Fattorizzazione di polinomi di 4 grado

Quadrato di un trinomio

Un quadrato di un trinomio genera in generale un polinomio di 5 grado

$$(ax^2+bx+c)^2=a^2x^4+2ab\,x^3+(b^2+2ac)\,x^2+2bc\,x+c^2$$

Un polinomio di 4 grado

$$a_4x^4+a_3\,x^3+a_2\,x^2+a_1\,x+a_0$$

è un quadrato di un trinomio se si verificano le seguenti condizioni

1. a_4 è un quadrato perfetto $a=\sqrt{a_4}$
2. a_0 è un quadrato perfetto $c=\sqrt{a_0}$
3. i rapporti a_3/a e a_1/c sono uguali, avendo $2b=a_3/a=a_1/c$
4. il termine centrale a_2 verifica l'uguaglianza $a_2=b^2+2ac$

In pratica le ricerca e verifica di un quadrato di trinomio si effettua con il seguente algoritmo
Disposizione dei coefficienti in tabella

a_4	a_3	a_2	a_1	a_0

calcolo delle radici quadrate $a=\sqrt{a_4}$ e $c=\sqrt{a_0}$

a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
a				c

calcolo delle rapporti a_3/a e a_1/c. Se sono uguali ma segno opposto, si cambia il segno di c

a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
	a_3 / a		a_1 / c	
a				c

Calcolo del coefficiente b = (a_3 / a)/2 = (a_1 / c)/2, come metà dei rapporti calcolati

a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
	a_3 / a		a_1 / c	
a		b		c

da ultimo facciamo la verifica $a_2 = b^2+2\,a\,c$
I valori a, b, c sono i coefficienti del trinomio $(ax^2 + bx + c)^2$

Vediamo qualche esempio

$4x^4+8x^3-4x+1$

4	8	0	-4	1
	4		4	
2		2		-1

verifica

$2^2+2\cdot 2\cdot(-1) = 0$

$(2x^2+2x-1)^2$

$x^4-2x^3-x^2+2x+1$

1	-2	-1	2	1
	-2		-2	
1		-1		-1

verifica

$(-1)^2+2\cdot 1\cdot(-1) = -1$

$(x^2-x-1)^2$

$4x^4+12x^3+17x^2+12x+4$

4	12	17	12	4
	6		6	
2		3		2

verifica

$3^2+2\cdot 2\cdot 2 = 17$

$(2x^2+3x+2)^2$

$9x^4-18x^3-21x^2+30x+25$

9	-18	-21	30	25
	-6		-6	
3		-3		-5

verifica

$(-3)^2+2\cdot 3\cdot(-5) = -21$

$(3x^2-3x-5)^2$

$x^4-6x^3+13x^2-12x+4$

1	-6	13	-12	4
	-6		-6	
1		-3		2

verifica

$(-3)^2+2\cdot 2\cdot 1 = 13$

$(x^2-3x+2)^2$

$4x^4-12x^3+13x^2-6x+1$

4	-12	13	-6	1
	-6		-6	
2		-3		1

verifica

$(-3)^2+2\cdot 2\cdot 1 = 13$

$(2x^2-3x+1)^2$

$x^4+10x^3+21x^2-20x+4$

1	10	21	-20	4
	10		10	
1		5		-2

verifica

$5^2+2\cdot 1\cdot(-2) = 21$

$(x^2+5x-2)^2$

$625x^4+500x^3-40x+4$

625	500	0	-40	4
	20		20	
25		10		-2

verifica

$10^2+2\cdot 25\cdot(-2) = 0$

$(25x^2+10x-2)^2$

$9x^4-30x^3+x^2+40x+16$

9	-30	1	40	16
	-10		-10	
3		-5		-4

verifica

$(-5)^2+2\cdot 3\cdot(-4) = 1$

$(3x^2-5x-4)^2$

$x^4+12x^3-216x+324$

1	12	0	-216	324
	12		12	
1		6		-18

verifica

$6^2+2\cdot 1\cdot(-18) = 0$

$(x^2+6x-18)^2$

Differenza di 2 quadrati

Un polinomio di 4 grado con solo i termini pari

$$a_4x^4 + a_2\ x^2 + a_0$$

può essere fattorizzato nel prodotto di due trinomi se si verifica

1. a_4 è un quadrato perfetto $a = \sqrt{a_4}$
2. a_0 è un quadrato perfetto $c = \sqrt{a_0}$
3. $2ac - a_2$ è un quadrato perfetto $b = \sqrt{2ac - a_2}$

allora, aggiungendo e togliendo b^2x^2 , il polinomio si scompone in:

$$a_4x^4 + a_2\ x^2 + a_0 = (ax^2 + bx + c)(ax^2 - bx + c)$$

esempio: $x^4 + 16x^2 + 256$

aggiungendo e togliendo $16x^2$, che è un quadrato, il polinomio si trasforma in

$x^4 + 16x^2 + 256 = x^4 + 16x^2 + 256 + 16x^2 - 16x^2 = \ x^4 + 32x^2 + 256 - 16x^2 = (x^2 + 16)^2 - 16x^2$

Ma l'ultima espressione è la differenza di due quadrati, quindi

$(x^2 + 16)^2 - 16x^2 = \left((x^2 + 16) + 4x\right) \cdot \left((x^2 + 16) - 4x\right) = \ (x^2 + 4x + 16)(x^2 - 4x + 16)$

esempio: $4x^4 - 32x^2 + 1$

aggiungendo e togliendo $36x^2$, che è un quadrato, il polinomio si trasforma in

$4x^4 - 32x^2 + 1 + 36x^2 - 36x^2 = 4x^4 + 4x^2 + 1 - 36x^2 = (2x^2 + 1)^2 - 36x^2 =$

$\left((2x^2 + 1) + 6x\right) \cdot \left((2x^2 + 1) - 6x\right) = (2x^2 + 6x + 1)(2x^2 - 6x + 1)$

esempio: $25x^4 + 104x^2 + 144$

aggiungendo e togliendo $16x^2$, che è un quadrato, il polinomio si trasforma in

$25x^4 + 104x^2 + 144 + 16x^2 - 16x^2 = 25x^4 + 120x^2 + 144 - 16x^2 = (5x^2 + 12)^2 - 16x^2 =$

$\left((5x^2 + 12) + 4x\right) \cdot \left((5x^2 + 12) - 4x\right) = (5x^2 + 4x + 12)(5x^2 - 4x + 12)$