1 + x_2)a + x_1 x_2)$$

Per l'ipotesi 1.2 deve essere

$$a \cdot P(a) > 0 \quad \Rightarrow \quad a^2(a^2 - (x_1 + x_2)a + x_1 x_2) > 0 \quad (4)$$

Da cui sostituendo la (3) nella (4), e tenendo conto che  $a^2$  è sempre positivo si ha la seguente disequazione:

$$\begin{aligned} \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 - (x_1 + x_2)\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) + x_1 x_2 > 0 \\ -\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 + x_1 x_2 > 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 x_2 > \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

Essendo

$$x_G = \sqrt{x_1 x_2} \quad , \quad x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

rispettivamente la media geometrica e la media aritmetica. L'ultima relazione afferma che  $x_G^2 > x_M^2$ , che è chiaramente falsa perché la media aritmetica è sempre maggiore della media geometrica. Quindi la funzione  $d(m)$  non può variare di segno, ma deve essere sempre positiva o sempre negativa per ogni  $m \in I$ . Di conseguenza devono valere i seguenti due casi

$d(m) = \frac{x_1 + x_2}{2} - a > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{x_1 + x_2}{2} > a$	$\alpha$ è sempre a destra del punto medio delle radici per ogni $m \in I$
$d(m) = \frac{x_1 + x_2}{2} - a < 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{x_1 + x_2}{2} < a$	$\alpha$ è sempre a sinistra del punto medio delle radici per ogni $m \in I$

## Relazione fra le radici di un trinomio e un punto fisso

Dato il trinomio

$$P(x) = a x^2 + b x + c$$

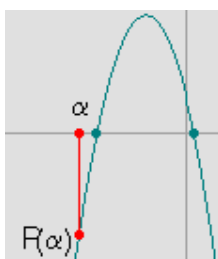
con  $a, b, c$  dipendenti da un parametro  $m$ ;

Vogliamo stabilire la posizione reciproca delle radici del trinomio rispetto ad un punto fisso  $\alpha$  al variare del parametro  $m$ . Tale studio prende il nome di "discussione dell'equazione"

Se  $\Delta > 0$  e  $a < 0$  si possono avere i seguenti tre casi

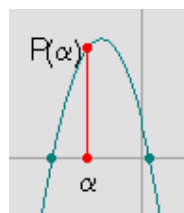
$\alpha$  esterno a sinistra

$$P(\alpha) < 0, \quad \alpha < (x_1 + x_2)/2$$



$\alpha$  interno

$$P(\alpha) > 0$$



$\alpha$  esterno a destra

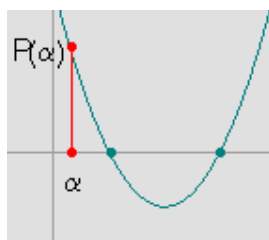
$$P(\alpha) < 0, \quad \alpha > (x_1 + x_2)/2$$



Se  $\Delta > 0$  e  $a > 0$  si possono avere i seguenti tre casi

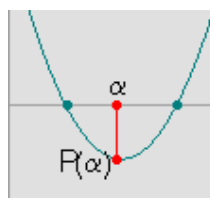
$\alpha$  esterno a sinistra

$$P(\alpha) > 0, \quad \alpha < (x_1 + x_2)/2$$



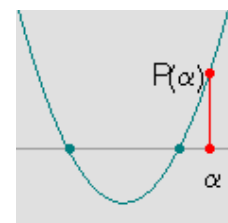
$\alpha$  interno

$$P(\alpha) < 0$$



$\alpha$  esterno a destra

$$P(\alpha) > 0, \quad \alpha > (x_1 + x_2)/2$$



Ricordiamo infine che la media delle radici può essere calcolata dai coefficienti del trinomio

$$x_M = \frac{(x_1 + x_2)}{2} = -\frac{b}{2a}$$

Alcuni esempi chiariranno il procedimento

1

<sup>1</sup> Tutti i grafici sono stati ottenuti con **Winplot**, un eccellente programma freeware della Peanut Software

### Discussione di equazioni con un vincolo

**Esempio1.** Determinare per quali valori del parametro  $m$ , almeno una radice dell'equazione soddisfa la condizione associata

$$(m-3)x^2 - 4x + m = 0 \quad , \quad x < 1$$

Prima di tutto, affinché le radici siano reali, deve essere

$$\Delta/4 = (b/2)^2 - ac = -m^2 + 3m + 4 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad -1 \leq m \leq 4 \quad (1)$$

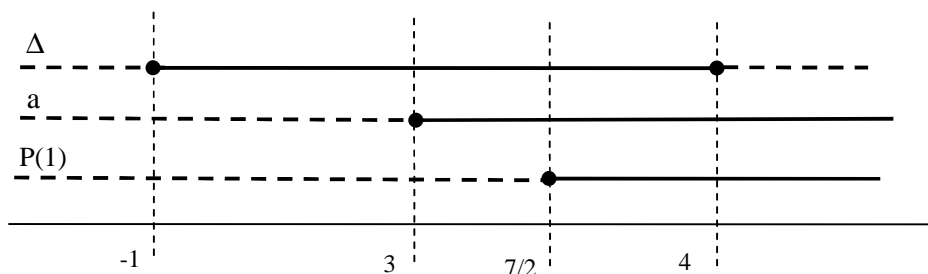
Inoltre dobbiamo studiare il segno del coefficiente  $a$

$$a = m - 3 > 0 \quad \Rightarrow \quad m > 3 \quad (2)$$

e il segno del trinomio per  $x = 1$

$$P(1) = 2m - 7 > 0 \quad \Rightarrow \quad m > 7/2 \quad (3)$$

Mettendo insieme i segni delle relazioni (1), (2) e (3), abbiamo il seguente grafico



Il grafico mostra che l'asse  $m$  è diviso in 5 intervalli che danno origine ai seguenti casi

- 1)  $m < -1 \quad \Rightarrow \quad \Delta < 0 \quad \Rightarrow \quad$  nessuna soluzione
- 2)  $-1 < m < 3$   
 $\Delta > 0 \quad \Rightarrow \quad$  radici reali e distinte  
 $a \cdot P(a) > 0 \quad \Rightarrow \quad$  il punto  $\alpha = 1$  è esterno all'intervallo delle radici

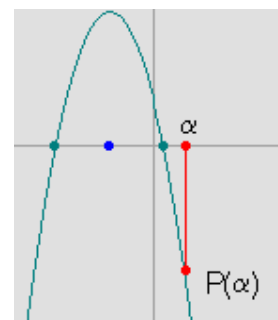
Per sapere se è esterno a destra o a sinistra si deve esaminare il punto medio delle radici

$$x_M = \frac{(x_1 + x_2)}{2} = -\frac{b}{2a} = \frac{2}{m-3}$$

e risolvere la disequazione  $x_M < a$ , con  $\alpha = 1$ .

Si, può evitare la risoluzione diretta della disequazione ricorrendo al lemma 2. Sostituiamo, infatti, un valore a piacere nell'intervallo  $[-1, 3]$  (estremi compresi). Ad esempio prendendo  $m = 0$  il valore medio diventa  $-2/3$ , che è minore di 1

Quindi il punto  $\alpha = 1$  si trova esterno a destra delle radici, ed entrambe le radici soddisfano alla condizione richiesta  $x < 1$

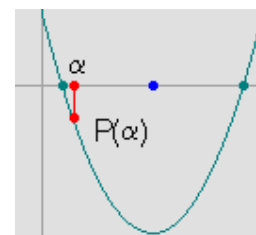


3)  $3 < m < 7/2$

$\Delta > 0 \Rightarrow$  radici reali e distinte

$a \cdot P(a) < 0 \Rightarrow$  il punto  $\alpha = 1$  è interno all'intervallo delle radici

Solo la radice minore è accettabile



4)  $7/2 < m < 4$

$\Delta > 0 \Rightarrow$  radici reali e distinte

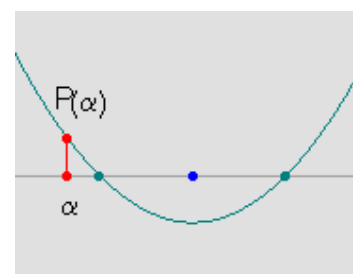
$a \cdot P(a) > 0 \Rightarrow$  il punto  $\alpha = 1$  è esterno all'intervallo delle radici

Per sapere se è esterno a destra o a sinistra si deve esaminare il punto medio delle radici

$$x_M = \frac{(x_1 + x_2)}{2} = -\frac{b}{2a} = \frac{2}{m-3}$$

Scegliamo un valore a piacere nell'intervallo  $[7/2, 4]$  (estremi compresi). Ad esempio prendendo  $m = 4$  il valore medio diventa 2, che è maggiore di 1

Quindi il punto  $\alpha = 1$  si trova esterno a sinistra delle radici, e nessuna radice soddisfa la condizione richiesta  $x < 1$



5)  $m > 4 \Rightarrow \Delta < 0 \Rightarrow$  nessuna soluzione

**Esempio2.** Determinare per quali valori del parametro  $m$ , almeno una radice dell'equazione soddisfa la condizione associata

$$(m-5)x^2 - (m+2)x + m-4 = 0, \quad x < 2$$

Prima di tutto, affinché le radici siano reali, deve essere

$$\Delta = b^2 - 4ac = 3(28 - m^2) \geq 0 \Rightarrow -2\sqrt{7} \leq m \leq 2\sqrt{7} \quad (1)$$

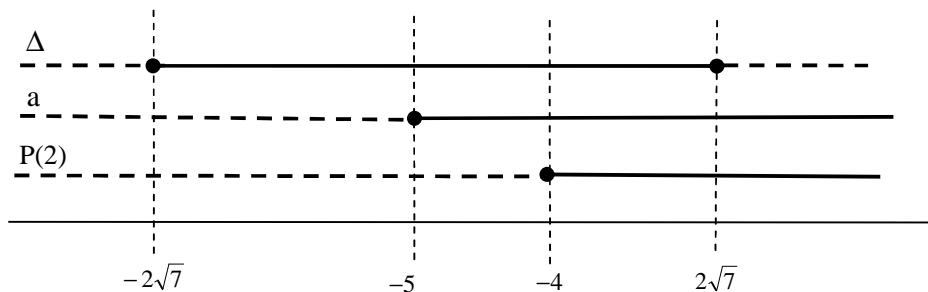
Inoltre dobbiamo studiare il segno del coefficiente  $a$

$$a = m + 5 > 0 \Rightarrow m > -5 \quad (2)$$

il segno del trinomio per  $x = 1$

$$P(1) = 3m + 12 > 0 \Rightarrow m > -4 \quad (3)$$

Mettendo insieme i segni delle relazioni (1), (2) e (3), abbiamo il seguente grafico



Il grafico mostra che l'asse  $m$  è diviso in 5 intervalli che danno origine ai seguenti casi

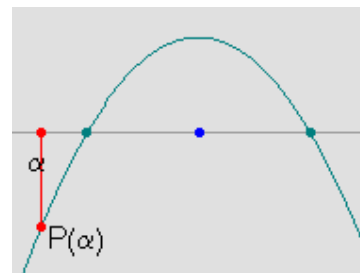
- 1)  $m < -2\sqrt{7} \Rightarrow \Delta < 0 \Rightarrow$  nessuna soluzione
- 2)  $-2\sqrt{7} < m < 4$   
 $\Delta > 0 \Rightarrow$  radici reali e distinte  
 $a \cdot P(a) > 0 \Rightarrow$  il punto  $\alpha = 2$  è esterno all'intervallo delle radici

Per sapere se è esterno a destra o a sinistra si deve esaminare il punto medio delle radici

$$x_M = \frac{(x_1 + x_2)}{2} = -\frac{b}{2a} = \frac{m+2}{2(m+5)}$$

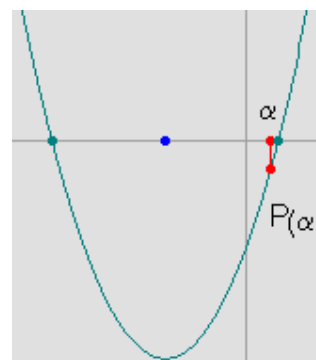
Scegliamo un valore a piacere nell'intervallo  $[-2\sqrt{7}, -5)$ .

Ad esempio prendendo  $m = -52/10$ , il valore medio diventa 8, che è maggiore di 2. Quindi il punto  $\alpha = 2$  si trova esterno a sinistra delle radici, e nessuna radice soddisfa la condizione richiesta  $x < 2$



- 3)  $-5 < m < -4$   
 $\Delta > 0 \Rightarrow$  radici reali e distinte  
 $a \cdot P(a) < 0 \Rightarrow$  il punto  $\alpha = 2$  è interno all'intervallo delle radici.

Solo la radice minore è accettabile



- 4)  $-4 < m < 2\sqrt{7}$   
 $\Delta > 0 \Rightarrow$  radici reali e distinte  
 $a \cdot P(a) > 0 \Rightarrow$  il punto  $\alpha = 2$  è esterno all'intervallo delle radici

Per sapere se è esterno a destra o a sinistra si deve esaminare il punto medio delle radici

$$x_M = \frac{(x_1 + x_2)}{2} = -\frac{b}{2a} = \frac{m+2}{2(m+5)}$$

Scegliamo un valore a piacere nell'intervallo  $[-4, 2\sqrt{7}]$ .

Ad esempio prendendo  $m = 0$  il valore medio diventa  $1/5$ , che è minore di 2. Quindi il punto  $\alpha = 2$  si trova esterno a destra delle radici, ed entrambe le radici soddisfano la condizione richiesta  $x < 1$



5)  $m > 2\sqrt{7} \Rightarrow \Delta < 0 \Rightarrow$  nessuna soluzione

### Discussione di equazioni con due vincoli

Molte volte le soluzioni dell'equazione devono soddisfare sia un limite superiore sia uno inferiore che nella maggior parte dei casi è zero

$$a x^2 + b x + c = 0 \quad , \quad a_1 < x < a_2$$

Tipici casi si trovano nella risoluzione dei problemi geometrici in cui l'incognita è in generale un segmento; in tal caso la soluzione deve essere positiva e minore di un certo limite.

Lo studio di questi problemi viene ricondotto a quello precedente. Le radici vengono confrontate sia con il limite inferiore che con il limite superiore. Questo in generale; tuttavia quando il limite inferiore è zero - es.  $0 < x < 1$  - è possibile semplificare ulteriormente lo studio per mezzo della regola dei segni di Cartesio.

- ogni variazione dei segni di a, b, c  $\Rightarrow$  radice positiva
- ogni permanenza dei segni di a, b, c  $\Rightarrow$  radice negativa

Una volta stabilito il segno delle radici è immediato dedurre se la relazione  $0 < x$  è vera o falsa. Vediamo con esempi pratici come funziona

**Esempio 1.** Determinare per quali valori del parametro m, almeno una radice dell'equazione soddisfa la condizione associata

$$(1+m)x^2 + 2(2+m)x + (5+m) = 0 \quad , \quad 0 \leq x \leq 1$$

Condizione per l'esistenza delle radici

$$\Delta / 4 = (2+m)^2 - (1+m)(5+m) = -2m - 1 \geq 0 \Rightarrow m \leq -1/2$$

Segno dei coefficienti

$$a = (1+m) > 0 \Rightarrow m > -1$$

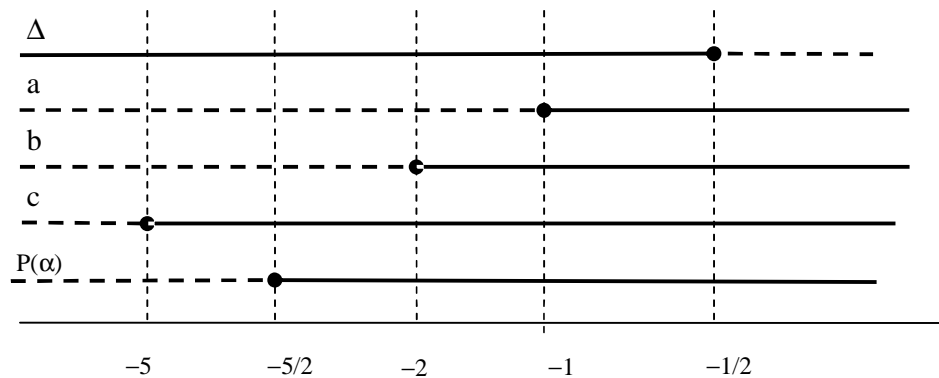
$$b = 2(2+m) > 0 \Rightarrow m > -2$$

$$c = (5+m) > 0 \Rightarrow m > -5$$

Segno del polinomio per  $\alpha = 1$

$$P(1) = 4m + 10 > \Rightarrow m > -5/2$$

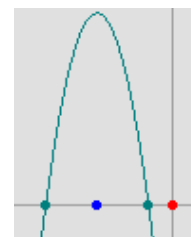
Costruiamo il grafico dei segni



Il grafico mostra che l'asse  $m$  è diviso in 6 intervalli che danno origine ai seguenti casi

1)  $m < -5$

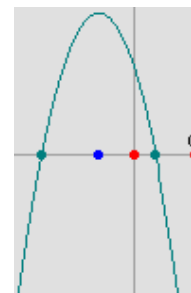
$\Delta > 0 \Rightarrow$  radici reali e distinte  
 segni  $(a, b, c) = (-, -, -) \Rightarrow$  2 permanenze  $\Rightarrow$  2 radici negative



Nessuna radice soddisfa il vincolo  $x \geq 0$

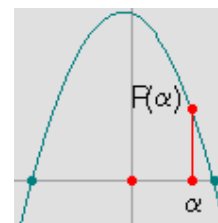
2)  $-5 < m < -5/2$

$\Delta > 0 \Rightarrow$  radici reali e distinte  
 segni  $(a, b, c) = (-, -, +) \Rightarrow$  1 variazione  $\Rightarrow$  1 radice positiva  
 $a \cdot P(a) > 0 \Rightarrow$  il punto  $\alpha = 1$  è esterno all'intervallo delle radici  
 Poiché una radice è negativa,  $\alpha$  si trova senz'altro alla destra dell'intervallo.  
 Quindi solo la radice positiva soddisfa il vincolo  $0 \leq x \leq 1$



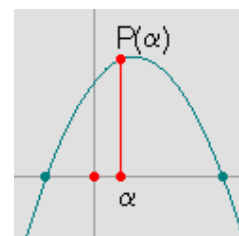
3)  $-5/2 < m < -2$

$\Delta > 0 \Rightarrow$  radici reali e distinte  
 segni  $(a, b, c) = (-, -, +) \Rightarrow$  1 variazione  $\Rightarrow$  1 radice positiva  
 $a \cdot P(a) < 0 \Rightarrow$  il punto  $\alpha = 1$  è interno all'intervallo delle radici  
 Quindi nessuna radice soddisfa il vincolo  $0 \leq x \leq 1$



3)  $-2 < m < -1$

$\Delta > 0 \Rightarrow$  radici reali e distinte  
 segni  $(a, b, c) = (-, +, +) \Rightarrow$  1 variazione  $\Rightarrow$  1 radice positiva  
 $a \cdot P(a) < 0 \Rightarrow$  il punto  $\alpha = 1$  è interno all'intervallo delle radici  
 Quindi nessuna radice soddisfa il vincolo  $0 \leq x \leq 1$

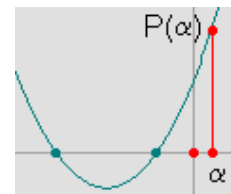


4)  $-1 < m < -1/2$

$\Delta > 0 \Rightarrow$  radici reali e distinte

segni (a, b, c) = (+, +, +)  $\Rightarrow$  2 permanenze  $\Rightarrow$  2 radici negative

Nessuna radice soddisfa il vincolo  $x \geq 0$



5)  $m > -1/2$

$\Delta < 0 \Rightarrow$  nessuna radice reale

Nota. I casi limite sono banali; sostituendo infatti i corrispondenti valori di m nell'equazione parametrica si ottengono delle equazioni normali, lo studio delle quali non presenta difficoltà concettuali.

**Esempio 2.** Determinare per quali valori del parametro m, almeno una radice dell'equazione soddisfa la condizione associata

$$(m-1)x^2 - 2(m+3)x + (2m-20) = 0, \quad 0 \leq x \leq 2$$

Condizione per l'esistenza delle radici

$$\Delta / 4 = -m^2 + 28m - 11 \geq 0 \Rightarrow 14 - \sqrt{185} \leq m \leq 14 + \sqrt{185}$$

Segno dei coefficienti

$$a = m - 1 > 0 \Rightarrow m > 1$$

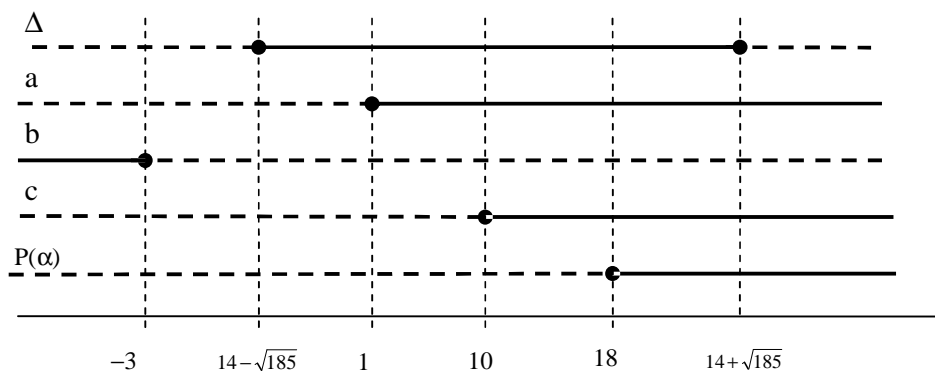
$$b = -2(m + 3) > 0 \Rightarrow m < -3$$

$$c = 2m - 20 > 0 \Rightarrow m > 10$$

Segno del polinomio per  $\alpha = 2$

$$P(2) = 2m - 36 > 0 \Rightarrow m > 18$$

Costruiamo il grafico dei segni, tenendo conto che  $14 - \sqrt{185} \cong 0.4$  e  $14 + \sqrt{185} \cong 27.6$



Il grafico mostra che l'asse m è diviso in 7 intervalli che danno origine ai seguenti casi

1) e 2)  $m < -3$  o  $-3 < m < 14 - \sqrt{185}$

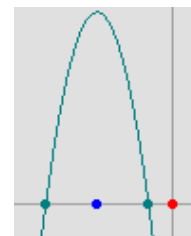
$\Delta < 0 \Rightarrow$  nessuna radice reale

3)  $14 - \sqrt{185} < m < 1$

$\Delta > 0 \Rightarrow$  radici reali e distinte

segni (a, b, c) = (-, -, -)  $\Rightarrow$  2 permanenze  $\Rightarrow$  2 radici negative

Nessuna radice soddisfa il vincolo  $x \geq 0$



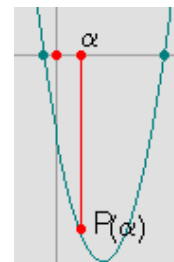
4)  $1 < m < 10$

$\Delta > 0 \Rightarrow$  radici reali e distinte

segni (a, b, c) = (+, -, -)  $\Rightarrow$  1 variazione  $\Rightarrow$  1 radice positiva

$a \cdot P(a) < 0 \Rightarrow$  il punto  $\alpha = 2$  è interno all'intervallo delle radici

Quindi nessuna radice soddisfa il vincolo  $0 \leq x \leq 2$



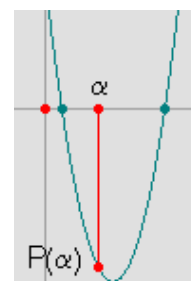
5)  $10 < m < 18$

$\Delta > 0 \Rightarrow$  radici reali e distinte

segni (a, b, c) = (+, -, +)  $\Rightarrow$  2 variazioni  $\Rightarrow$  2 radici positive

$a \cdot P(a) < 0 \Rightarrow$  il punto  $\alpha = 2$  è interno all'intervallo delle radici

La radice minore soddisfa il vincolo  $0 \leq x \leq 2$



6)  $18 < m < 14 + \sqrt{185}$

$\Delta > 0 \Rightarrow$  radici reali e distinte

segni (a, b, c) = (+, -, +)  $\Rightarrow$  2 variazioni  $\Rightarrow$  2 radici positive

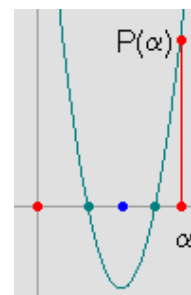
$a \cdot P(a) > 0 \Rightarrow$  il punto  $\alpha = 2$  è esterno all'intervallo delle radici

Per sapere se è esterno a destra o a sinistra si deve esaminare il punto medio delle radici

$$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{b}{2a} = \frac{m+3}{m+1}$$

Scegliamo un valore m a piacere nell'intervallo.

Ad esempio prendendo  $m = 20$  il valore medio diventa  $11/10$ , che è minore di 2. Quindi il punto  $\alpha = 2$  si trova esterno a destra delle radici, ed entrambe le radici soddisfano la condizione richiesta  $0 \leq x \leq 2$



7)  $m > 14 + \sqrt{185}$

$\Delta < 0 \Rightarrow$  nessuna radici reale

**Esempio 3.** Determinare per quali valori del parametro  $m$ , almeno una radice dell'equazione soddisfa la condizione associata

$$(m+1)x^2 - (2m^2 + 2m + 1)x + 2m = 0 \quad , \quad 0 \leq x \leq 4$$

Condizione per l'esistenza delle radici

$$\Delta = 4m^4 + 8m^3 - 4m + 1 = (2m^2 + 2m - 1)^2 \geq 0 \Rightarrow \forall m$$

L'equazione ammette sempre 2 radici reali eccetto che nei punti

$$2m^2 + 2m - 1 = 0 \Rightarrow m_1 = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \cong 0.37 \quad , \quad m_2 = \frac{-\sqrt{3}-1}{2} \cong -1.37$$

dove ha una sola radice reale

Segno dei coefficienti

$$a = m+1 > 0 \Rightarrow m > -1$$

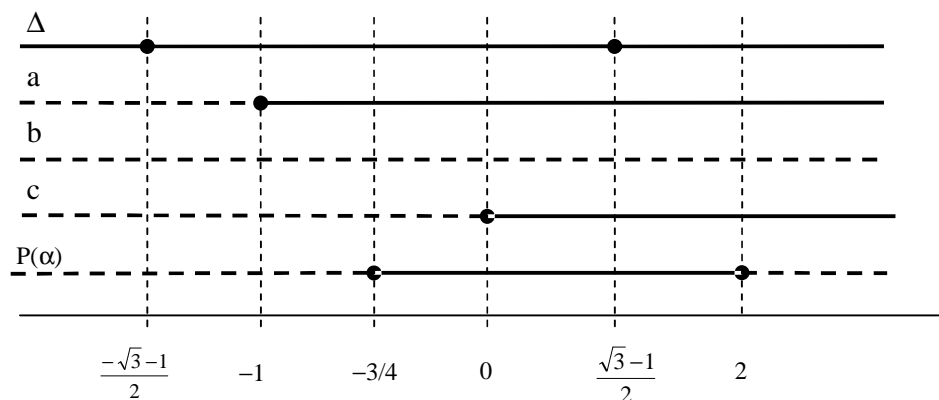
$$b = -(2m^2 + 2m + 1) > 0 \Rightarrow \{0\} \Rightarrow \text{(sempre negativo)}$$

$$c = 2m > 0 \Rightarrow m > 0$$

Segno del polinomio per  $\alpha = 4$

$$P(4) = -2(4m^2 - 5m - 6) > 0 \Rightarrow -3/4 < m < 2$$

Costruiamo il grafico dei segni



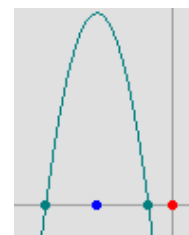
Il grafico mostra che l'asse  $m$  è diviso in 5 intervalli principali che danno origine ai seguenti casi

1)  $m < -1$  con  $m \neq \frac{-\sqrt{3}-1}{2}$

$$\Delta > 0 \Rightarrow \text{radici reali e distinte}$$

$$\text{signi } (a, b, c) = (-, -, -) \Rightarrow 2 \text{ permanenze} \Rightarrow 2 \text{ radici negative}$$

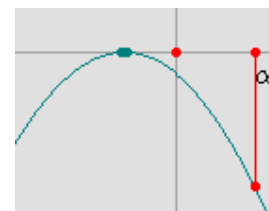
Nessuna radice soddisfa il vincolo  $x \geq 0$



se  $m = (-\sqrt{3}-1)/2$ , l'equazione ammette una sola radice data da

$$x = -\frac{b}{2a} = -\sqrt{3}-1 \cong -2.73$$

Quindi anche in questo caso la radice non soddisfa il vincolo  $x \geq 0$



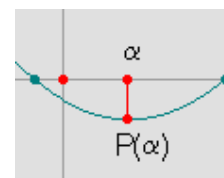
2)  $-1 < m < -3/4$

$\Delta > 0 \Rightarrow$  radici reali e distinte

segni (a, b, c) = (+, -, -)  $\Rightarrow$  1 variazione  $\Rightarrow$  1 radice positiva

$a \cdot P(a) < 0 \Rightarrow$  il punto  $\alpha = 4$  è interno all'intervallo delle radici

Quindi nessuna radice soddisfa il vincolo  $0 \leq x \leq 4$



3)  $-3/4 < m < 0$

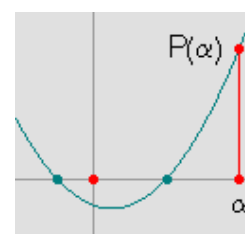
$\Delta > 0 \Rightarrow$  radici reali e distinte

segni (a, b, c) = (+, -, -)  $\Rightarrow$  1 variazione  $\Rightarrow$  1 radice positiva

$a \cdot P(a) > 0 \Rightarrow$  il punto  $\alpha = 4$  è esterno all'intervallo delle radici

Poiché una radice è negativa,  $\alpha$  si trova senz'altro alla destra dell'intervallo.

Quindi solo la radice positiva soddisfa il vincolo  $0 \leq x \leq 4$



3)  $0 < m < 2$  con  $m \neq (\sqrt{3}-1)/2$

$\Delta > 0 \Rightarrow$  radici reali e distinte

segni (a, b, c) = (+, -, +)  $\Rightarrow$  2 variazioni  $\Rightarrow$  2 radici positive

$a \cdot P(a) > 0 \Rightarrow$  il punto  $\alpha = 4$  è esterno all'intervallo delle radici

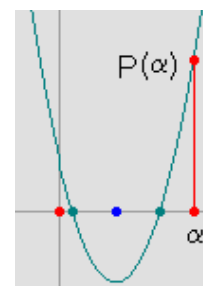
Per sapere se è esterno a destra o a sinistra si deve esaminare il punto medio delle radici

$$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{b}{2a} = \frac{2m^2 + 2m + 1}{2(m+1)}$$

Scegliamo un valore m a piacere nell'intervallo.

Ad esempio prendendo  $m = 1$  il valore medio diventa  $5/4$ , che è minore di 2.

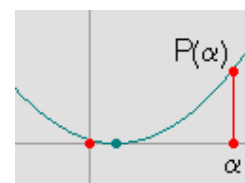
Quindi il punto  $\alpha = 4$  si trova esterno a destra delle radici, ed entrambe le radici soddisfano la condizione richiesta  $0 \leq x \leq 4$



se  $m = (\sqrt{3}-1)/2$  l'equazione ammette una sola radice data da

$$x = -\frac{b}{2a} = \sqrt{3}-1 \cong 0.73$$

Quindi anche in questo caso la radice soddisfa il vincolo  $0 \leq x \leq 4$



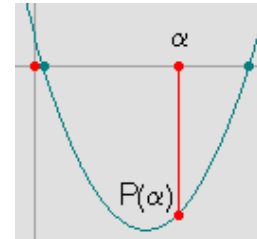
5)  $m > 2$

$\Delta > 0 \Rightarrow$  radici reali e distinte

segni  $(a, b, c) = (+, -, +) \Rightarrow 2$  variazioni  $\Rightarrow 2$  radici positive

$a \cdot P(a) < 0 \Rightarrow$  il punto  $\alpha = 4$  è interno all'intervallo delle radici

Solo la radice minore soddisfa il vincolo  $0 \leq x \leq 4$



8 Agosto 2005