ESPONENZIALI SENZA LOGARITMI

Esercizi risolti - Classi quarte

La presente dispensa riporta la risoluzione di alcuni esercizi, tratti dal testo di *Lamberti, vol.*1 *nuova edizione*, inerenti:

- equazioni esponenziali
- disequazioni esponenziali

senza l'uso dei logaritmi.
Per i richiami di teoria si veda la relativa dispensa.

Equazioni con sostituzione

Es.77, pag.275

$$\boxed{13 \cdot 3^{1+x} - 3^{3-x} - \frac{13}{3^x} + 1 = 0}$$

Dissociamo gli esponenti:

$$13 \cdot 3^x \cdot 3 - \frac{3^3}{3^x} - \frac{13}{3^x} + 1 = 0$$

Facciamo ora denominatore comune:

$$\frac{39 \cdot 3^x \cdot 3^x - 27 - 13 + 1 \cdot 3^x}{3^x} = 0$$

Eliminando il denominatore che non è mai nullo (e quindi sono superflue le C.E.), l'equazione diviene

$$39 \cdot 3^{2x} - 27 - 13 + 3^x = 0 \Rightarrow 39 \cdot 3^{2x} + 3^x - 40 = 0$$

Ponendo ora $t = 3^x$ e quindi $t^2 = 3^{2x}$ si deve risolvere loa seguente equazione algebrica di secondo grado: $39t^2 + t - 40$. Essa, risolta coi metodo usuali, dà:

$$t_1 = -\frac{80}{78}, \quad t_2 = 1$$

Scartando subito t_1 che è negativa e quindi darebbe luogo ad un'equazione esponenziale elementare impossibile, non resta che concludere che

$$3^x = 1 \Rightarrow x = 0$$

Es.78, pag.275

$$\boxed{4^{2-x} - 5 \cdot 2^{1-x} + 1 = 0}$$

Dissociamo gli esponenti:

$$\frac{16}{2^{2x}} - \frac{5 \cdot 2}{2^x} + 1 = 0$$

Facciamo ora denominatore comune: il denominatore è 2^{2x}, visto che il fattore 2^x è in esso contenuto.

$$\frac{16 - 10 \cdot 2^x + 2^{2x}}{2^{2x}} = 0$$

Eliminando il denominatore che non è mai nullo (e quindi sono superflue le C.E.), l'equazione diviene

$$16 - 10 \cdot 2^x + 2^{2x} = 0$$

Ponendo ora $t = 2^x$ e quindi $t^2 = 2^{2x}$ si deve risolvere loa seguente equazione algebrica di secondo grado: $t^2 - 10t + 16 = 0$. Essa, risolta coi metodo usuali, dà:

$$t_1 = 8, \quad t_2 = 2$$

Quindi:

$$2^x = 8 \Rightarrow x = 3, \quad 2^x = 2 \Rightarrow x = 1$$

Es.79, pag.275

$$\boxed{\frac{3 \cdot 3^x + 3^{2-x} - 4}{3^x} = \frac{8}{3}}$$

Riduciamo allo stesso denominatore $3 \cdot 3^x$:

$$9 \cdot 3^x + 3 \cdot 3^{2-x} - 12 = 8 \cdot 3^x$$

Dissociamo gli esponenti:

$$9 \cdot 3^x + \frac{3 \cdot 3^2}{3^x} - 12 = 8 \cdot 3^x$$

Facciamo ancora denominatore comune:

$$9 \cdot 3^{2x} + 27 - 12 \cdot 3^x - 8 \cdot 3^{2x} = 0$$

Riducendo i termini simili:

$$3^{2x} - 12 \cdot 3^x + 27 = 0$$

Sosituiamo $t = 3^x$, avendo:

$$t^2 - 12t + 27 = 0$$

equazione quadratica che fornisce le soluzioni: $t = 9,\ t = 3$ e quindi:

$$3^x = 9 \Rightarrow x = 2, \quad 3^x = 3 \Rightarrow x = 1$$

Es.81, pag.275

$$\boxed{\frac{5^{4x-1}}{5^{x-1}} - \frac{5^{3x}}{5^{x-1}} - \frac{5^{1-x}}{5^{1-2x}} + 5 = 0}$$

Applichiamo subito le proprietà delle potenze, cosicchè la nostra equazione diviene:

$$5^{4x-1-x+1} - 5^{3x-x+1} - 5^{1-x-1+2x} + 5 = 0 \Rightarrow 5^{3x} - 5^{2x+1} - 5^x + 5 = 0$$

Dissociamo ora gli esponenti:

$$5^{3x} - 5 \cdot 5^{2x} - 5^x + 5 = 0$$

Sostituiamo $5^x = t,\ 5^{2x} = t^2,\ 5^{3x} = t^3$, e quindi dobbiamo risolvere:

$$t^3 - 5t^2 - t + 5 = 0$$

Questa equazione di terzo grado si risolve con l'aiuto della regola di Ruffini ed ammette come soluzioni:

$$t = 5, \quad t = \pm 1$$

Scartando la soluzione negativa, non resta che concludere che:

$$5^x = 5 \Rightarrow x = 1, \quad 5^x = 1 \Rightarrow x = 0$$

Es.

$$\boxed{2^{5x+2} + 2^{5x+8} - 32^{x+1} = 912}$$

Dissociamo gli esponenti:

$$2^{5x} \cdot 4 + 2^{5x} \cdot 256 - 2^{5x} \cdot 32 = 912$$

Sommiamo i termini simili, ossia raccogliamo il fattore comune 2^{5x}:

$$2^{5x} \cdot (4 + 256 - 32) = 912 \Rightarrow 2^{5x} \cdot 228 = 912 \Rightarrow 2^{5x} = \frac{912}{228} \Rightarrow 2^{5x} = 4$$

L'ultima equazione dà:

$$2^{5x} = 2^2 \Rightarrow 5x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{5}$$

Es.80, pag.275

$$\boxed{5^{1+\sqrt{x}} + 5^{1-\sqrt{x}} = 10}$$

Dissociando gli esponenti:

$$5^{\sqrt{x}} \cdot 5 + \frac{5}{5^{\sqrt{x}}} = 10$$

Facendo denominatore comune, notiamo che $5^{\sqrt{x}} \cdot 5^{\sqrt{x}} = 5^x$, quindi l'equazione diviene:

$$5 \cdot 5^x + 5 - 10 \cdot 5^{\sqrt{x}} = 0$$

Se ora sostituiamo $5^{\sqrt{x}} = t$, notiamo che $5^x = t^2$, quindi:

$$5t^2 - 10t + 5 = 0 \Rightarrow t^2 - 2t + 1 = 0$$

L'ultima equazione quadratica dà la doppia soluzione $t = 1$, per cui:

$$5^{\sqrt{x}} = 1 \Rightarrow \sqrt{x} = 0 \Rightarrow x = 0$$

Es. 91, pag. 276

$$\boxed{e^{2x} + e^x - 2 = 0}$$

La presenza della base naturale e non deve spaventare, visto che si tratta di un numero reale qualunque, positivo. Possiamo direttamente sostituire $e^x = t$, $e^{2x} = t^2$, quindi:

$$t^2 + t - 2 = 0 \Rightarrow t_1 = -2, \quad t_2 = 1$$

Scartiamo la soluzione negativa, in quanto darebbe luogo all'equazione $e^x = -2$ che è impossibile. Non resta che concludere che:

$$e^x = 1 \Rightarrow e^x = e^0 \Rightarrow x = 0$$

Equazioni esponenziali con basi diverse

Es. 67, pag. 275

$$\boxed{5 \cdot 3^{x-1} - 3 \cdot \frac{5^{2x-1}}{5^x} = 0}$$

Iniziamo applicando le proprietà delle potenze: $\dfrac{5^{2x-1}}{5^x} = 5^{2x-1-x} = 5^{x-1}$, quindi l'equazione si scrive:

$$5 \cdot 3^{x-1} - 3 \cdot 5^{x-1} = 0$$

Osserviamo qui esponenziali di basi diverse, ma con lo stesso esponente: nel nostro caso, 3 e 5 sono le basi diverse e l'esponente comune è $x-1$. Il segreto per giungere alla soluzione è scegliere una delle due basi e procedere ad una divisione. Nel nostro caso scegliamo la base 5 e quindi andiamo a dividere tutti i termini dell'equazione per 5^{x-1}:

$$5 \cdot \frac{3^{x-1}}{5^{x-1}} - 3 \cdot \frac{5^{x-1}}{5^{x-1}} = 0$$

Ricordiamo ora la proprietà delle potenze:

$$a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x, \quad \frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$$

Nel nostro caso si avrà:

$$5 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{x-1} - 3 = 0$$

Dividiamo ancora per 5:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{x-1} = \frac{3}{5}$$

Abbiamo, in altri termini, trasformato l'equazione in base 3/5. Ora la soluzione è agevole:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{x-1} = \frac{3}{5} \Rightarrow x-1=1 \Rightarrow x=2$$

Es.68, pag.275

$$\boxed{3 \cdot 3^{2x} + 7^{2x+1} = 3^{2x+2} + 7^{2x}}$$

Qui dissociamo prima gli esponenti:

$$3 \cdot 3^{2x} + 7^{2x} \cdot 7 = 3^{2x} \cdot 9 + 7^{2x}$$

Sommiamo i termini simili ed otteniamo:

$$-6 \cdot 3^{2x} + 6 \cdot 7^{2x} = 0 \Rightarrow 3^{2x} = 7^{2x}$$

Dividiamo ambo i membri per 7^{2x}, avendo:

$$\left(\frac{3}{7}\right)^{2x} = 1 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

visto che $1 = (3/7)^0$, come sempre.

Disequazioni esponenziali

Es. 135, pag.279

$$\boxed{\frac{7^{2x} - 7^x}{7^{2x} + 7^x} \geq 0}$$

Si tratta di una disequazione fratta, per cui studiamo separatamente numeratore e denominatore e poi eseguiamo il prodotto dei segni.

- $N(x) : 7^{2x} - 7^x \geq 0 \Rightarrow 7^{2x} \geq 7^x \Rightarrow 2x \geq x \Rightarrow x \geq 0$
- $D(x) : 7^{2x} + 7^x > 0 \Rightarrow 7^{2x} > -7^x$. In proposito a questa ultima disequazione notiamo che stiamo vedendo quando un esponenziale (7^{2x}) è maggiore di un numero che è sempre negativo (7^x è sempre positivo, ma se lo si moltiplica per il coefficiente -1 diviene negativo $\forall x$). La condizione è sempre verificata: un numero positivo è sempre maggiore di uno negativo, per cui il denominatore è positivo $\forall x \in \mathbb{R}$

Eseguendo il prodotto dei segni, ricordandosi di prendere gli intervalli di positività, la soluzione sarà

$$x \geq 0$$

Es. 137, pag.279

$$\boxed{\frac{e^{2x}}{e^x - 1} < 0}$$

Si tratta di una disequazione fratta, per cui studiamo separatamente numeratore e denominatore e poi eseguiamo il prodotto dei segni.

- $N(x) : e^{2x} > 0$. Si tratta di una disequazione sempre verificata, visto che stiamo vedendo quando un esponenziale è positivo, cosa che accade $\forall x$.
- $D(x) : e^x - 1 > 0 \Rightarrow e^x > 1 \Rightarrow e^x > e^0 \Rightarrow x > 0$.

Eseguendo il prodotto dei segni, ricordandosi di prendere gli intervalli di negatività, la soluzione sarà

$$x < 0$$

N.B.: Non confondere $e^x - 1$ con e^{x-1}!!!

Es. 133, pag.204

$$\boxed{\frac{8 - 2^x}{2^{x+1}} \leq 0}$$

Si tratta di una disequazione fratta, per cui studiamo separatamente numeratore e denominatore e poi eseguiamo il prodotto dei segni.

- $N(x) : 8 - 2^x \geq 0 \Rightarrow 2^3 \geq 2^x \Rightarrow 3 \geq x \Rightarrow x \leq 3$.
- $D(x) : 2^{x-1} > 0$. Si tratta di una disequazione sempre verificata, visto che stiamo vedendo quando un esponenziale è positivo, cosa che accade $\forall x$.

Eseguendo il prodotto dei segni, ricordandosi di prendere gli intervalli di positività, la soluzione sarà

$$x \geq 3$$

N.B.: anche in tal caso è necessario non confondere 2^{x-1}, che è sempre positivo, con $2^x - 1$, che invece è positivo solo per $x > 0$!!

Es. 139, pag.279

$$\boxed{\frac{4^x - 1}{x - 1} \leq 0}$$

Si tratta di una disequazione fratta, per cui studiamo separatamente numeratore e denominatore e poi eseguiamo il prodotto dei segni.

- $N(x) : 4^x - 1 \geq 0 \Rightarrow 4^x \geq 1 \Rightarrow 4^x \geq 4^0 \Rightarrow x \geq 0$.
- $D(x) : x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1$.

Eseguendo il prodotto dei segni, ricordandosi di prendere gli intervalli di negatività, la soluzione sarà

$$0 \leq x < 1$$

N.B.: anche in tal caso è necessario non confondere $4^x - 1$ con 4^{x-1}!!

Es. 135, pag.204

$$\boxed{\frac{e^{x+1}-e^x}{e^{5x}-1} \leq 0}$$

Si tratta di una disequazione fratta, per cui studiamo separatamente numeratore e denominatore e poi eseguiamo il prodotto dei segni.

- $N(x): e^{x+1}-e^x \geq 0 \Rightarrow e^{x+1} \geq e^x \Rightarrow x+1 \geq x \Rightarrow 1 \geq 0$. Tale ultima scrittura è sempre vera (si chiama tautologia), per cui il numeratore risulta positivo $\forall x \in \mathbb{R}$.
- $D(x): e^{5x}-1 > 0 \Rightarrow e^{5x} > 1 \Rightarrow e^{5x} > e^0 \Rightarrow 5x > 0 \Rightarrow x > 0$.

Eseguendo il prodotto dei segni, ricordandosi di prendere gli intervalli di negatività, la soluzione sarà

$$x < 0$$

N.B.: anche in tal caso è necessario non confondere $e^{5x}-1$ con e^{5x-1}!!

Es. 141, pag.279

$$\boxed{\frac{9^x+3^x}{3^{2x}-1} < 0}$$

Si tratta di una disequazione fratta, per cui studiamo separatamente numeratore e denominatore e poi eseguiamo il prodotto dei segni.

- $N(x): 9^x+3^x > 0 \Rightarrow 9^x > -3^x$. Qui stiamo vedendo quando un esponenziale (9^x) è maggiore di un numero che è sempre negativo (3^x è sempre positivo, ma se lo si moltiplica per il coefficiente -1 diviene negativo $\forall x$). La condizione è sempre verificata: un numero positivo è sempre maggiore di uno negativo, per cui il numeratore è positivo $\forall x \in \mathbb{R}$
- $D(x): 3^{2x}-1 > 0 \Rightarrow 3^{2x} > 1 \Rightarrow 3^{2x} > 3^0 \Rightarrow 2x > 0 \Rightarrow x > 0$.

Eseguendo il prodotto dei segni, ricordandosi di prendere gli intervalli di negatività, la soluzione sarà

$$x < 0$$

N.B.: anche in tal caso è necessario non confondere $3^{2x}-1$ con 3^{2x-1}!!

Es. 167, pag.280

$$\boxed{(2^x-8)\cdot(2^{2x}-3\cdot 2^{x+1}+8) \geq 0}$$

Si tratta di una disequazione fattorizzata, per cui studiamo separatamente i due fattori e poi eseguiamo il prodotto dei segni.

N.B.: E' DELETERIO e INUTILE procedere alla moltiplicazione: se la disequazione è già fattorizzata, va lasciata tale, evitando la classica *complicazione degli affari semplici*!

- Primo fattore: $2^x-8 > 0 \Rightarrow 2^x > 2^3 \Rightarrow x > 3$.
- Secondo fattore:$2^{2x}-3\cdot 2^{x+1}+8 \geq 0$. Dissociamo gli esponenti:

  $$2^{2x}-3\cdot 2^x\cdot 2^1+8 \geq 0 \Rightarrow 2^{2x}-6\cdot 2^x+8 \geq 0$$

  Sostituiamo: $2^x = t$, quindi: $t^2-6t+8 \geq 0 \Rightarrow t \leq 2,\ t \geq 4$. Quindi si ha che $2^x \leq 2 \Rightarrow x \leq 1,\quad 2^x \geq 4 \Rightarrow x \geq 2$.

Eseguendo il prodotto dei segni, ricordandosi di prendere gli intervalli di negatività, la soluzione sarà:

$$1 \leq x \leq 2, \quad x \geq 3$$

Es.142, pag.279

$$\boxed{\left(5^{3x}-5^{2x}\right)\cdot\left(e^{1/x}-e^{2}\right)\leq 0}$$

Si tratta di una disequazione fattorizzata, per cui studiamo separatamente i due fattori e poi eseguiamo il prodotto dei segni.

N.B.: E' DELETERIO e INUTILE procedere alla moltiplicazione: se la disequazione è già fattorizzata, va lasciata tale, evitando la classica *complicazione degli affari semplici*!

- Primo fattore: $5^{3x}-5^{2x}\geq 0 \Rightarrow 5^{3x}\geq 5^{2x}\geq 0 \Rightarrow 5x\geq 2x \Rightarrow x\geq 0$.
- Secondo fattore:$e^{1/x}-e^{2}\geq 0 \Rightarrow e^{1/x}\geq e^{2} \Rightarrow \frac{1}{x}\geq 2$.

  Quest'ultima è una disequazione fratta, che in forma normale risulta essere:

  $$\frac{1}{x}-2\geq 0 \Rightarrow \frac{1-2x}{x}\geq 0$$

  Essa deve essere risolta studiando separatamente il segno del numeratore e del denominatore. La soluzione, facilmente, sarà

  $$0\leq x\leq \frac{1}{2}$$

Eseguendo il prodotto dei segni, ricordandosi di prendere gli intervalli di negatività, la soluzione sarà:

$$x\geq \frac{1}{2}$$

Es.163, pag.279

$$\boxed{30\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{x/2}-27\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{x}-8\leq 0}$$

Evidentemente, qui basta porre:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{x/2}=t,\quad \left(\frac{2}{3}\right)^{x}=t^2$$

visto che $x=2\cdot\frac{x}{2}$. Con tale posizione, la disequazione diviene:

$$30t-27t^2-8\leq 0 \Rightarrow 27t^2-30t+8\geq 0$$

La soluzione, per valori esterni, dà:

$$t\leq\frac{4}{9},\quad t\geq\frac{2}{3}$$

Quindi, non resta che risolvere le due disequazioni elementari:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{x/2}\leq\frac{4}{9},\quad \left(\frac{2}{3}\right)^{x/2}\geq\frac{2}{3}$$

Per la risoluzione è FONDAMENTALE osservare che la base è $2/3<1$, quindi è necessario considerare la disequazione inversa per gli esponenti. Ovviamente $\frac{4}{9}=\left(\frac{2}{3}\right)^{2}$, per cui:

- $\left(\frac{2}{3}\right)^{x/2}\leq\left(\frac{2}{3}\right)^{2} \Rightarrow \frac{x}{2}\geq 2 \Rightarrow x\geq 4$
- $\left(\frac{2}{3}\right)^{x/2}\geq\frac{2}{3} \Rightarrow \frac{x}{2}\leq 1 \Rightarrow x\leq 1$

Le soluzioni sono allora:

$$x\leq 1,\quad x\geq 4$$

Es. 150, pag.279

$$\boxed{\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{x-1} - 1}{\sqrt{2} - \sqrt[3]{2^{x-1}}} < 0}$$

Si tratta di una disequazione fratta, per cui studiamo separatamente numeratore e denominatore e poi eseguiamo il prodotto dei segni.

- $N(x) : \left(\frac{2}{3}\right)^{x-1} - 1 > 0 \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{x-1} > 1$ Trattandosi, come abbiamo visto, di una base $2/3 < 1$, la disuguaglianza fra gli esponenti va invertita, per cui, essendo ovviamente $1 = \left(\frac{2}{3}\right)^{0}$, si avrà che

$$x - 1 < 0 \Rightarrow x < 1$$

- $D(x) : \sqrt{2} - \sqrt[3]{2^{x-1}} > 0 \Rightarrow 2^{1}2 > 2^{(x-1)/3}$. Qui la base è $2 > 1$, per cui si può trasferire la stessa disuguaglianza fra gli esponenti, avendo:

$$\frac{1}{2} > \frac{x-1}{3} \Rightarrow x < \frac{5}{2}$$

Eseguendo il prodotto dei segni, ricordandosi di prendere gli intervalli di negatività, la soluzione sarà

$$1 < x < \frac{5}{2}$$