CORSO DI STUDI IN MATEMATICA
PROVE SCRITTE DI ANALISI MATEMATICA III, A.A. 2003-4.

Prova scritta del 28/01/04.

1. Determinare e classificare i punti critici della seguente funzione, dopo averne stabilito il dominio:

$$f(x,y) = \arctan\sqrt{x} + (x-1)\,y.$$

2. Data la curva di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = \cos(2\pi t) + 1, \\ y = (t-1)^2, \\ -1 \leqslant t \leqslant 3, \end{cases}$$

stabilire se è chiusa e/o regolare.

Determinare la molteplicità del punto $(2,1)$.

3. Determinare una funzione $\alpha : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ tale che la forma differenziale

$$\omega = \big(\cos x + \alpha(y)\big)dx + xy^{-2}\,(\sin y - y\cos y)\,dy$$

risulti esatta in $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$.

È posssibile estendere la forma differenziale così ottenuta ad una forma differenziale esatta in tutto $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$?

4. Calcolare il seguente integrale doppio:

$$\iint_S \frac{|y|\cos y^2}{x^2}\,dxdy,$$

con

$$S = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \ : \ -1 \leqslant y\sqrt{x} \leqslant 1,\ 1 < x < 4\right\}.$$

5. Enunciare e dimostrare la diseguaglianza di Cauchy-Schwartz.

6. Sia f una funzione di due variabili derivabile lungo ogni direzione uscente da un punto $\mathbf{a}$.

- f è continua in $\mathbf{a}$?
- f è differenziabile in $\mathbf{a}$?

Motivare la risposta.

Prova scritta del 11/02/04.

1. Calcolare la lunghezza della curva C di equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = 2 + t\cos t, \\ y = 1 - t\sin t, \\ z = \frac{2\sqrt{2}}{3}\,t\sqrt{t}, \\ 0 \leqslant t \leqslant \pi. \end{cases}$$

2. Data la funzione

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{\sin(y^2)}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}, & \text{se } (x,y)\neq(1,0),\\ 0, & \text{se } (x,y)=(1,0),\end{cases}$$

a) calcolare le derivate parziali dove esistono;

b) studiare la continuità di f;

c) studiare a continuità delle derivate parziali nel loro dominio di esistenza.

3. Data la forma differenziale

$$\omega=\frac{dx}{\sqrt{y^2-x^2}}-\frac{x\,dy}{y\sqrt{y^2-x^2}},$$

a) calcolare $\int\limits_{C_1}\omega$, dove C_1 è il segmento

$$\begin{cases}y=1,\\ -\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\frac{1}{2};\end{cases}$$

b) stabilire se ω è esatta nell'insieme $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ y>|x|\}$;

c) utilizzando i punti a) e b), calcolare $\int\limits_{C_2}\omega$, dove C_2 è la curva di equazioni parametriche:

$$\begin{cases}x=\frac{1}{2}\cos t,\\ y=1+\frac{1}{2}\sin t,\\ 0\leqslant t\leqslant\pi.\end{cases}$$

4. Calcolare il seguente integrale triplo:

$$\iiint\limits_S z\,dxdydz,$$

con

$$S=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ :\ 1-z^2\leqslant x^2+y^2\leqslant 1,\ 0\leqslant z\leqslant 4\right\}.$$

5. Enunciare il teorema di derivazione sotto il segno d'integrale.

6. Sia $\mathbf{f}:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ una funzione di una variabile a valori vettoriali ed integrabile. Dimostrare che

$$\left\|\int_a^b\mathbf{f}\,dt\right\|\leqslant\int_a^b\|\mathbf{f}\|\ dt.$$

Prova scritta del 26/02/04.

1. Trovare e classificare i punti critici della funzione

$$f(x,y)=x^{2y}-2xy$$

nell'insieme $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ x>0\}$.

2. Data la curva definita come intersezione delle superfici:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 5, \\ z = \sqrt{y^2 + 1}, \end{cases}$$

a) trovare le equazioni parametriche della curva percorsa nel verso individuato dai seguenti punti $(2, 0, 1)$, $\left(0, -\sqrt{2}, \sqrt{3}\right)$, $(-2, 0, 1)$;

b) calcolare il versore tangente in $\left(\sqrt{2}, 1, \sqrt{2}\right)$.

3. Data la forma differenziale

$$\omega = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2 - \alpha y^2}}\, dx + \frac{2\alpha^3 y}{\sqrt{1 - x^2 - \alpha y^2}}\, dy$$

a) trovare i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui la forma è chiusa;

b) in corispondenza di ciascun valore trovato al punto a):

(a) individuare il dominio D di ω,

(b) stabilire se D è connesso,

(c) stabilire se D è stellato.

4. Interscambiando i limiti di integrazione, calcolare il seguente integrale iterato:

$$\int_0^1 \left(\int_{y^2}^{y^{\frac{2}{3}}} y \cos\left(x^2\right) dx \right) dy.$$

5. Enunciare delle condizioni sufficienti affinchè una funzione su un sottoinsieme compatto di $\mathbb{R}^2$ sia integrabile.

6. Sia data una funzione ϕ differenziabile in un aperto $S \subset \mathbb{R}^n$ ed una curva $C \subset S$ differenziabile a tratti e con estremi.

Nell'ipotesi che $d\phi$ sia integrabile lungo C,

a) dire quanto vale $\int\limits_C d\phi$,

b) dimostrare il risultato.

Prova scritta del 16/06/04.

1. Sia $\alpha \in \mathbb{R}^+$ un numero assegnato e si consideri la seguente funzione:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\log(1+|x|-y)}{(x^2+y^2)^\alpha}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

a) Determinarne il dominio al variare di α.

b) Studiarne la continuità nell'origine al variare di α.

2. Calcolare la lunghezza della curva

$$\begin{cases} \mathbf{r}(t) = \left(\log t + \frac{1}{t}\right) \mathbf{i} + (t-1)^2\, \mathbf{j} + 2\,(t - \log t)\, \mathbf{k}, \\ \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant \frac{3}{2}. \end{cases}$$

3. Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_A \big(x + \cos(x-y)\big)dxdy,$$

dove
$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y + x > 0,\ x \leqslant \frac{\pi}{2},\ y \leqslant \frac{\pi}{2}\right\}.$$

4. Data la forma differenziale

$$\omega = \left(1 + \frac{y^3}{x^2}\right) dx + \left(y - \frac{3y^2}{x}\right) dy,$$

trovare gli insiemi connesi su cui è esatta. Calcolarne la primitiva che assume il valore $\frac{1}{2}$ nel punto $(1,1)$.

5. Enunciare il teorema della continuità di un integrale dipendente da un parametro.

6. Dimostare che una forma differenziale ω, definita su un sottoinsieme S di $\mathbb{R}^n$, si scrive in modo unico come

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} f_i \, dx_i,$$

con $f_i : S \to \mathbb{R}$ per $i = 1, \ldots, n$.

Prova scritta del 09/07/04.

1. Determinare e classificare i punti critici della seguente funzione

$$f(x,y) = x + y^2 + \frac{1}{y} + \frac{y}{x}.$$

2. Stabilire se la curva

$$\begin{cases} \mathbf{r}(t) = \left(t^4 - t^2\right) \mathbf{i} + \sin(\pi t) \, \mathbf{j}, \\ -2 \leqslant t \leqslant 2 \end{cases}$$

è chiusa e regolare.

Determinare la molteplicità dell'origine.

3. Calcolare l'integrale triplo

$$\iiint_A z \sin\left(x^2 + y^2\right) dxdydz,$$

dove

$$A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ \frac{1}{\sqrt{3}}\, x \leqslant y \leqslant x,\ y \leqslant \sqrt{4 - x^2},\ 0 < z < 2\right\}.$$

4. Calcolare
$$\int_C d\left(\left(x^2-y^2\right)^{-1}\right),$$
dove C è la curva di equazioni parameriche:
$$\begin{cases} x=\cos t, \\ y=2+3\sin t, \\ \frac{\pi}{4}\leqslant t\leqslant \frac{3\pi}{4}. \end{cases}$$

5. - Dare la definizione di sottoinsieme aperto e chiuso di $\mathbb{R}^n$.
- Dimostrare che $S\subset\mathbb{R}^n$ è chiuso se e solo se $\mathbb{R}^n\setminus S$ è aperto.

6. Dare la definizione di sottoinsieme limitato e trascurabile di $\mathbb{R}^2$.

Prova scritta del 14/09/04.

1. Calcolare l'integrale curvilineo
$$\int_C xy\,ds,$$
essendo $C=C_1+C_2+C_3$, con C_1 circonferenza di equazioni parametriche
$$\begin{cases} x=1+\cos\theta, \\ y=2+\sin\theta, \\ 0\leqslant\theta\leqslant\pi, \end{cases}$$
C_2 segmento congiungente $(0,2)$ con $(2,0)$ e C_3 segmento congiungente $(2,0)$ con $(2,2)$.

2. Data la funzione
$$f(x,y)=\begin{cases} x+\sin\frac{x^3y}{x^6+y^2}, & \text{se } (x,y)\neq(0,0), \\ 0, & \text{se } (x,y)=(0,0), \end{cases}$$

a) stabilire se è continua nell'origine,

b) calcolarne le derivate parziali nell'origine, qualora esistano.

3. Calcolare l'integrale doppio
$$\iint_A \frac{dxdy}{xy},$$
dove
$$A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ y^4\leqslant x\leqslant\sqrt[6]{y},\ \tfrac{1}{2}\leqslant y\leqslant 1\right\}.$$

4. Data la forma differenziale
$$\omega=\left(4x^3y+xy^3\right)dx+\left[x^4+\phi(xy)\right]dy,$$
determinare la funzione in *una* variabile $\phi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tale che ω sia esatta e $\phi(0)=1$.

Calcolare poi la primitiva $U(x,y)$ di ω tale che $U(1,1)=3$.

5. Dare la definizione di norma in $\mathbb{R}^n$ ed enunciarne e dimostrane le proprietà fondamentali.

6. Enunciare il teorema riguardante il cambiamento di variabili negli integrali doppi.