

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI ROMA
TOR VERGATA



Tor Vergata

FACOLTA' DI INGEGNERIA

LAUREA SPECIALISTICA IN INGEGNERIA INFORMATICA

Modellistica di Impianti e Sistemi 2

Sviluppo di un tool software per definire e
risolvere reti di code con blocco

DOCENTE :

Prof. Vittoria De Nitto Personè

STUDENTE :

**Marco Brunamonti
Francesco Langella
Paolo Palana
Mario Sabatino**

ANNO ACCADEMICO 2006/2007

Indice

| | |
|-----------------------------|----|
| Probabilità di blocco | 3 |
| Tempo di Residenza..... | 9 |
| Conclusioni..... | 16 |
| Prove di esecuzione..... | 24 |

Probabilità di blocco

Per prima cosa si è studiato l'andamento delle probabilità di blocco dei vari centri al variare delle capacità massime di ciascun centro.

CASO $B_1=5$ $B_2=5$ $B_3=5$

| N | Centro 1 | Centro 2 | Centro 3 |
|----|----------|----------|----------|
| 1 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 |
| 2 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 |
| 3 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 |
| 4 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 |
| 5 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 |
| 6 | 0,0005 | 0,0053 | 0,3385 |
| 7 | 0,0007 | 0,0113 | 0,4653 |
| 8 | 0,0007 | 0,0242 | 0,4946 |
| 9 | 0,0008 | 0,0542 | 0,5017 |
| 10 | 0,0013 | 0,1141 | 0,5035 |
| 11 | 0,0099 | 0,6700 | 0,5050 |
| 12 | 0,0199 | 0,6733 | 0,5100 |
| 13 | 0,0403 | 0,6801 | 0,5201 |
| 14 | 0,0827 | 0,6942 | 0,5414 |

Tabella 1. Probabilità di blocco dei centri al variare di N

E' sopra riportata la tabella con i valori della probabilità di blocco di ciascun centro al variare del numero di job nella rete.

La prima cosa da notare è che quando ci sono meno di 5 job la probabilità di blocco è zero per ciascun centro. Questo è un risultato largamente atteso, perché il numero di job complessivi che circola nella rete è minore della più piccola capacità dei centri della rete. Di conseguenza nessun centro arriva a saturazione, e quindi nessun altro centro potrà bloccarsi.

Per analizzare meglio il comportamento delle probabilità di blocco, quando ci sono più di 5 job, possiamo utilizzare il Grafico 1 che si riferisce alla Tabella 1.

Si può notare che appena introduciamo il sesto job, la probabilità di blocco del centro 3 sale notevolmente. Questo fatto è dovuto alla lentezza del centro 1, che avendo un tasso di servizio minore degli altri due nodi, ha maggiore probabilità di saturarsi. Quindi il centro 3 ha una rilevante probabilità di trovare il centro 1 saturo, quando finisce di processare il suo job.

La probabilità di blocco del centro 3 aumenta sensibilmente per $6 \leq N \leq 8$. Dopo continua a crescere più lentamente.

Il centro 1 invece ha probabilità di blocco prossima allo 0 per $N \leq 10$. Ciò è dovuto al fatto che il destinatario del centro 1, ossia il centro 2, ha poca probabilità di essere saturo. A sua volta questo dipende dal fatto che il centro 2 si libera velocemente dei suoi job, essendo il suo tasso di servizio tre volte maggiore di quello del centro 1.

555 con blocco

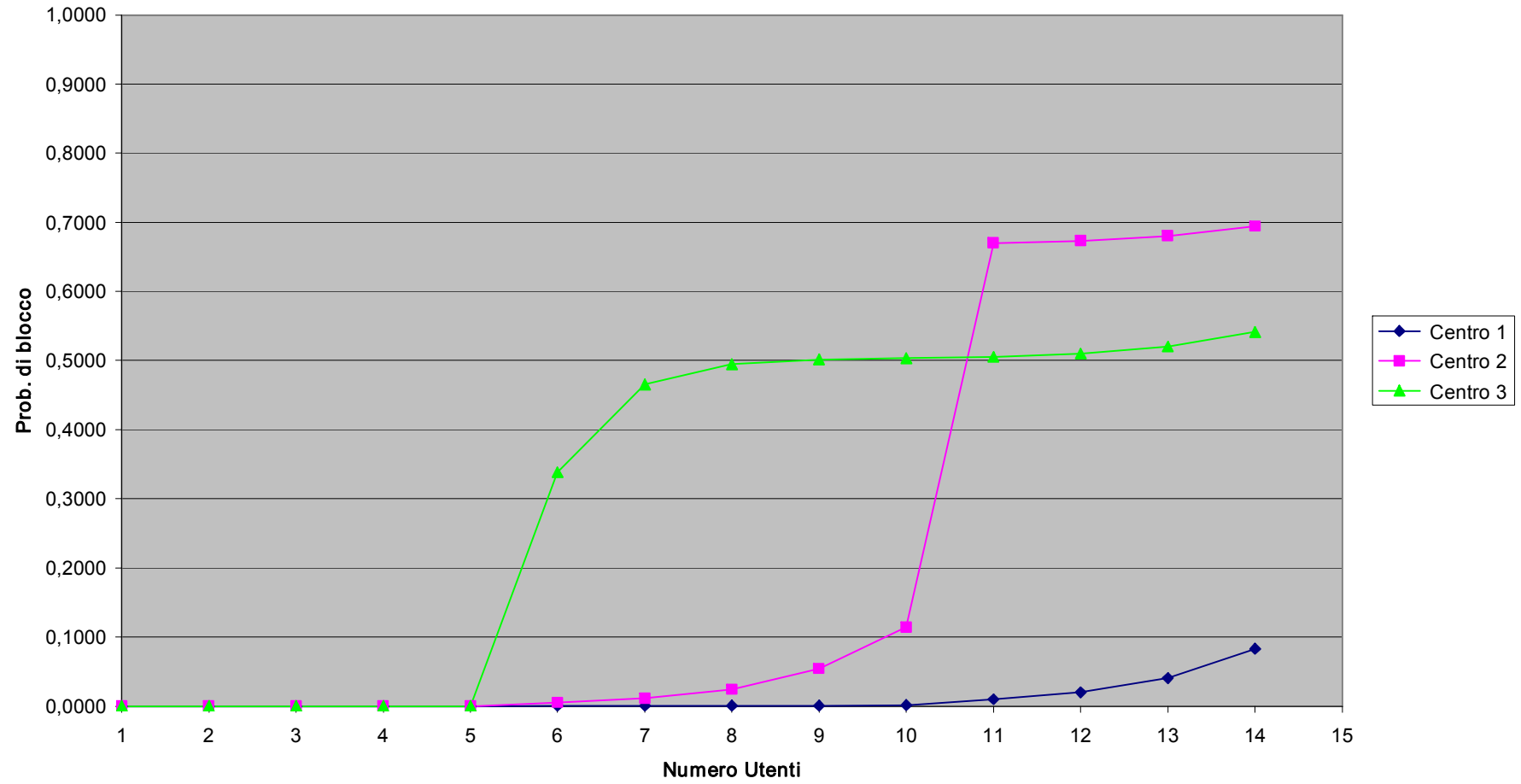


Grafico1.

Consideriamo ora il centro 2. Per $6 \leq N \leq 10$, la sua probabilità di blocco è molto più bassa rispetto a quella del centro 3. Ciò dipende ovviamente dalla distribuzione dei job nei vari centri. Il primo centro che tende a saturarsi è il centro 1, al crescere di N i job tendono ad accumularsi anche sul centro 3, sia per il fatto che è più lento di 2, sia perché è bloccato dal centro 1 e non può smaltire job alla sua velocità. Questo fatto si può verificare vedendo le probabilità marginali per esempio per $N=10$.

| | $N_i=0$ | $N_i=1$ | $N_i=2$ | $N_i=3$ | $N_i=4$ | $N_i=5$ |
|----------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| Centro 1 | 0.0075 | 0.0155 | 0.0314 | 0.0631 | 0.1264 | 0.7561 |
| Centro 2 | 0.5554 | 0.2453 | 0.1108 | 0.0513 | 0.0246 | 0.0126 |
| Centro 3 | 0.0009 | 0.0032 | 0.0117 | 0.0450 | 0.1935 | 0.7457 |

Tabella 2. Probabilità marginali per $N=10$

Si vede che è molto alta la probabilità che siano saturi i centri 1 e 3 (quindi $N_3=5$ e $N_1=5$). Questo d'altra parte implica che sia molto alta la probabilità che il centro 2 sia vuoto. Quindi possiamo concludere che la bassa probabilità di saturazione del centro 2 è dovuta alla sua alta probabilità di essere vuoto.

Ciò risulta più chiaro introducendo l'undicesimo job. In questo caso necessariamente

$$P(N_1=0)=P(N_2=0)=P(N_3=0)=0$$

cioè la probabilità che un centro sia vuoto è uguale a 0. Riportiamo in Tabella 3 le probabilità marginali per $N=11$.

| | $N_i=0$ | $N_i=1$ | $N_i=2$ | $N_i=3$ | $N_i=4$ | $N_i=5$ |
|----------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| Centro 1 | 0.0000 | 0.0217 | 0.0313 | 0.0631 | 0.1263 | 0.7576 |
| Centro 2 | 0.0000 | 0.6932 | 0.1544 | 0.0804 | 0.0411 | 0.0310 |
| Centro 3 | 0.0000 | 0.0020 | 0.0057 | 0.0193 | 0.0652 | 0.9078 |

Tabella 3. Probabilità marginali per $N=11$

La probabilità di saturazione del centro 3 è molto alta. A differenza di prima però nel centro 2 c'è sempre almeno un job. Questo spiega perché la probabilità di blocco del centro 2 aumenta in modo così consistente nel passaggio da $N=10$ a $N=11$.

Ora quando c'è un solo job nel centro 2 (situazione che si verifica per il 69% del tempo, come si vede dalla Tabella 3) gli altri due centri sono sempre saturi. Essendo il centro 2 quello che termina più velocemente si troverà bloccato dal centro 3, che è saturo. Inoltre bisogna considerare gli altri casi in cui il centro 2 ha più di un job e il centro 3 è saturo. Anch'essi contribuiscono alla crescita della probabilità di blocco del centro 2.

Si può arrivare alle stesse conclusioni vedendo le differenti probabilità di stato, per $N=10$ e $N=11$ e per tutti gli stati in cui il centro 2 risulta bloccato.

Quando $N > 10$, le probabilità di blocco di ogni centro continuano a crescere come d'altronde ci si aspetta.

Dal punto di vista qualitativo infatti la situazione per $N=11$ è molto simile a quella per $N=12$, $N=13$, $N=14$. Sostanzialmente al crescere di N , si hanno dei piccoli incrementi della probabilità di blocco di ciascun centro dovuti al fatto che i centri hanno più probabilità di essere saturi.

CASO $B_1=3$ $B_2=7$ $B_3=5$

| N | Centro 1 | Centro 2 | Centro 3 |
|----|----------|----------|----------|
| 1 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 |
| 2 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 |
| 3 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 |
| 4 | 0,0000 | 0,0000 | 0,3540 |
| 5 | 0,0000 | 0,0000 | 0,4792 |
| 6 | 0,0000 | 0,0134 | 0,5074 |
| 7 | 0,0000 | 0,0432 | 0,5140 |
| 8 | 0,0000 | 0,1071 | 0,5155 |
| 9 | 0,0000 | 0,6774 | 0,5159 |
| 10 | 0,0002 | 0,6775 | 0,5159 |
| 11 | 0,0008 | 0,6776 | 0,5164 |
| 12 | 0,0034 | 0,6781 | 0,5171 |
| 13 | 0,0403 | 0,6801 | 0,5201 |
| 14 | 0,0827 | 0,6942 | 0,5414 |

Tabella 4

La Tabella 4 riporta l'andamento della probabilità di blocco.

L'andamento generale è qualitativamente molto simile a quello del caso precedente. Ovviamente cambiano i valori "importanti" di N rispetto ai quali si hanno cambiamenti significativi per le probabilità di blocco.

Nel caso precedente dove la capacità del centro 1 era uguale a 5, la probabilità di blocco del centro 3 cresceva non appena $N=6$. Ovviamente la lentezza del centro 1 fa sì che i job in circolo nella rete tendano ad accumularsi nella sua coda. In questo caso la capacità del centro 1 è uguale a 3, e già per $N=4$, si nota che c'è una buona probabilità che esso sia saturo (vedendo le probabilità marginali, di cui non riportiamo la tabella per brevità, si vede che $P(N_1=3)=0,649$; si fa notare che la probabilità di saturazione del centro 1 per $N=3$ è ininfluente perché implica che non ci siano altri job nella rete).

Quindi le probabilità di blocco del centro 3 crescono nel passaggio da $N=3$ a $N=4$, e per variazioni di N successive subiscono piccoli incrementi, mantenendo una curva qualitativamente simile a quella del Grafico 1.

Considerando il centro 2, sono ancora valide le osservazioni fatte precedentemente. Ciò che differisce dall'andamento di Grafico 1 è il punto in cui si verifica "l'impennata". In questo caso, già per $N=8$ c'è una buona probabilità di trovare i centri 1 e 3 saturi (ciò è dovuto al fatto che la somma delle loro capacità sia proprio 8). Introducendo il nono job, quindi per $N=9$, abbiamo una tabella delle probabilità marginali che ricorda la Tabella 3 (quella del caso precedente in cui $N=11$):

| | $N_i=0$ | $N_i=1$ | $N_i=2$ | $N_i=3$ | $N_i=4$ | $N_i=5$ | $N_i=6$ | $N_i=7$ |
|-----------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| Centro 1: | 0.0323 | 0.0646 | 0.1292 | 0.7740 | - | - | - | - |
| Centro 2: | 0.0000 | 0.7109 | 0.1591 | 0.0844 | 0.0412 | 0.0034 | 0.0008 | 0.0003 |
| Centro 3: | 0.0003 | 0.0011 | 0.0044 | 0.0170 | 0.0625 | 0.9148 | - | - |

Tabella 5. Probabilità marginali per $N=9$

Una differenza rispetto a prima è che $P(N_1=0) \neq 0$ e $P(N_3=0) \neq 0$, perché la somma delle capacità del centro 2 e di un qualsiasi altro centro è maggiore di 9. Tuttavia $P(N_2=0) = 0$, perché la somma delle capacità del centro 1 e del centro 3 è uguale a 8, e la probabilità che il centro 2 non sia vuoto è quella che in questo momento ci interessa. Infatti ancora una volta la probabilità che vi sia un solo job al centro 2 e che i rimanenti job saturino i centri 1 e 3 è molto alta, e determina, congiuntamente al fatto che il centro 2 è il più veloce, l'aumento della probabilità di blocco del centro 2.

Si fa infine notare che la probabilità di blocco del centro 1 è leggermente minore di quella del caso precedente. Ciò è dovuto alla più alta capacità del centro 2 e quindi alla minore probabilità di saturazione dello stesso.

375blocco

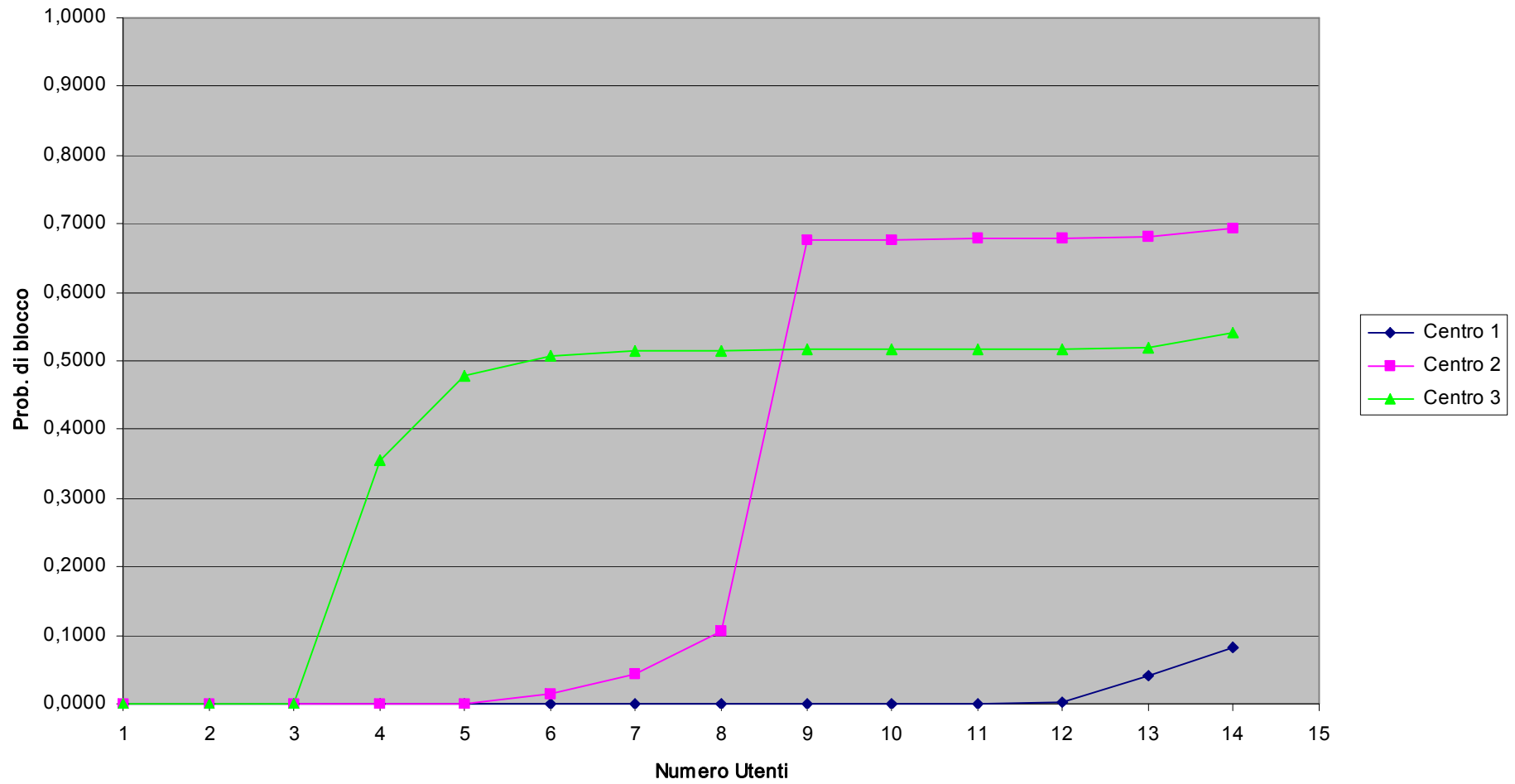


Grafico 2

Tempo di Residenza

CASO $B_1=5$ $B_2=5$ $B_3=5$

| N | Centro 1 | Centro 2 | Centro 3 |
|----|----------|----------|----------|
| 1 | 1,0000 | 0,3333 | 0,5000 |
| 2 | 1,5455 | 0,3939 | 0,6364 |
| 3 | 2,2000 | 0,4353 | 0,7471 |
| 4 | 2,9513 | 0,4620 | 0,8313 |
| 5 | 3,7812 | 0,4785 | 0,8917 |
| 6 | 4,3270 | 0,4930 | 1,2710 |
| 7 | 4,5244 | 0,5089 | 2,0370 |
| 8 | 4,5749 | 0,5419 | 2,9538 |
| 9 | 4,5882 | 0,6184 | 3,8709 |
| 10 | 4,5939 | 0,7889 | 4,7054 |
| 11 | 4,6126 | 1,5780 | 4,9198 |
| 12 | 4,7086 | 2,5560 | 4,9794 |
| 13 | 4,8898 | 3,5523 | 5,1032 |
| 14 | 5,2502 | 4,6363 | 5,3761 |

Tabella 6 Tempi di residenza dei centri

La prima cosa da notare è che il tempo di residenza cresce monotonamente all'aumentare del numero dei job nella rete. Il tasso di questo aumento è variabile e dipende da alcuni fattori che andiamo a considerare di seguito.

Si consideri dapprima il caso in cui $N \leq 5$. Evidentemente i risultati ottenuti per il tempo di residenza equivalgono a quelli di una rete senza blocco (come si può vedere confrontando i dati della Tabella 10), perché essendo il numero di utenti minore o uguale della capacità dei centri (per la precisione della più piccola delle capacità, anche se in questo caso sono tutte uguali) non si verifica mai il fenomeno del blocco. Quindi per $N \leq 5$, i tempi di residenza dipendono solo dal tasso di servizio dei singoli centri. Infatti analizzando i dati in Tabella 6, si vede che il centro con il minor tempo di residenza è il centro 2, che ha tasso di servizio $\mu_2=3$, mentre quello più lento è il centro 1, che ha tasso di servizio $\mu_1=1$, in posizione intermedia si colloca il centro 3, per cui $\mu_3=2$. Il motivo per cui il centro 1 ha una crescita del tempo di residenza molto più rapida, per $1 \leq N \leq 5$, è perché i job tendono ad accumularsi sulla sua coda, come si può vedere confrontando le probabilità marginali dei 3 centri per esempio per $N=5$.

| | $N_i=0$ | $N_i=1$ | $N_i=2$ | $N_i=3$ | $N_i=4$ | $N_i=5$ |
|----------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| Centro 1 | 0.0294 | 0.0559 | 0.1034 | 0.1813 | 0.2863 | 0.3436 |
| Centro 2 | 0.6765 | 0.2219 | 0.0716 | 0.0223 | 0.0064 | 0.0014 |
| Centro 3 | 0.5147 | 0.2566 | 0.1273 | 0.0620 | 0.0286 | 0.0107 |

Tabella 7. Probabilità marginali per $N=5$

Si vede chiaramente che il centro 1 accumula molti più job a causa della sua lentezza. Si può avere riscontro di ciò anche guardando all'utilizzazione effettiva (per $N=5$ coincide con l'utilizzazione classica) del centro 1 che è molto alta ($U_i^e = 0,9706$ per $N=5$).

Analizzando il Grafico 3 e la Tabella 6, mettiamo in evidenza il passaggio da $N=5$ a $N=6$. Nell'analisi delle probabilità di blocco, si era sottolineato che questo passaggio era critico per il centro 3 che cominciava a subire un consistente aumento della probabilità di blocco. Questo fatto ha

ripercussioni nel tempo di residenza, che comincia a salire anche per il centro 3. Infatti con $N=6$ il tempo di residenza del centro 3 è dovuto non solo al tempo di servizio e al tempo di attesa del centro stesso, ma anche al tempo che il centro 3 passa inattivo, cioè bloccato aspettando che il centro 1 non sia più saturo. Guardando i valori si nota che l'incremento del tempo di residenza del centro 3 ottenuto nel passaggio da 1 a 5 job, è circa uguale all'incremento dato dal passaggio da 5 a 6 job. Vedendo i numeri:

$$T_3(N=5) - T_3(N=1) = 0,3917$$

$$T_3(N=6) - T_3(N=5) = 0,3793$$

Per $6 \leq N \leq 10$ il tempo di residenza del centro 3 continua questa tendenza e cresce molto rapidamente. La ragione di questa crescita è che ogni job che si aggiunge ha buone probabilità di accodarsi al centro 3, che è bloccato per oltre il 50% del tempo. In modo più appropriato possiamo dire che all'aumentare dei job nella rete aumenta quasi di pari passo la lunghezza media della coda del centro 3.

Invece il centro 1, per $6 \leq N \leq 10$, subisce una diminuzione della crescita. Questa "stabilizzazione" è causata dal fatto che anche la distribuzione delle probabilità marginali (e quindi il valore medio della sua coda) al variare di N si stabilizza, tenendo presente che il centro 1 ha una probabilità di blocco trascurabile. Il fatto che il centro 1 possa avere al massimo 5 job influisce in modo determinante nella stabilizzazione del suo tempo di residenza: infatti se avessimo lasciato crescere la coda di 1 infinitamente, si sarebbero accumulati molti più job e il tempo di residenza sarebbe stato molto maggiore (a questa considerazione arriveremo anche confrontando questi risultati a quelli del tempo di residenza di una rete senza blocco).

Prima di passare al caso $N=11$, facciamo notare che per $N=10$, il tempo di residenza del centro 3 supera addirittura quello del centro 1. Si può capire questo fatto vedendo la Tabella 2. Le probabilità marginali del centro 3 evidenziano che la lunghezza media della coda al centro 3 è leggermente maggiore di quella del centro 1. Infatti:

$$L_1=4.5538$$

$$L_3=4.6642$$

Infine consideriamo $11 \leq N \leq 14$. Come il passaggio da $N=5$ a $N=6$ era "critico" per il centro 3, allo stesso modo per il centro 2 è critico il passaggio da $N=10$ a $N=11$. Infatti vedendo il grafico 1, le probabilità di blocco del centro 2 aumentano proprio in questo passaggio. Ciò implica che il tempo di residenza aumenterà considerevolmente, dipendendo anch'esso, in parte, dalla probabilità di blocco. Innanzitutto vediamo numericamente che il passaggio da $N=10$ a $N=11$ comporta un aumento del tempo di residenza del centro 2 maggiore dell'aumento che si registra passando da $N=1$ a $N=10$:

$$T_2(N=10) - T_2(N=1) = 0,4556$$

$$T_2(N=11) - T_2(N=10) = 0,7891$$

Dunque anche i risultati numerici sono in linea con le nostre considerazioni. Quando N cresce ulteriormente i job che si aggiungono incrementano il valore medio della coda al centro 2. Questo incremento, unito al già citato aumento delle probabilità di blocco, porta a un aumento sostanzialmente costante, al crescere di N , del tempo di residenza del centro 2.

Tempi di Residenza 5-5-5

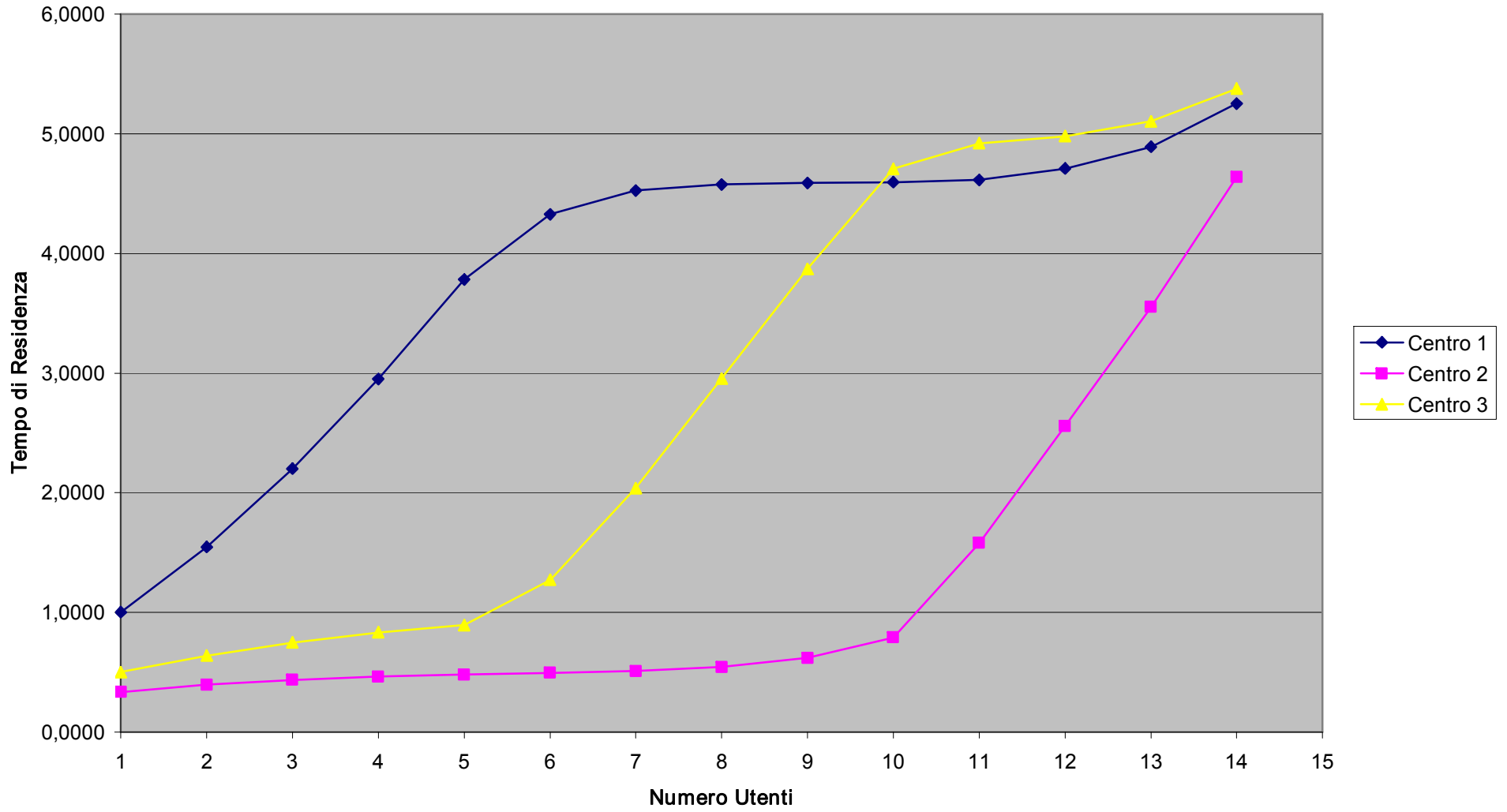


Grafico 3

Passando a considerare il centro 3, sempre per $11 \leq N \leq 14$, si registra anche in questo caso una brusca interruzione della crescita del tempo di residenza, in modo analogo al caso del centro 1 nell'intervallo $6 \leq N \leq 10$. Ciò è dovuto al fatto che l'aumento del numero di job nella rete non comporta un grande cambiamento delle probabilità marginali, e quindi del valor medio della coda, a causa della capacità limitata del centro 3.

Infine facciamo notare che il centro 1 fa registrare un lieve incremento del suo tempo di residenza per $N=13$ e per $N=14$. Ciò è causato dal fatto che anche la probabilità di blocco del centro 1 assume valori non trascurabili e comincia ad influire nel calcolo del tempo di residenza.

CASO $B_1=3$ $B_2=7$ $B_3=5$

| N | Centro 1 | Centro 2 | Centro 3 |
|----|----------|----------|----------|
| 1 | 1,0000 | 0,3333 | 0,5000 |
| 2 | 1,5455 | 0,3939 | 0,6364 |
| 3 | 2,2000 | 0,4353 | 0,7471 |
| 4 | 2,5757 | 0,4620 | 1,2070 |
| 5 | 2,6962 | 0,4743 | 2,0304 |
| 6 | 2,7243 | 0,4925 | 2,9932 |
| 7 | 2,7311 | 0,5496 | 3,9556 |
| 8 | 2,7327 | 0,7042 | 4,8307 |
| 9 | 2,7332 | 1,5196 | 5,0478 |
| 10 | 2,7338 | 2,5527 | 5,0483 |
| 11 | 2,7361 | 3,5855 | 5,0509 |
| 12 | 2,7443 | 4,6195 | 5,0617 |
| 13 | 2,8059 | 5,6363 | 5,1032 |
| 14 | 3,0698 | 6,8167 | 5,3761 |

Tabella 8

Studiamo l'andamento per questa nuova distribuzione delle capacità.

Innanzitutto per $N \leq 3$, abbiamo gli stessi valori del caso precedente e del caso senza blocco.

Consideriamo il centro 1. Quando il valore di N è piccolo, ogni job che si aggiunge aumenta considerevolmente il valor medio della coda del centro 1. Poiché il centro 1 è più lento esso tende a saturarsi molto velocemente, anche a causa della sua limitata capacità. Questa situazione e il fatto che la probabilità di blocco per il centro 1 sia quasi nulla a parte per $N=13$ e $N=14$, fanno in modo che il tempo di residenza si stabilizzi. A questo proposito possiamo mostrare le probabilità marginali del centro 1 per alcuni valori di N significativi

| | $N_1=0$ | $N_1=1$ | $N_1=2$ | $N_1=3$ |
|--------|---------|---------|---------|---------|
| $N=1$ | 0.4545 | 0.5455 | 0.0000 | 0.0000 |
| $N=2$ | 0.2235 | 0.3529 | 0.4235 | 0.0000 |
| $N=3$ | 0.1130 | 0.1983 | 0.3130 | 0.3757 |
| $N=4$ | 0.0576 | 0.1065 | 0.1868 | 0.6490 |
| $N=6$ | 0.0338 | 0.0670 | 0.1322 | 0.7669 |
| $N=14$ | 0.0000 | 0.0000 | 0.1841 | 0.8159 |

Tabella 9. Probabilità marginale del centro 1 al variare di N

Si fa notare ancora una volta che per $N=13$ e $N=14$ la probabilità di blocco del centro 1 diventa rilevante e influisce considerevolmente nel calcolo del tempo di residenza.

Passiamo ora ad analizzare il centro 2. All'aumentare di N per $1 \leq N \leq 8$ il tempo di residenza aumenta molto lentamente. Questo fenomeno è dovuto al fatto che i job tendono a accumularsi prima nel centro con tasso di servizio più basso (in questo caso il centro 1); quando poi il centro 1 si satura i job rimanenti tendono ad accumularsi nel centro 3 con più probabilità, perché esso sperimenta un'alta probabilità di blocco.

Quando il numero dei job nella rete è maggiore della somma delle capacità dei centri 1 e 3, il centro 2 dovrà necessariamente avere almeno un job. Quindi passando da $N=8$ a $N=9$, il tempo di residenza aumenta, sostanzialmente, a causa della componente dovuta al blocco, piuttosto che a quella dovuta alla lunghezza della sua coda.

Per $N > 9$ il tempo di residenza continua a crescere sia a causa del blocco che dell'aumento della lunghezza della coda al centro 2; infatti ogni job ha una buona probabilità di sperimentare il fenomeno di blocco e ciò rallenta ulteriormente lo smaltimento della coda.

Passando al centro 3, per i primi 3 job, si ha un leggero aumento del tempo di residenza; invece per $3 \leq N \leq 8$, il tempo di residenza aumenta molto rapidamente sia per la componente di blocco del centro 3 dovuta alla saturazione del centro 1, sia per l'aumento della lunghezza di coda.

Infine per $N > 8$ il tempo di residenza ha un aumento nettamente inferiore ai precedenti, perchè la lunghezza della coda e la probabilità di blocco tendono a variare poco al variare di N .

Le considerazioni sopra riportate possono essere verificate nel Grafico 4.

Tempo di residenza 3-7-5

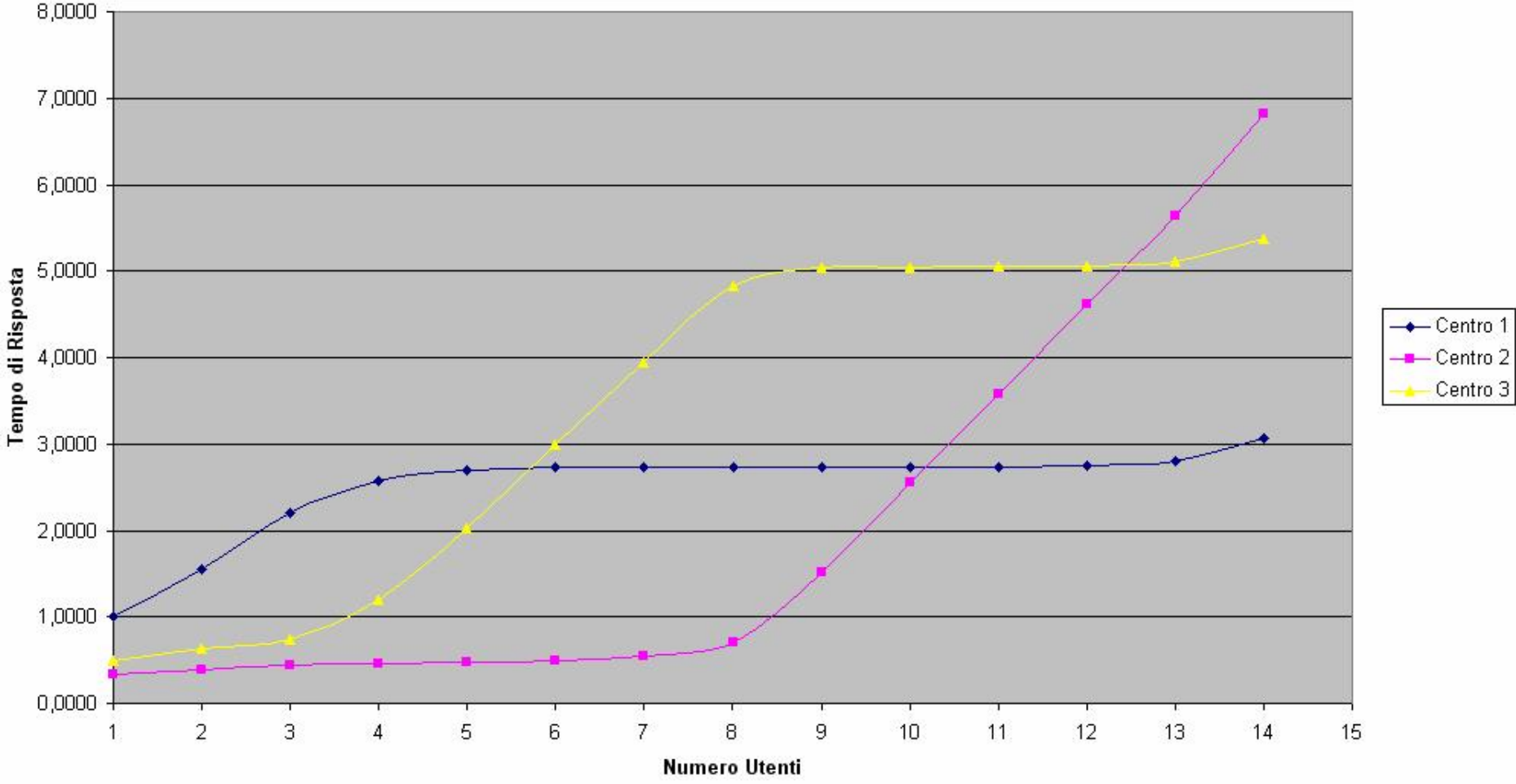


Grafico 4

Conclusioni

Come si vede dai grafici 5, 6, 7 ci sono differenze di comportamento, per quanto riguarda la rete con blocco e quella senza blocco.

Per quanto riguarda il centro 1, notiamo immediatamente che nel caso in cui non ci sono vincoli di capacità il tempo di residenza aumenta in modo molto più consistente all'aumentare di N , questo accade perché non essendoci vincoli la coda del centro 1 cresce all'aumentare del numero dei job nella rete. Il fatto che questa cresca in maniera proporzionale è dovuto alla lentezza del centro 1 rispetto agli altri.

In questo caso, i job si possono accumulare in maniera indefinita; in compenso, non si riscontrano ritardi dovuti al blocco. Però avevamo visto che in entrambe le distribuzioni delle capacità delle code, il centro 1 faceva registrare sempre una bassa probabilità di blocco. Eliminare il vincolo delle capacità porta ad un peggioramento del tempo di residenza del centro 1, perché il tempo che il generico job risparmia a causa dell'assenza di blocco è minore del tempo che perde nella coda la quale, per l'assenza dei vincoli sulle capacità, cresce indefinitamente.

Quanto sopra esposto può essere riscontrato nel Grafico 5, dal quale si può facilmente concludere che i tempi di residenza rispetto al centro 1 risultano sensibili alla variazione della capacità (almeno per $N > 3$).

In particolare si può notare che per il caso senza blocco vale il discorso precedentemente fatto, mentre per i casi con blocco l'andamento dei tempi di residenza del centro 1 sono, a nostro avviso, determinati dalla differente capacità del centro. Infatti analizzando l'andamento delle curve per $B_1=5 B_2=5 B_3=5$ e per $B_1=3 B_2=7 B_3=5$ si può vedere come il tempo di residenza del centro 1 sia maggiore nel primo rispetto al secondo proprio in virtù del fatto che nel secondo caso il centro 1 ha una lunghezza media di coda minore rispetto al primo caso. In teoria nel secondo caso la probabilità di blocco del centro 1 dovrebbe essere minore perché il centro 2 ha capacità maggiore, ma esclusi i casi per N molto grande ($N=13, N=14$) la probabilità di blocco è trascurabile nel calcolo del tempo di residenza del centro 1.

Rispetto al centro 1 la seconda distribuzione risulta essere migliore, ma, come vedremo, essa porterà il centro 1 a saturarsi più velocemente e ciò influirà sugli altri centri.

Riportiamo di seguito la tabella dei tempi di residenza nei centri nel caso di rete senza blocco.

| N | Centro 1 | Centro 2 | Centro 3 |
|----|----------|----------|----------|
| 1 | 1,0000 | 0,3333 | 0,5000 |
| 2 | 1,5455 | 0,3939 | 0,6364 |
| 3 | 2,2000 | 0,4353 | 0,7471 |
| 4 | 2,9513 | 0,4620 | 0,8313 |
| 5 | 3,7812 | 0,4785 | 0,8917 |
| 6 | 4,6701 | 0,4881 | 0,9327 |
| 7 | 5,6003 | 0,4936 | 0,9594 |
| 8 | 6,5580 | 0,4966 | 0,9761 |
| 9 | 7,5329 | 0,4982 | 0,9862 |
| 10 | 8,5184 | 0,4991 | 0,9921 |
| 11 | 9,5102 | 0,4995 | 0,9956 |
| 12 | 10,5056 | 0,4998 | 0,9976 |
| 13 | 11,5030 | 0,4999 | 0,9987 |
| 14 | 12,5016 | 0,4999 | 0,9993 |

Tabella 10 Tempi di residenza senza blocco

Tempo di Residenza centro 1

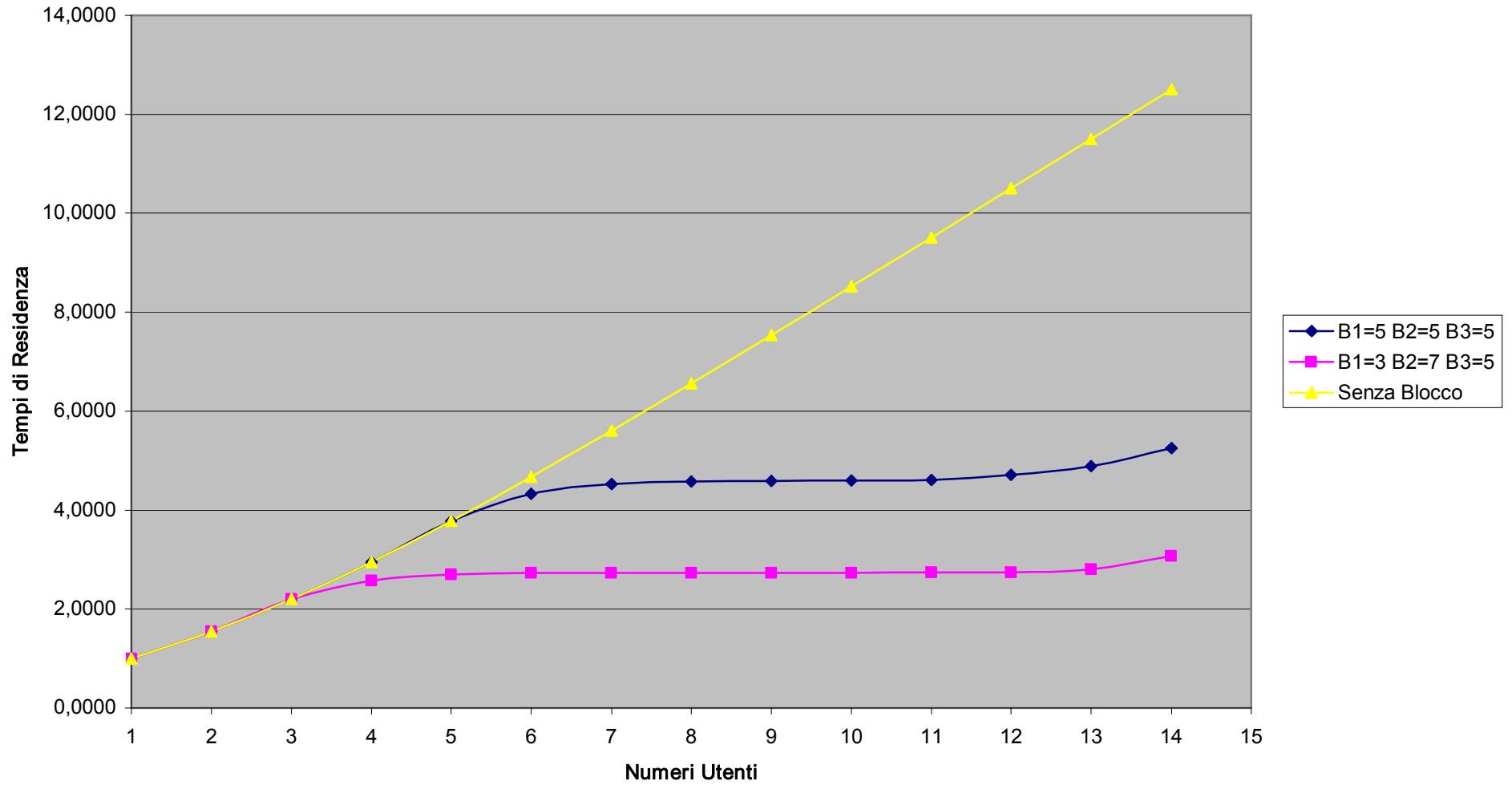


Grafico 5 Tempo residenza cetnro 1

Analizzando il centro 2, nel caso senza blocco, si nota che il tempo di residenza rimane pressoché costante in quanto, pur non avendo in questo momento un limite sulla capacità della coda, si verifica uno scarso accodamento sia perché il centro in questione è quello con il maggior tasso di servizio, sia perché il centro a monte del centro 2, ovvero il centro 1, ha capacità operativa pari ad un terzo del centro 2.

In conseguenza di ciò il numero di job che si presentano nel centro 2 dovuti a fine servizio nel centro 1 è relativamente basso.

Dal grafico 6 si vede che il tempo di residenza risulta insensibile alla distribuzione della capacità delle code per $N < 8$.

Concentrando rispettivamente la nostra attenzione al caso $B_1=3 B_2=7 B_3=5$ e al caso $B_1=5 B_2=5 B_3=5$, possiamo vedere che l'andamento dei tempi di residenza tende ad essere simile a partire da $N=8$, nel primo caso, e da $N=10$, nel secondo caso, pur essendo diversi i valori assunti.

Per tali valori di N , nei due casi di riferimento, si può vedere dalle probabilità marginali che i centri 1 e 3 hanno una maggiore probabilità di saturarsi (vedi tabelle 11, 12) comportando un aumento della probabilità di blocco del centro 2 e di conseguenza l'aumento dei rispettivi tempi di residenza.

| | $N_i=0$ | $N_i=1$ | $N_i=2$ | $N_i=3$ | $N_i=4$ | $N_i=5$ |
|----------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| Centro 1 | 0.0075 | 0.0155 | 0.0314 | 0.0631 | 0.1264 | 0.7561 |
| Centro 2 | 0.5554 | 0.2453 | 0.1108 | 0.0513 | 0.0246 | 0.0126 |
| Centro 3 | 0.0009 | 0.0032 | 0.0117 | 0.0450 | 0.1935 | 0.7457 |

Tabella 11. Probabilità marginali $B_1=5 B_2=5 B_3=5$ per $N=10$

| | $N_i=0$ | $N_i=1$ | $N_i=2$ | $N_i=3$ | $N_i=4$ | $N_i=5$ | $N_i=6$ | $N_i=7$ |
|----------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| Centro 1 | 0.0323 | 0.0647 | 0.1293 | 0.7737 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| Centro 2 | 0.5703 | 0.2525 | 0.1156 | 0.0518 | 0.0073 | 0.0019 | 0.0005 | 0.0001 |
| Centro 3 | 0.0007 | 0.0026 | 0.0104 | 0.0433 | 0.1942 | 0.7489 | 0.0000 | 0.0000 |

Tabella 12. Probabilità marginali $B_1=3 B_2=7 B_3=5$ per $N=8$

Tempo di Residenza centro 2

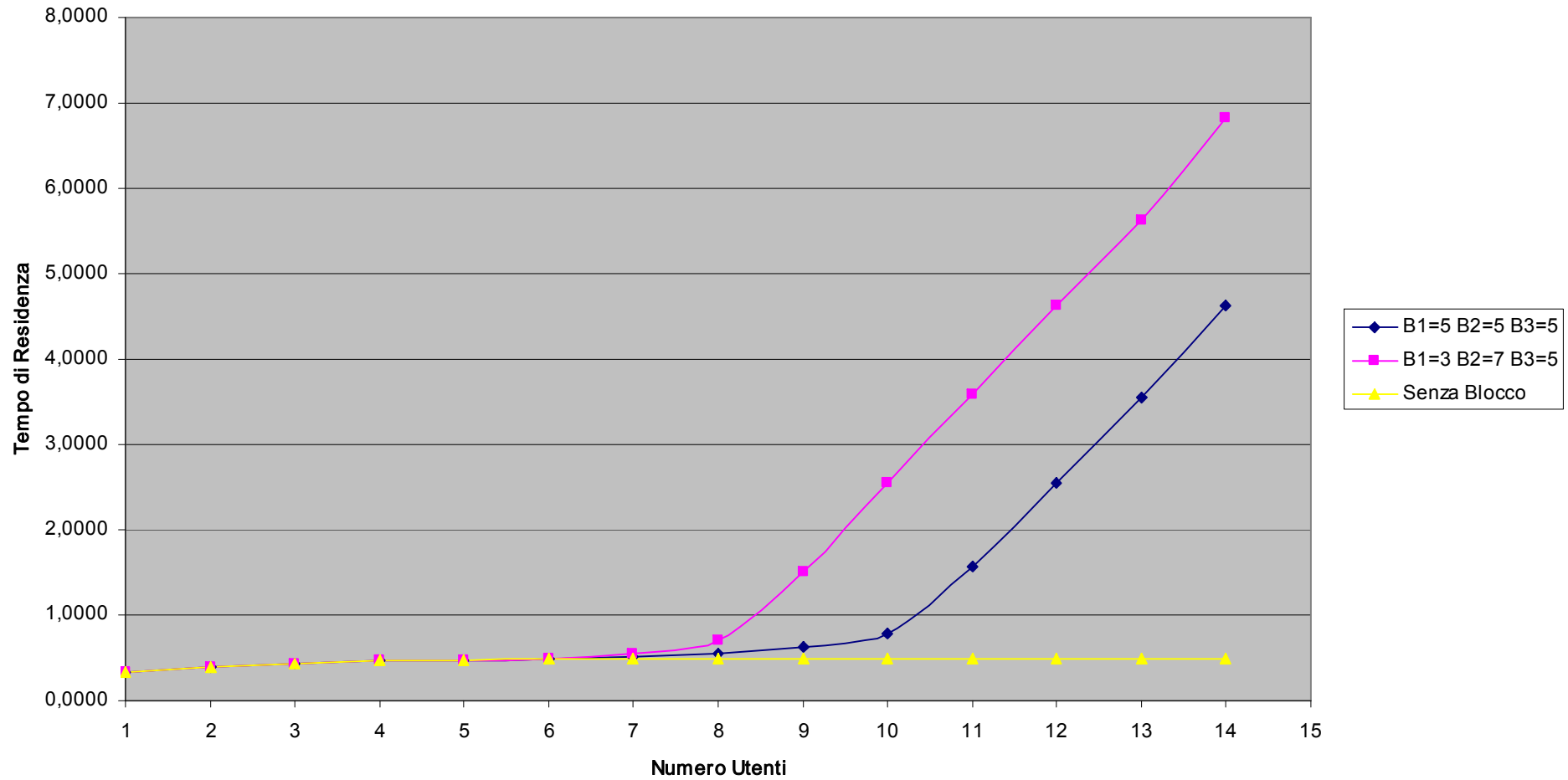


Grafico 6. Tempo residenza cetnro 2

In analogia al centro 2, nel centro 3 si riscontra inizialmente un graduale incremento del tempo di residenza al variare del numero di job.

Tale tempo di residenza tende a stabilizzarsi per N abbastanza grande.

Questo andamento è dovuto al fatto che il centro 1 regola il flusso di job nella rete, essendo il centro con il tasso di servizio più basso; quindi nel centro 3 per N abbastanza grande entrano job con una frequenza approssimabile al tasso di uscita del centro 1. L'andamento pressochè costante dipende dal fatto che il tasso di servizio del centro 3 è doppio del centro 1 e quindi è poco probabile che si formi coda nel centro 3.

La lieve pendenza iniziale dei tempi di residenza del centro 3 rispetto a quello del centro 2 è motivata dal fatto che il tasso di servizio del centro 2 è maggiore del centro 3.

Dal grafico 7 possiamo verificare che per $N > 3$ e per $N > 5$, rispettivamente per i casi $B_1=3 B_2=7 B_3=5$ e $B_1=5 B_2=5 B_3=5$, i tempi di residenza del centro 3 diventano sensibili alla variazione della distribuzione della capacità delle code.

La differenza in questi due casi è dovuta alla diversa capacità del centro 1: dal grafico si vede che la curva del centro di residenza del centro 3, nel caso $B_1=3 B_2=7 B_3=5$, è più alta di quella del caso $B_1=5 B_2=5 B_3=5$, proprio in virtù della ridotta capacità del centro 1.

Infine si vuole porre l'accento sull'andamento delle curve per il caso senza blocco, che hanno un comportamento interessante.

Cominciamo col fare notare che il throughput del centro 1 è la grandezza che regola il throughput degli altri due centri. Poiché stiamo considerando una rete ciclica, è evidente che all'equilibrio, indicando con X il throughput:

$$X_1 = X_2 = X_3$$

Altrettanto evidente è che il tasso di servizio del centro 1 è un limite superiore per il throughput del centro 1 (e di conseguenza dei centri 2 e 3). Infatti quando N è piccolo, la probabilità di trovare il centro 1 vuoto non è trascurabile, quindi il throughput sarà minore del tasso di servizio del centro 1, perché esso ha un'utilizzazione sensibilmente minore di 1. Quando N cresce, il centro 1 tenderà ad accumulare nella sua coda molti job, abbastanza da rendere molto piccola la probabilità che sia vuoto, e la sua utilizzazione (nel caso senza blocco, non ha senso parlare di utilizzazione effettiva) diventerà $\rho \approx 1$ e $X_1 \approx \mu_1$.

Considerando queste premesse vediamo l'andamento delle curve dei centri 2 e 3 nel caso senza blocco. Si tenta di dare un limite superiore al loro tempo di residenza al crescere di N. Infatti possiamo considerare i centri 2 e 3 singolarmente. Riprendendo la formula KP, e ricordando che stiamo parlando di centri con i tempi di servizio esponenziali abbiamo:

$$E(w) = \rho / (1 - \rho)$$

Possiamo calcolare l'utilizzazione dei centri 2 e 3 utilizzando come tasso di ingresso il throughput del centro 1 (ricordiamo che è uguale a quelli dei centri 2 e 3). Si è detto che tale valore è limitato dal valore del tasso di servizio del centro 1. Poiché stiamo considerando N abbastanza grande serviamoci del fatto che $X_1 \approx \mu_1$. E' evidente che

$$\lambda_2 = \lambda_3 = \mu_1 = 1 \text{ job/sec}$$

Ora è facile calcolare:

$$\rho_2 = \lambda_2 / \mu_2 = 1/3 = 0,333$$

$$\rho_3 = \lambda_3 / \mu_3 = 1/2 = 0,5$$

Adesso possiamo affermare:

$$E(w_2) = \rho_2 / (1 - \rho_2) = 0,5$$
$$E(w_3) = \rho_3 / (1 - \rho_3) = 1$$

Conoscendo il valore atteso per la lunghezza della coda è possibile calcolare il tempo di residenza per ciascun centro. Indicando $E(t_{Si}) = 1 / \mu_i$:

$$E(t_{q2}) = E(w_2) * E(t_{S2}) + E(t_{S2}) = 0,5 \text{ sec}$$
$$E(t_{q3}) = E(w_3) * E(t_{S3}) + E(t_{S3}) = 1 \text{ sec}$$

Quindi abbiamo raggiunto il risultato che per N crescente, il valore atteso del tempo di residenza dei centri 2 e 3 non supera quello che abbiamo appena calcolato. Infatti vedendo i grafici si vede chiaramente che le curve, rappresentanti i tempi di residenza dei due centri, tendono proprio a questi due valori senza superarli.

Per provare che fosse effettivamente così, abbiamo lanciato il programma con 50 utenti nella rete senza limiti sulle capacità dei centri. In quel caso i valori dei tempi di residenza erano proprio quelli attesi (per la precisione, in teoria dovevano essere leggermente minori, ma evidentemente il loro valore era così prossimo a quello dell'"asintoto", che l'approssimazione con solo quattro cifre decimali non riesce a cogliere la differenza).

Si noti che queste considerazioni sono possibili grazie al teorema di Burke, che garantisce che se consideriamo un centro con arrivi poissoniani e tempo di servizio esponenziale, e se non vi sono cicli, il centro che si trova a valle del centro desiderato vedrà degli arrivi poissoniani con un tasso di arrivo pari a quello del centro precedente.

Tempo di Residenza centro 3

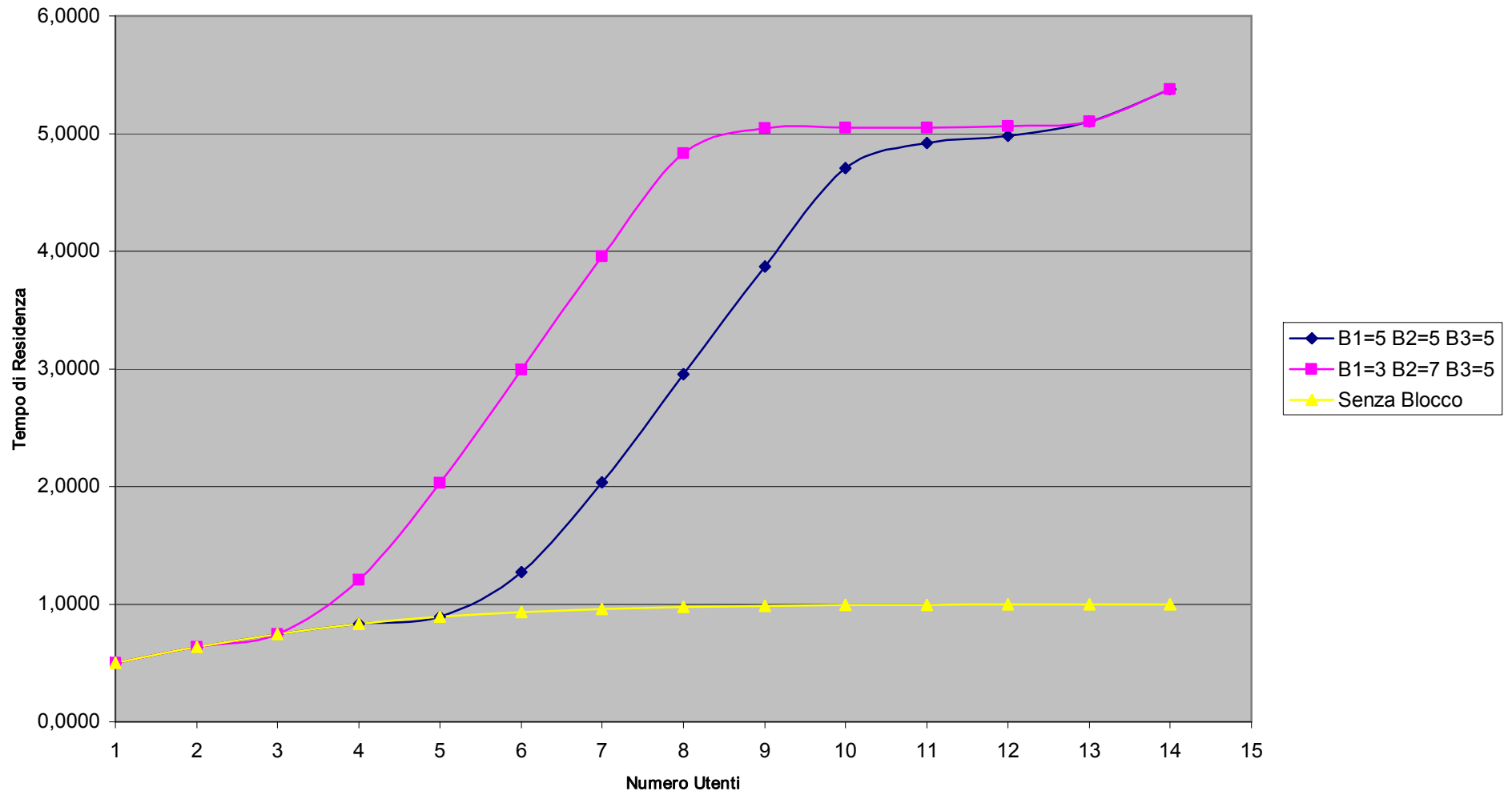


Grafico 7. Tempo residenza cetnro 3

Tempo di Residenza rete NO BLOCCO

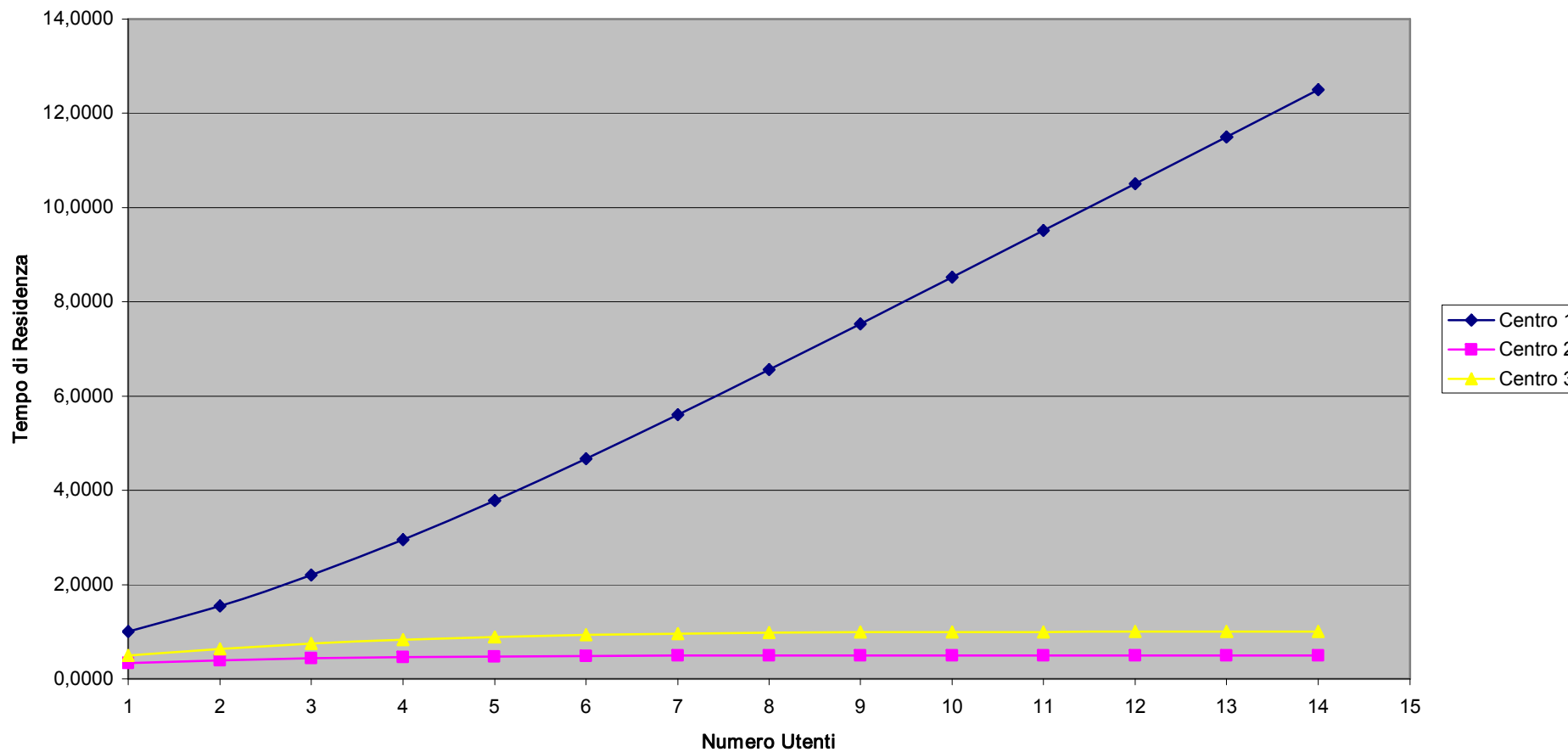


Grafico 8. Tempo residenza in una rete senza blocco

Prove di esecuzione

Riportiamo le prove di esecuzione riguardanti l'efficacia dell'estensione del tool a reti cicliche con $M > 3$; in particolare i due test si riferiscono a $M=4$ e $M=5$.

Nel cartella Risultati, presente nel cd, sono riportate tutte le prove di esecuzione eseguite per questo studio.

- $M=4; N=15; B = [5,4,2,6]; MU = [1.0,2.0,3.0,2.0]$

Calcolo spazio degli stati per reti con blocco BAS

La capacità complessiva \bar{A} : 17

IL MIO SPAZIO CONSTA DI 58 STATI

| | | | |
|-------------|-------------|-------------|-------------|
| (5, 0, [0]) | (4, 0, [0]) | (2, 0, [0]) | (4, 0, [0]) |
| (5, 0, [4]) | (4, 0, [0]) | (2, 0, [0]) | (4, 1, [0]) |
| (5, 1, [4]) | (4, 0, [1]) | (2, 0, [0]) | (4, 1, [0]) |
| (5, 0, [4]) | (4, 1, [0]) | (2, 0, [2]) | (4, 1, [0]) |
| (5, 1, [0]) | (4, 0, [1]) | (2, 0, [0]) | (4, 0, [0]) |
| (5, 1, [4]) | (4, 0, [1]) | (2, 0, [0]) | (4, 1, [0]) |
| (5, 1, [0]) | (4, 1, [1]) | (2, 0, [2]) | (4, 0, [0]) |
| (5, 0, [0]) | (4, 1, [0]) | (2, 0, [2]) | (4, 0, [0]) |
| (5, 0, [4]) | (4, 1, [0]) | (2, 0, [2]) | (4, 1, [0]) |
| (5, 1, [0]) | (4, 1, [1]) | (2, 0, [2]) | (4, 0, [0]) |
| (5, 0, [0]) | (4, 0, [0]) | (1, 0, [0]) | (5, 0, [0]) |
| (5, 0, [4]) | (4, 0, [0]) | (1, 0, [0]) | (5, 1, [0]) |
| (5, 1, [4]) | (4, 0, [1]) | (1, 0, [0]) | (5, 1, [0]) |
| (5, 1, [0]) | (4, 0, [1]) | (1, 0, [0]) | (5, 0, [0]) |
| (5, 0, [0]) | (4, 0, [0]) | (0, 0, [0]) | (6, 0, [0]) |
| (5, 0, [4]) | (4, 0, [0]) | (0, 0, [0]) | (6, 1, [0]) |
| (5, 1, [4]) | (4, 0, [1]) | (0, 0, [0]) | (6, 1, [0]) |
| (5, 1, [0]) | (4, 0, [1]) | (0, 0, [0]) | (6, 0, [0]) |
| (5, 0, [0]) | (3, 0, [0]) | (2, 0, [0]) | (5, 0, [0]) |
| (5, 0, [4]) | (3, 0, [0]) | (2, 0, [0]) | (5, 1, [0]) |
| (5, 0, [4]) | (3, 1, [0]) | (2, 0, [2]) | (5, 1, [0]) |
| (5, 0, [0]) | (3, 1, [0]) | (2, 0, [2]) | (5, 0, [0]) |
| (5, 0, [0]) | (3, 0, [0]) | (1, 0, [0]) | (6, 0, [0]) |
| (5, 0, [4]) | (3, 0, [0]) | (1, 0, [0]) | (6, 1, [0]) |
| (5, 0, [4]) | (3, 0, [0]) | (1, 1, [0]) | (6, 1, [3]) |
| (5, 0, [0]) | (3, 0, [0]) | (1, 1, [0]) | (6, 0, [3]) |
| (5, 0, [0]) | (2, 0, [0]) | (2, 0, [0]) | (6, 0, [0]) |
| (5, 0, [4]) | (2, 0, [0]) | (2, 0, [0]) | (6, 1, [0]) |
| (5, 0, [4]) | (2, 1, [0]) | (2, 0, [2]) | (6, 1, [0]) |
| (5, 0, [4]) | (2, 0, [0]) | (2, 1, [0]) | (6, 1, [3]) |
| (5, 0, [0]) | (2, 1, [0]) | (2, 0, [2]) | (6, 0, [0]) |
| (5, 0, [4]) | (2, 1, [0]) | (2, 0, [2]) | (6, 1, [0]) |
| (5, 0, [0]) | (2, 1, [0]) | (2, 1, [2]) | (6, 0, [3]) |
| (5, 0, [0]) | (2, 0, [0]) | (2, 1, [0]) | (6, 0, [3]) |
| (5, 0, [4]) | (2, 0, [0]) | (2, 1, [0]) | (6, 1, [3]) |
| (5, 0, [0]) | (2, 1, [0]) | (2, 1, [2]) | (6, 0, [3]) |
| (4, 0, [0]) | (4, 0, [0]) | (2, 0, [0]) | (5, 0, [0]) |
| (4, 1, [0]) | (4, 0, [1]) | (2, 0, [0]) | (5, 0, [0]) |
| (4, 1, [0]) | (4, 1, [1]) | (2, 0, [2]) | (5, 0, [0]) |
| (4, 0, [0]) | (4, 1, [0]) | (2, 0, [2]) | (5, 0, [0]) |
| (4, 0, [0]) | (4, 0, [0]) | (1, 0, [0]) | (6, 0, [0]) |
| (4, 1, [0]) | (4, 0, [1]) | (1, 0, [0]) | (6, 0, [0]) |
| (4, 1, [0]) | (4, 0, [1]) | (1, 1, [0]) | (6, 0, [3]) |
| (4, 0, [0]) | (4, 0, [0]) | (1, 1, [0]) | (6, 0, [3]) |
| (4, 0, [0]) | (3, 0, [0]) | (2, 0, [0]) | (6, 0, [0]) |

| | | | |
|-------------|-------------|-------------|-------------|
| (4, 0, [0]) | (3, 1, [0]) | (2, 0, [2]) | (6, 0, [0]) |
| (4, 0, [0]) | (3, 1, [0]) | (2, 1, [2]) | (6, 0, [3]) |
| (4, 0, [0]) | (3, 0, [0]) | (2, 1, [0]) | (6, 0, [3]) |
| (3, 0, [0]) | (4, 0, [0]) | (2, 0, [0]) | (6, 0, [0]) |
| (3, 1, [0]) | (4, 0, [1]) | (2, 0, [0]) | (6, 0, [0]) |
| (3, 1, [0]) | (4, 1, [1]) | (2, 0, [2]) | (6, 0, [0]) |
| (3, 1, [0]) | (4, 0, [1]) | (2, 1, [0]) | (6, 0, [3]) |
| (3, 0, [0]) | (4, 1, [0]) | (2, 0, [2]) | (6, 0, [0]) |
| (3, 1, [0]) | (4, 1, [1]) | (2, 0, [2]) | (6, 0, [0]) |
| (3, 0, [0]) | (4, 1, [0]) | (2, 1, [2]) | (6, 0, [3]) |
| (3, 0, [0]) | (4, 0, [0]) | (2, 1, [0]) | (6, 0, [3]) |
| (3, 1, [0]) | (4, 0, [1]) | (2, 1, [0]) | (6, 0, [3]) |
| (3, 0, [0]) | (4, 1, [0]) | (2, 1, [2]) | (6, 0, [3]) |

PROBABILITA DI STATO:

0.0029 0.0010 0.0008 0.0041 0.0007 0.0000 0.0037 0.0051 0.0000 0.0000
0.0134 0.0050 0.0028 0.0033 0.0215 0.0193 0.0246 0.0108 0.0132 0.0081
0.0136 0.0191 0.0433 0.0249 0.0422 0.0260 0.0311 0.0255 0.0717 0.2191
0.0104 0.0000 0.0893 0.0291 0.0000 0.0000 0.0049 0.0009 0.0023 0.0057
0.0123 0.0037 0.0059 0.0126 0.0190 0.0081 0.0527 0.0223 0.0042 0.0006
0.0020 0.0056 0.0027 0.0000 0.0398 0.0093 0.0000 -0.0000

PROBABILITA MARGINALE DELLE CODE

| | | | | | | | |
|-----------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| | N = 0 | N = 1 | N = 2 | N = 3 | N = 4 | N = 5 | N = 6 |
| Centro 1: | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0641 | 0.1503 | 0.7856 | 0.0000 |
| Centro 2: | 0.0000 | 0.0000 | 0.4762 | 0.2925 | 0.2312 | 0.0000 | 0.0000 |
| Centro 3: | 0.0762 | 0.1954 | 0.7284 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| Centro 4: | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0182 | 0.0922 | 0.8896 |

PROBABILITA DI BLOCCO

Centro 1: 0.0674
Centro 2: 0.3302
Centro 3: 0.5538
Centro 4: 0.4626

UTILIZZAZIONE EFFETTIVA

Centro 1: 0.9326
Centro 2: 0.6698
Centro 3: 0.3699
Centro 4: 0.5374

THROUGHPUT

Centro 1: 0.9326
Centro 2: 1.3396
Centro 3: 1.1098
Centro 4: 1.0747

LUNGHEZZA CODA

Centro 1: 4.7215
Centro 2: 2.7550
Centro 3: 1.6522
Centro 4: 5.8714

TEMPO RESIDENZA

Centro 1: 5.0628
Centro 2: 2.0566
Centro 3: 1.4887
Centro 4: 5.4632

- $M=5; N=15; B=[5,4,2,6,3]; MU=[1.0,2.0,3.0,2.0,1.0]$

Calcolo spazio degli stati per reti con blocco BAS
 La capacità complessiva \tilde{A} : 20
 IL MIO SPAZIO CONSTA DI 495 STATI

```
(5, 0, [0]) (4, 0, [0]) (2, 0, [0]) (4, 0, [0]) (0, 0, [0])
(5, 1, [0]) (4, 0, [1]) (2, 0, [0]) (4, 0, [0]) (0, 0, [0])
(5, 1, [0]) (4, 1, [1]) (2, 0, [2]) (4, 0, [0]) (0, 0, [0])
(5, 0, [0]) (4, 1, [0]) (2, 0, [2]) (4, 0, [0]) (0, 0, [0])
(5, 0, [0]) (4, 0, [0]) (2, 0, [0]) (3, 0, [0]) (1, 0, [0])
(5, 0, [5]) (4, 0, [0]) (2, 0, [0]) (3, 0, [0]) (1, 1, [0])
(5, 1, [5]) (4, 0, [1]) (2, 0, [0]) (3, 0, [0]) (1, 1, [0])
(5, 0, [5]) (4, 1, [0]) (2, 0, [2]) (3, 0, [0]) (1, 1, [0])
(5, 1, [0]) (4, 0, [1]) (2, 0, [0]) (3, 0, [0]) (1, 0, [0])
(5, 1, [5]) (4, 0, [1]) (2, 0, [0]) (3, 0, [0]) (1, 1, [0])
(5, 1, [0]) (4, 1, [1]) (2, 0, [2]) (3, 0, [0]) (1, 0, [0])
(5, 0, [0]) (4, 1, [0]) (2, 0, [2]) (3, 0, [0]) (1, 0, [0])
(5, 0, [5]) (4, 1, [0]) (2, 0, [2]) (3, 0, [0]) (1, 1, [0])
(5, 1, [0]) (4, 1, [1]) (2, 0, [2]) (3, 0, [0]) (1, 0, [0])
(5, 0, [0]) (4, 0, [0]) (2, 0, [0]) (2, 0, [0]) (2, 0, [0])
(5, 0, [5]) (4, 0, [0]) (2, 0, [0]) (2, 0, [0]) (2, 1, [0])
(5, 1, [5]) (4, 0, [1]) (2, 0, [0]) (2, 0, [0]) (2, 1, [0])
(5, 0, [5]) (4, 1, [0]) (2, 0, [2]) (2, 0, [0]) (2, 1, [0])
(5, 1, [0]) (4, 0, [1]) (2, 0, [0]) (2, 0, [0]) (2, 1, [0])
(5, 1, [0]) (4, 1, [1]) (2, 0, [2]) (2, 0, [0]) (2, 0, [0])
(5, 0, [0]) (4, 1, [0]) (2, 0, [2]) (2, 0, [0]) (2, 0, [0])
(5, 0, [5]) (4, 1, [0]) (2, 0, [2]) (2, 0, [0]) (2, 1, [0])
(5, 1, [0]) (4, 1, [1]) (2, 0, [2]) (2, 0, [0]) (2, 0, [0])
(5, 0, [0]) (4, 1, [0]) (2, 0, [2]) (2, 0, [0]) (2, 0, [0])
(5, 0, [5]) (4, 1, [0]) (2, 0, [2]) (2, 0, [0]) (2, 1, [0])
(5, 1, [0]) (4, 0, [1]) (2, 0, [0]) (2, 0, [0]) (2, 1, [0])
(5, 1, [0]) (4, 1, [1]) (2, 0, [2]) (2, 0, [0]) (2, 0, [0])
(5, 0, [0]) (4, 1, [0]) (2, 0, [2]) (2, 0, [0]) (2, 0, [0])
(5, 0, [5]) (4, 1, [0]) (2, 0, [2]) (2, 0, [0]) (2, 1, [0])
(5, 1, [0]) (4, 0, [1]) (2, 0, [0]) (1, 0, [0]) (3, 0, [0])
(5, 1, [5]) (4, 0, [1]) (2, 0, [0]) (1, 0, [0]) (3, 1, [0])
(5, 0, [5]) (4, 1, [0]) (2, 0, [2]) (1, 0, [0]) (3, 1, [0])
(5, 0, [5]) (4, 0, [0]) (2, 0, [0]) (1, 1, [0]) (3, 1, [4])
(5, 1, [0]) (4, 0, [1]) (2, 0, [0]) (1, 0, [0]) (3, 0, [0])
(5, 1, [5]) (4, 0, [1]) (2, 0, [0]) (1, 0, [0]) (3, 1, [0])
(5, 0, [5]) (4, 1, [0]) (2, 0, [2]) (1, 0, [0]) (3, 1, [0])
(5, 1, [5]) (4, 0, [0]) (2, 0, [0]) (1, 1, [0]) (3, 1, [4])
(5, 1, [0]) (4, 0, [1]) (2, 0, [0]) (1, 0, [0]) (3, 0, [0])
(5, 1, [5]) (4, 0, [1]) (2, 0, [0]) (1, 1, [0]) (3, 0, [4])
(5, 0, [5]) (4, 1, [0]) (2, 0, [2]) (1, 0, [0]) (3, 0, [0])
(5, 0, [5]) (4, 1, [0]) (2, 0, [2]) (1, 0, [0]) (3, 1, [0])
(5, 1, [0]) (4, 1, [1]) (2, 0, [2]) (1, 0, [0]) (3, 0, [0])
(5, 0, [0]) (4, 1, [0]) (2, 0, [2]) (1, 1, [0]) (3, 0, [4])
(5, 0, [0]) (4, 0, [0]) (1, 0, [0]) (5, 0, [0]) (0, 0, [0])
(5, 1, [0]) (4, 0, [1]) (1, 0, [0]) (5, 0, [0]) (0, 0, [0])
(5, 0, [0]) (4, 0, [0]) (1, 0, [0]) (4, 0, [0]) (1, 0, [0])
(5, 0, [5]) (4, 0, [0]) (1, 0, [0]) (4, 0, [0]) (1, 1, [0])
(5, 1, [5]) (4, 0, [1]) (1, 0, [0]) (4, 0, [0]) (1, 1, [0])
(5, 1, [0]) (4, 0, [1]) (1, 0, [0]) (4, 0, [0]) (1, 0, [0])
(5, 0, [0]) (4, 0, [0]) (1, 0, [0]) (3, 0, [0]) (2, 0, [0])
(5, 0, [5]) (4, 0, [0]) (1, 0, [0]) (3, 0, [0]) (2, 1, [0])
(5, 1, [5]) (4, 0, [1]) (1, 0, [0]) (3, 0, [0]) (2, 1, [0])
(5, 1, [0]) (4, 0, [1]) (1, 0, [0]) (3, 0, [0]) (2, 0, [0])
(5, 0, [0]) (4, 0, [0]) (1, 0, [0]) (2, 0, [0]) (3, 0, [0])
(5, 0, [5]) (4, 0, [0]) (1, 0, [0]) (2, 0, [0]) (3, 1, [0])
(5, 1, [5]) (4, 0, [1]) (1, 0, [0]) (2, 0, [0]) (3, 1, [0])
(5, 0, [5]) (4, 0, [0]) (1, 0, [0]) (2, 1, [0]) (3, 1, [4])
(5, 1, [0]) (4, 0, [1]) (1, 0, [0]) (2, 0, [0]) (3, 0, [0])
(5, 1, [5]) (4, 0, [1]) (1, 0, [0]) (2, 0, [0]) (3, 1, [0])
(5, 1, [0]) (4, 0, [0]) (1, 0, [0]) (2, 1, [0]) (3, 0, [4])
(5, 0, [0]) (4, 0, [0]) (1, 0, [0]) (2, 1, [0]) (3, 0, [4])
(5, 0, [5]) (4, 0, [0]) (1, 0, [0]) (2, 1, [0]) (3, 1, [4])
```



```

(1, 0, [0]) (3, 1, [0]) (2, 1, [2]) (6, 0, [3]) (3, 0, [0])
(1, 0, [0]) (3, 0, [0]) (2, 1, [0]) (6, 1, [3]) (3, 0, [4])
(1, 0, [0]) (3, 0, [0]) (2, 0, [0]) (6, 1, [0]) (3, 0, [4])
(1, 0, [0]) (3, 1, [0]) (2, 0, [2]) (6, 1, [0]) (3, 0, [4])
(1, 0, [0]) (3, 0, [0]) (2, 1, [0]) (6, 1, [3]) (3, 0, [4])
(0, 0, [0]) (4, 0, [0]) (2, 0, [0]) (6, 0, [0]) (3, 0, [0])
(0, 0, [0]) (4, 1, [0]) (2, 0, [2]) (6, 0, [0]) (3, 0, [0])
(0, 0, [0]) (4, 1, [0]) (2, 1, [2]) (6, 0, [3]) (3, 0, [0])
(0, 0, [0]) (4, 1, [0]) (2, 0, [2]) (6, 1, [0]) (3, 0, [4])
(0, 0, [0]) (4, 0, [0]) (2, 1, [0]) (6, 0, [3]) (3, 0, [0])
(0, 0, [0]) (4, 1, [0]) (2, 1, [2]) (6, 0, [3]) (3, 0, [0])
(0, 0, [0]) (4, 0, [0]) (2, 1, [0]) (6, 1, [3]) (3, 0, [4])
(0, 0, [0]) (4, 0, [0]) (2, 0, [0]) (6, 1, [0]) (3, 0, [4])
(0, 0, [0]) (4, 1, [0]) (2, 0, [2]) (6, 1, [0]) (3, 0, [4])
(0, 0, [0]) (4, 0, [0]) (2, 1, [0]) (6, 1, [3]) (3, 0, [4])

```

PROBABILITA DI STATO:

```

0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000
0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000
0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000
0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000
0.0000 0.0001 0.0000 0.0001 0.0000 0.0000 0.0000 0.0002 0.0000 0.0000
0.0000 0.0001 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000
0.0000 0.0002 0.0002 0.0003 0.0001 0.0001 0.0003 0.0004 0.0001 0.0002
0.0004 0.0005 0.0002 0.0005 0.0003 0.0005 0.0000 0.0006 0.0003 0.0000
0.0000 0.0001 0.0001 0.0001 0.0000 0.0000 0.0001 0.0001 0.0000 0.0000
0.0001 0.0001 0.0000 0.0001 0.0000 0.0001 0.0000 0.0001 0.0000 0.0000
0.0000 0.0002 0.0004 0.0003 0.0001 0.0003 0.0001 0.0003 0.0001 0.0002
0.0002 0.0007 0.0002 0.0010 0.0003 0.0012 0.0004 0.0007 0.0007 0.0003
0.0003 0.0023 0.0010 0.0003 0.0001 0.0001 0.0003 0.0003 0.0001 0.0001
0.0004 0.0003 0.0001 0.0002 0.0002 0.0003 0.0000 0.0002 0.0002 0.0000
0.0000 0.0009 0.0002 0.0003 0.0012 0.0010 0.0003 0.0010 0.0004 0.0006
0.0006 0.0024 0.0008 0.0033 0.0012 0.0020 0.0021 0.0012 0.0002 0.0003
0.0013 0.0005 0.0000 0.0036 0.0024 0.0000 0.0000 0.0011 0.0003 0.0003
0.0007 0.0011 0.0004 0.0005 0.0006 0.0007 0.0000 0.0006 0.0006 0.0000
0.0000 0.0029 0.0010 0.0018 0.0062 0.0067 0.0015 0.0019 0.0028 0.0083
0.0033 0.0062 0.0062 0.0027 0.0009 0.0044 0.0066 0.0037 0.0017 0.0026
0.0030 0.0103 0.0051 0.0231 0.0388 0.0077 0.0000 0.0405 0.0084 0.0000
0.0000 0.0000 0.0000 0.0001 0.0001 0.0001 0.0000 0.0001 0.0001 0.0001
0.0000 0.0001 0.0001 0.0001 0.0000 0.0001 0.0000 0.0001 0.0000 0.0001
0.0000 0.0000 0.0000 0.0002 0.0001 0.0003 0.0003 0.0002 0.0001 0.0003
0.0001 0.0003 0.0001 0.0001 0.0003 0.0006 0.0005 0.0008 0.0007 0.0009
0.0009 0.0010 0.0009 0.0004 0.0003 0.0033 0.0010 0.0003 0.0004 0.0003
0.0004 0.0003 0.0003 0.0003 0.0002 0.0008 0.0010 0.0008 0.0008 0.0006
0.0018 0.0023 0.0022 0.0015 0.0007 0.0040 0.0021 0.0010 0.0009 0.0008
0.0009 0.0007 0.0006 0.0024 0.0030 0.0026 0.0020 0.0054 0.0058 0.0025
0.0009 0.0044 0.0042 0.0023 0.0017 0.0015 0.0020 0.0082 0.0054 0.0173
0.0060 0.0043 0.0059 0.0308 0.0050 0.0001 0.0000 0.0002 0.0007 0.0002
0.0000 0.0058 0.0006 0.0000 0.0000 0.0002 0.0000 0.0002 0.0003 0.0002
0.0000 0.0002 0.0003 0.0001 0.0000 0.0002 0.0000 0.0003 0.0000 0.0002
0.0001 0.0000 0.0000 0.0006 0.0003 0.0006 0.0008 0.0006 0.0003 0.0006
0.0002 0.0002 0.0006 0.0015 0.0010 0.0019 0.0015 0.0018 0.0019 0.0020
0.0009 0.0047 0.0023 0.0010 0.0011 0.0007 0.0009 0.0007 0.0006 0.0023
0.0024 0.0020 0.0016 0.0041 0.0047 0.0028 0.0011 0.0064 0.0037 0.0021
0.0024 0.0019 0.0017 0.0076 0.0047 0.0105 0.0051 0.0044 0.0013 0.0066
0.0055 0.0047 0.0000 0.0370 0.0043 0.0000 0.0000 0.0005 0.0001 0.0002
0.0007 0.0003 0.0000 0.0066 0.0011 0.0000 0.0000 0.0004 0.0001 0.0004
0.0008 0.0004 0.0001 0.0005 0.0001 0.0008 0.0000 0.0007 0.0002 0.0000
0.0000 0.0018 0.0006 0.0013 0.0021 0.0015 0.0007 0.0005 0.0013 0.0038
0.0017 0.0030 0.0041 0.0031 0.0013 0.0079 0.0038 0.0020 0.0028 0.0021
0.0015 0.0078 0.0047 0.0085 0.0048 0.0049 0.0016 0.0105 0.0086 0.0048
0.0000 0.0383 0.0043 0.0000 0.0000 0.0008 0.0001 0.0002 0.0008 0.0005
0.0000 0.0118 0.0020 0.0000 0.0000 0.0009 0.0001 0.0010 0.0002 0.0032
0.0000 0.0024 0.0006 0.0000 0.0000 0.0079 0.0012 0.0028 0.0024 0.0048
0.0000 0.0101 0.0041 0.0000 0.0000 0.0060 0.0019 0.0135 0.0108 0.0054
0.0000 0.0414 0.0045 0.0000 0.0000 0.0014 0.0008 0.0221 0.0164 0.0031
0.0000 0.0536 0.0020 0.0000 -0.0000

```

PROBABILITA MARGINALE DELLE CODE

| | N = 0 | N = 1 | N = 2 | N = 3 | N = 4 | N = 5 | N = 6 |
|-----------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| Centro 1: | 0.0994 | 0.1415 | 0.1598 | 0.1705 | 0.1640 | 0.2647 | 0.0000 |
| Centro 2: | 0.2055 | 0.1853 | 0.1825 | 0.1924 | 0.2343 | 0.0000 | 0.0000 |
| Centro 3: | 0.1011 | 0.3310 | 0.5679 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| Centro 4: | 0.0000 | 0.0001 | 0.0012 | 0.0090 | 0.0303 | 0.1066 | 0.8527 |
| Centro 5: | 0.0189 | 0.0501 | 0.1270 | 0.8040 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |

PROBABILITA DI BLOCCO

Centro 1: 0.0339
Centro 2: 0.2052
Centro 3: 0.5392
Centro 4: 0.5041
Centro 5: 0.1068

UTILIZZAZIONE EFFETTIVA

Centro 1: 0.8666
Centro 2: 0.5893
Centro 3: 0.3597
Centro 4: 0.4959
Centro 5: 0.8743

THROUGHPUT

Centro 1: 0.8666
Centro 2: 1.1785
Centro 3: 1.0791
Centro 4: 0.9919
Centro 5: 0.8743

LUNGHEZZA CODA

Centro 1: 2.9521
Centro 2: 2.0646
Centro 3: 1.4668
Centro 4: 5.8003
Centro 5: 2.7162

TEMPO RESIDENZA

Centro 1: 3.4063
Centro 2: 1.7518
Centro 3: 1.3594
Centro 4: 5.8477
Centro 5: 3.1068