Esercizio 4. Si consideri l'insieme S costituito dai numeri naturali della forma $2^a 3^b$, con $a, b \in \mathbb{N}$:

$$S = \{2^a 3^b : a, b \in \mathbb{N}\}.$$

• Si dimostri che S è una parte stabile di $(\mathbb{N}, \cdot)$, dove $\cdot$ denota l'usuale prodotto in $\mathbb{N}$.

• Si verifichi che la relazione R definita in S ponendo

$$2^a 3^b \, R \, 2^c 3^d \Leftrightarrow a = c \text{ e } b + d \in 2\mathbb{N}$$

è di equivalenza.

• Si descriva la generica classe di equivalenza $[2^a 3^b]_R =$, ed in particolare $[1]_R =$ $[2]_R =$ $[3]_R =$

• Si provi che la relazione R è compatibile con il prodotto in $\mathbb{N}$, e che quindi la posizione $[2^a 3^b]_R \cdot [2^c 3^d]_R = [2^{a+c} 3^{b+d}]_R$ definisce un'operazione binaria nell'insieme quoziente S/R.

• Dimostrare che $(S/R, \cdot)$ è un monoide commutativo.

• Quali sono gli elementi invertibili del monoide $(S/R, \cdot)$?

• Si provi che l'applicazione $f : [2^a 3^b]_R \in S/R \mapsto (-1)^b a \in \mathbb{Z}$ è ben posta.

• Si provi che f è biettiva.

• Si verifichi che f non è un omomorfismo di monoidi di $(S/R, \cdot)$ in $(\mathbb{Z}, +)$, dove $+$ denota la usuale somma in $\mathbb{Z}$.