PROVE D'ESAME DEL CORSO
COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA
A.a. 2003-04

10.11.2003 - I PROVA PARZIALE A

1. Si considerino le seguenti coppie di successioni infinite; di ogni coppia dire quale successione è infinita di ordine superiore:
   (a) $n^{1/2}$, $n^{1/3}$;
   (b) $n^{\log n}$, n^2.
2. Studiare la convergenza delle seguenti serie numeriche:
   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n} \cdot \ln n}$,
   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{1 - \frac{1}{n}}$,
   (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt[4]{n} + n^2}$.
3. Studiare la convergenza della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{3^n + n^2}$.
4. Scrivere lo sviluppo di Taylor delle funzioni
   (a) $f(x) = \sin x - e^{2x}$, di ordine 3, centro 0;
   (b) $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{x}$ di ordine 2, centro 1.
5. Disegnare i grafici delle funzioni $f_n(x) = \dfrac{\operatorname{arctg}(x-n)}{n}$ per $n = 1, 2, \ldots$. Calcolare la funzione $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$.
6. Studiare la convergenza puntuale della serie di funzioni $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1+nx^2)}{n^2}$. Dire se vi è convergenza totale negli intervalli in $[0, +\infty)$ e $[0, 1]$.
7. A quale funzione converge la serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} (2n+2)(2n+1)x^{2n}$?

10.11.2003 - I PROVA PARZIALE B

1. Si considerino le seguenti coppie di successioni infinite; di ogni coppia dire quale successione è infinita di ordine superiore:
   (a) $2^{n/2}$, $3^{n/3}$;
   (b) $\log(n^{1/2} + n^{1/3})$, $\log(n^{1/3} + n^{1/4})$.
2. Studiare la convergenza delle seguenti serie numeriche:
   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{n + n!}$,
   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln n}{n^3 - n}$,

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{4}{\pi}\right)^n$.

3. Studiare la convergenza della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+10)^n}{\sqrt[3]{n}}$.

4. Scrivere lo sviluppo di Taylor delle funzioni

   (a) $f(x)=\cos x-\dfrac{1}{1+x^2}$, di ordine 4, centro 0;

   (b) $f(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{x}$ di ordine 2, centro 3.

5. Disegnare i grafici delle funzioni $f_n(x)=\dfrac{nx^2}{1+n}$ per $n=1,2,\ldots$. Calcolare la funzione $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$.

6. Studiare la convergenza puntuale della serie di funzioni $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(\frac{x}{n})}{n}$. Dire se vi è convergenza totale negli intervalli in $[0,+\infty)$ e $[0,1]$.

7. A quale funzione converge la serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$?

5.12.2003 - II PROVA PARZIALE A

1. Sia $f(x)=(\pi+1)-x$ in $=[-\pi,\pi)$.

   (a) Estendere f per periodicità a tutto $\mathbf{R}$ e disegnarne il grafico.

   (b) Calcolare la serie di Fourier di f e specificarne la convergenza.

   (c) Scrivere l'uguaglianza di Parseval calcolando esplicitamente l'integrale.

2. Sia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ una funzione; fissato $a\in\mathbf{R}$ definiamo $f_a(x)=f(x-a)$. Dire che rapporto c'è tra $f_a * f_a$ e $f*f$.

3. Dare un esempio esplicito di una funzione pari f definita in $[-\pi,\pi]$ a media integrale nulla.

4. Sia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ la funzione definita da $f(x)=\sin x$ in $[0,\pi]$ e nulla altrove.

   (a) Calcolare $f*f$. Disegnare un grafico approssimativo di f e di $f*f$.

   (b) Calcolare la trasformata di Fourier $\hat{f}$ di f. Dedurre dal punto precedente la trasformata di Fourier di $f*f$.

   (c) Dalla $\hat{f}$ dedurre la trasformata di Fourier della funzione $h:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ definita da $h(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ in $[-\pi/2,\pi/2]$ e nulla altrove.

5.12.2003 - II PROVA PARZIALE B

1. Sia $f(x)=x-(\pi+1)$ in $=[-\pi,\pi)$.

   (a) Estendere f per periodicità a tutto $\mathbf{R}$ e disegnarne il grafico.

   (b) Calcolare la serie di Fourier di f e specificarne la convergenza.

   (c) Scrivere l'uguaglianza di Parseval calcolando esplicitamente l'integrale.

2. Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione; fissato $a \in \mathbf{R}$ definiamo $f_a(x) = f(x/a)$. Dire che rapporto c'è tra $f_a * f_a$ e $f * f$.

3. Dare un esempio esplicito di una funzione dispari f definita in $[-\pi, \pi]$ a media integrale 1.

4. Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la funzione definita da $f(x) = \cos x$ in $[-\pi/2, \pi/2]$ e nulla altrove.

   (a) Calcolare $f * f$. Disegnare un grafico approssimativo di f e di $f * f$.

   (b) Calcolare la trasformata di Fourier $\hat{f}$ di f. Dedurre dal punto precedente la trasformata di Fourier di $f * f$.

   (c) Dalla $\hat{f}$ dedurre la trasformata di Fourier della funzione $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definita da $h(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ in $[0, \pi]$ e nulla altrove.

9.12.2003 - I PROVA D'ESAME A

1. Trovare una successione $\{a_n\}$ che soddisfi le seguenti due condizioni:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{3^n} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n^3} = +\infty.$$

2. Studiare la convergenza delle serie

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1+3n^2}$;

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{1+n}$.

3. Calcolare il raggio e l'insieme di convergenza della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{2n}}$.

4. Calcolare il polinomio di Taylor di grado 2 e centro 1 della funzione $f(x) = 3\sqrt[3]{1+x^2}$. Tracciare un grafico approssimativo della funzione e del polinomio nell'intorno del punto in questione.

5. Calcolare il polinomio di Taylor di grado 2 e centro $(1, 0)$ della funzione di due variabili $f(x, y) = x^2 y$.

6. Calcolare col principio di similitudine una soluzione del problema

$$\begin{cases} \partial_x^2 u + \partial_y^2 u = 0 \\ u(0, y) = \sin y, \quad \partial_x u(0, y) = 0. \end{cases}$$

7. Sia $f_1(x)$ la funzione definita da x in $]-1, 1]$ e nulla altrove; disegnare il grafico di f_1.

   (a) Calcolare la trasformata di Fourier della funzione f_1.

   (b) Sia f_2 la funzione definita da x in $]-1, 1]$ e da $x - 2$ in $]1, 3]$. Disegnare il grafico di f_2. Calcolare la trasformata di f_2 deducendola da quella di f_1.

   (c) Come si potrebbe definire "f_n"? Quale sarebbe la sua trasformata di Fourier?

9.12.2003 - I PROVA D'ESAME B

1. Trovare una successione $\{a_n\}$ che soddisfi le seguenti due condizioni:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = +\infty, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n\sqrt{n}} = 0.$$

2. Studiare la convergenza delle serie

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + \ln n}$;

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n!}$.

3. Calcolare il raggio e l'insieme di convergenza della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (1+n)x^n$.

4. Calcolare il polinomio di Taylor di grado 2 e centro 1 della funzione $f(x) = xe^{x^2}$. Tracciare un grafico approssimativo della funzione e del polinomio nell'intorno del punto in questione.

5. Calcolare il polinomio di Taylor di grado 2 e centro $(0, 1)$ della funzione di due variabili $f(x, y) = xy^2$.

6. Calcolare col principio di similitudine una soluzione del problema

$$\begin{cases} \partial_x^2 u - \partial_y^2 u = 0 \\ u(0, y) = -\sin y, \quad \partial_x u(0, y) = 0. \end{cases}$$

7. Sia $f_1(x)$ la funzione definita da $-x$ in $]-1, 1]$ e nulla altrove; disegnare il grafico di f_1.

   (a) Calcolare la trasformata di Fourier della funzione f_1.

   (b) Sia f_2 la funzione definita da $-x$ in $]-1, 1]$ e da $-x + 2$ in $]1, 3]$. Disegnare il grafico di f_2. Calcolare la trasformata di f_2 deducendola da quella di f_1.

   (c) Come si potrebbe definire "f_n"? Quale sarebbe la sua trasformata di Fourier?

18.12.2003 - II PROVA D'ESAME A

1. Provare che la successione $a_n = n \sin(\frac{\pi}{2} + n\pi)$ non ha limite. Trovare una successione b_n tale che $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.

2. Studiare la convergenza delle serie numeriche

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2 + e^n}{3^n}$,

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{n!}$.

3. Si considerino le seguenti serie trigonometriche:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \sin(nx) + (-1)^n \cos nx \right)$;

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{2^n}$;

   Provare che la prima non può essere la serie di Fourier di nessuna funzione regolare a tratti. Indicata con f la somma della seconda, calcolare $\displaystyle\int_0^{\pi} f^2(x)\, dx$.

4. Qual'è la somma della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n}}{n 2^n}$?

5. Sia f la funzione definita da $f(x) = -\frac{1}{\epsilon}x + 1$ in $[0, \epsilon]$ e nulla altrove.
   (a) Disegnare il grafico di f.
   (b) Calcolare la sua trasformata di Fourier.
   (c) Dedurre la trasformata di Fourier della funzione $g(x) = f(x) + f(-x)$.
   (d) Dedurre la trasformata di Fourier della funzione g'.
   (e) Disegnare il grafico di g.
   (f) Calcolare la trasformata di Laplace di f, specificandone il semipiano di convergenza.

18.12.2003 - II PROVA D'ESAME B

1. Provare che la successione $a_n = \ln n \cdot \cos(\pi n)$ non ha limite. Trovare una successione b_n tale che $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.
2. Studiare la convergenza delle serie numeriche
   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n e^n}{\sqrt{n} + 10^n}$,
   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n3^n}$.
3. Si considerino le seguenti serie trigonometriche:
   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{1/n} \sin(nx) + \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx \right)$;
   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{3^n}$;

   Provare che la prima non può essere la serie di Fourier di nessuna funzione regolare a tratti. Indicata con f la somma della seconda, calcolare $\displaystyle\int_0^{\pi} f^2(x)\, dx$.
4. Qual'è la somma della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{3n}}{n!}$?
5. Sia f la funzione definita da $f(x) = \frac{1}{\epsilon}x - 1$ in $[0, \epsilon]$ e nulla altrove.
   (a) Disegnare il grafico di f.
   (b) Calcolare la sua trasformata di Fourier.
   (c) Dedurre la trasformata di Fourier della funzione $g(x) = f(x) - f(-x)$.
   (d) Dedurre la trasformata di Fourier della funzione g'.
   (e) Disegnare il grafico di g.
   (f) Calcolare la trasformata di Laplace di f, specificandone il semipiano di convergenza.

22.03.2004 - PROVA D'ESAME

1. Scrivere la serie di Fourier della funzione definita in $[-1,1]$ da

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & -1 \le x < 0 \\ 1-x & 0 \le x \le 1, \end{cases}$$

e prolungata per periodicità a tutto $\mathbf{R}$. Disegnare il grafico di f. Discutere la convergenza della serie di Fourier.

2. Studiare le successioni di funzioni:

(a) $f_n(x) = e^{-x} \cos\left(\frac{x}{n}\right)$;

(b) $g_n(x) = e^{-nx} \cos x$.

Studiare poi la convergenza puntuale delle serie di funzioni $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} g_n$.

3. Calcolare il raggio e l'insieme di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\log n) x^n.$$

4. Fissato un valore reale C, dire per quali valori reali A, B lo sviluppo di Mac Laurin al secondo ordine di $A \cos x + B \cos(2x)$ coincide con quello di $C(\cos(2x) + \cos(3x))$.

5. Calcolare $e^{-x^2} * x$.

6. Sia $f(x) = x^2$ in $[0,1[$; si prolunghi per periodicità la funzione in $[0,+\infty[$, e si definisca $f(x) = 0$ per $x \le 0$. Calcolare la trasformata di Laplace di f.

7. Scrivere la formula di Parseval (relativa alla trasformata di Fourier) per la funzione $x^2 f$, adoperando quindi le proprietà della trasformata di Fourier per semplificare l'espressione ottenuta.

29.03.2004 - PROVA D'ESAME

1. Scrivere la serie di Fourier in forma complessa della funzione definita in $[-\pi,\pi]$ da

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi \le x < 0 \\ x & 0 \le x \le \pi, \end{cases}$$

e prolungata per periodicità a tutto $\mathbf{R}$.

2. Calcolare $e^{-x} * \chi_{[0,1]}(x)$. Interpretare il risultato della convoluzione come l'area di una regione piana; si disegni questa regione deducendola dai grafici delle funzioni e^{-x} e $\chi_{[0,1]}(x)$. Si può applicare alla convoluzione di sopra la formula $\widehat{f * g} = \hat{f} \cdot \hat{g}$?

3. Scrivere lo sviluppo di Mac Laurin di ordine 3 della funzione $f(x) = e^x \cos x$. Stimare l'errore che si fa considerando il polinomio di Mac Laurin di ordine 2, invece della funzione, nell'intervallo $[-1,1]$.

4. Si consideri la successione di funzioni

$$f_n(x) = \begin{cases} n \sin(nx) & \text{se } x \in [-\pi/n, \pi/n] \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

Calcolare la trasformata di Fourier di f_n. Cosa accade se $n \to \infty$?

5. Studiare la convergenza delle serie di funzioni $\sum_{n=1}^{\infty} \left(x - \frac{1}{n}\right) \frac{1}{n^{\alpha}}$ per $\alpha = 1, 2$.

6. Studiare l'insieme di convergenza e la funzione somma delle serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n-1)!}$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}$.

8.6.2004 - PROVA D'ESAME

1. Studiare la convergenza delle serie
   (a) $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{n!}{3^n}$,
   (b) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{2^n}{n!}$.
2. Sia data la funzione definita in $[-1,1[$ da $f(x) = -x$ e prolungata poi per periodicità a tutto $\mathbf{R}$. Disegnare il grafico di f, calcolare la serie di Fourier di f, studiarne la convergenza.
3. Scrivere lo sviluppo di McLaurin di ordine 4 della funzione $\cos x$. Dedurre lo sviluppo di ordine 4 di $\cos^2 x$. Determinare una semplice funzione $f(x)$ tale che $\cos(f(x)) = 1 - x + \dfrac{x^2}{6} + o(x^2)$.
4. Sia $f(x) = \dfrac{H(x)}{1+x}$. Calcolare $f(x) * \chi_{[-1,1]}(x)$.
5. Studiare la convergenza puntuale e totale in $\mathbf{R}$ delle serie di funzioni:
   (a) $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx^2} \sin(nx)$
   (b) $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx^2} \dfrac{1}{n+x^2}$.
6. Sia $f(x)$ la funzione definita in $[0,2[$ da

$$f_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [0,1) \\ 0 & \text{se } x \in [1,2) \end{cases}$$

   e prolungata per periodicità a tutto $\mathbf{R}$. Calcolare la trasformata di Laplace della funzione Hf.

6.7.2004 - PROVA D'ESAME

1. Sia f la funzione definita in $[-1,1[$ da $f(x) = e^{|x|}$, e prolungata poi per periodicità a tutto $\mathbf{R}$. Disegnare il grafico di f. Scrivere la serie di Fourier di f.
2. Studiare il carattere delle serie seguenti:
   (a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(e^{-n} + \frac{1}{2}\right)^n$
   (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2}$.
3. Sia $f(x) = \log(1 + \sin x)$. Scrivere il polinomio di Mac Laurin di ordine 3 di f; scrivere il polinomio di Taylor di ordine 2 e di centro $x_0 = \pi/2$ di f.
4. Studiare la convergenza della serie di potenze $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(x-1)^{n/2}}{n}$; calcolarne la somma specificando l'insieme di convergenza.
5. Sia f la funzione definita da $f(x) = x^3$ in $[0,1]$ e nulla altrove.
   (a) Calcolare la trasformata di Laplace di f;

(b) dedurre la trasformata di Fourier di f;

(c) calcolare $f * \chi_{[0,1]}$.

16.09.2004 - PROVA D'ESAME

1. Scrivere la serie di Fourier della funzione definita in $[-2, 2)$ da

$$f(x) = \begin{cases} -1 & -2 \leq x < -1 \\ x & -1 \leq x < 1 \\ 1 & 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

e prolungata per periodicità a tutto $\mathbf{R}$. Disegnare il grafico di f. Discutere la convergenza della serie di Fourier.

2. Calcolare il raggio e l'insieme di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2x+3)^n}{n^2}.$$

3. Sia $f(x) = 1 - (x-1)^2$ in $[0, 2[$; si prolunghi per periodicità la funzione in $[0, +\infty[$, e si definisca $f(x) = 0$ per $x \leq 0$. Calcolare la trasformata di Laplace di f.

4. Trovare, usando il principio di similitudine, una soluzione del problema
$$\begin{cases} \partial^2_{tt} u - 2\partial_t u - \partial^2_{xx} u = 0 \\ u(0, x) = \sin x \\ \partial_t u(0, x) = 2 \sin x. \end{cases}$$

5. Studiare la convergenza delle serie

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!}{2^n}$,

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n \cdot 3^n}$.