Esonero di Analisi Matematica II (A)

Ingegneria Edile, 28 aprile 2003

Michele Campiti

1. Studiare la convergenza del seguente integrale improprio:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x\ \log^3 x}{(x-1)^3}\, dx\ .$$

2. Studiare la convergenza puntuale ed uniforme della seguente successione di funzioni:

$$f_n(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\, x^n\right)\ , \qquad x \in [-1, 1]\ .$$

3. Studiare massimi e minimi relativi della seguente funzione:

$$f(x, y) = x^2\, y - x\, y^3\ .$$

Esonero di Analisi Matematica II (B)

Ingegneria Edile, 28 aprile 2003

Michele Campiti

1. Studiare la convergenza del seguente integrale improprio:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2\ \log^2 x}{(x-1)^4}\, dx\ .$$

2. Studiare la convergenza puntuale ed uniforme della seguente successione di funzioni:

$$f_n(x) = x^n\ e^{-nx}\ , \qquad x \in \mathbf{R}_+\ .$$

3. Studiare massimi e minimi relativi della seguente funzione:

$$f(x,y) = y^2\, x - y\, x^3\ .$$

Soluzione esonero di Analisi Matematica II (A)
Ingegneria Edile, 28 aprile 2003

Michele Campiti

1. Bisogna discutere l'integrabilità in un intorno dei punti 0, 1 e $+\infty$. Per quanto riguarda il punto 0, si osserva che $\lim_{x\to 0^+} x\log^3 x/(x-1)^3 = 0$ in quanto il fattore x è un infinitesimo di ordine 1 mentre $\log^3 x$ è un infinito di ordine arbitrariamente piccolo. Pertanto la funzione è limitata in un intorno di 0 e quindi è integrabile.

Nel punto 1 risulta analogamente

$$\lim_{x\to 1} \frac{x\ \log^3 x}{(x-1)^3} = \lim_{x\to 1} \left(\frac{\log x}{x-1}\right)^3 = \lim_{y\to 0} \left(\frac{\log(1+y)}{y}\right)^3 = 1\ ,$$

(dove si è posto $y = x-1$) e quindi anche in un intorno di 1 la funzione è limitata e conseguentemente integrabile.

Infine, per quanto riguarda il comportamento in un intorno di $+\infty$, la funzione integranda è il prodotto di un infinitesimo di ordine 2 (la funzione $x/(x-1)^3$) con un infinito di ordine arbitrariamente piccolo (la funzione $\log^3 x$). Pertanto, la funzione è un infinitesimo di ordine minore di 2, ma maggiore di $2-\varepsilon$ per ogni $0 < \varepsilon < 2$; in particolare, la funzione è un infinitesimo di ordine maggiore di $3/2$ e quindi, per il criterio di integrabilità sull'ordine di infinitesimo, la funzione è assolutamente integrabile in un intorno di $+\infty$.

Si conclude che la funzione in esame è integrabile in un intorno di ciascuno dei punti 0, 1 e $+\infty$ e quindi è integrabile in senso improprio in tutto l'intervallo $[0,+\infty[$.

2. Per ogni $x \in [-1,1]$, risulta

$$\lim_{n\to+\infty} x^n = \begin{cases} 0\ , & x \in]-1,1[\ ; \\ 1\ , & x = 1\ ; \\ \nexists\ , & x = -1\ . \end{cases}$$

Conseguentemente, la successione in esame converge puntualmente in $]-1,1]$ verso la funzione $f :]-1,1] \to \mathbf{R}$ definita ponendo, per ogni $x \in]-1,1]$,

$$f(x) = \begin{cases} 0\ , & x \in]-1,1[\ ; \\ 1\ , & x = 1\ . \end{cases}$$

Poichè ogni f_n è continua, mentre la funzione f non lo è nel punto 1, la convergenza non può essere uniforme in tutto $]-1,1]$.

D'altra parte, si ha

$$(f_n - f)'(x) = n\ \frac{\pi}{2} x^{n-1}\ \cos\left(\frac{\pi}{2}\, x^n\right)\ , \qquad x \in]-1, 1[\ ,$$

e quindi l'unico punto interno all'intervallo $]-1,1]$ in cui si annulla la derivata prima di $f_n - f$ è il punto 0; poichè $f_n(0) - f(0) = 0$, l'estremo superiore di $|f_n - f|$ viene dato dal comportamento di $|f_n - f|$ agli estremi. Risulta, per ogni $n \geq 1$, $\lim_{x\to\pm1} |f_n(x) - f(x)| = 1$, da cui $\sup_{x\in]-1,1]} |f_n(x) - f(x)| = 1$ e quindi la convergenza non può essere uniforme nell'intervallo $]-1,1]$.

Infine, se si considera $0 < a < 1$, si ha

$$\sup_{x\in[-a,a]} |f_n(x) - f(x)| = \max\{f_n(-a) - f(-a), f_n(a) - f(a)\} = \sin\left(\frac{\pi}{2}\, a^n\right) \quad (< +\infty)$$

e conseguentemente $\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[-a,a]} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n\to+\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2}\, a^n\right) = 0$, da cui la convergenza uniforme di $(f_n)_{n\geq1}$ verso la funzione nulla in ogni intervallo $[-a, a] \subset]-1, 1[$ (e quindi in ogni intervallo chiuso e limitato contenuto in $]-1, 1[$).

3. La funzione in esame è definita in tutto $\mathbf{R}^2$ ed è derivabile parzialmente sia rispetto alla variabile x che rispetto alla variabile y in ogni elemento di $\mathbf{R}^2$; per ogni $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, si ha $f_x(x, y) = 2xy - y^3$ e $f_y(x, y) = x^2 - 3xy^2$. Poichè le derivate parziali sono definite e continue in tutto $\mathbf{R}^2$, dal teorema del differenziale totale segue che f è differenziabile in ogni punto di $\mathbf{R}^2$. Conseguentemente, i punti di massimo e di minimo relativo sono necessariamente punti stazionari per f. Poichè le derivate parziali di f si annullano entrambe solamente nel punto $(0, 0)$, vi può essere un massimo oppure un minimo relativo per f solamente in tale punto. Osservato che f è derivabile parzialmente rispetto ad entrambe le variabili infinite volte in tutto $\mathbf{R}^2$, dal calcolo delle derivate parziali seconde di f, si ottiene facilmente, per ogni $(x, y) \in \mathbf{R}^2$

$$f_{xx}(x, y) = 2y\ , \qquad f_{xy}(x, y) = 2x - 3y^2\ , \qquad f_{yy}(x, y) = -6xy\ ,$$

e quindi la matrice hessiana nel punto $(0, 0)$ è la matrice nulla; pertanto, la condizione necessaria sui minori dell'hessiano è soddisfatta, ma non quella sufficiente e ciò non consente di concludere nulla. Tuttavia, tenendo presente che la funzione f si annulla in $(0, 0)$, un'analisi diretta del segno di f in un intorno di $(0, 0)$ consente di concludere che $(0, 0)$ non è un punto di massimo nè di minimo relativo per f. Infatti, ad esempio, poichè $f(x, y) = xy(x - y^2)$, si può osservare che se $x \leq 0$ si ha sicuramente $x - y^2 \leq 0$ e conseguentemente il segno di f è positivo nel terzo quadrante e negativo nel secondo (a causa del segno del fattore xy); pertanto, in ogni intorno di $(0, 0)$ la funzione assume sia valori strettamente positivi che valori strettamente negativi e si conclude che il punto $(0, 0)$ non può essere di massimo nè di minimo relativo per f. (Alternativamente, si può studiare il comportamento di f su una generica retta $y = mx$ passante per l'origine. Risulta $f(x, mx) = mx^3(1 - m^2x)$ e per $x < 1/m^2$, il segno di f dipende da quello di x e dal segno del coefficiente angolare della retta considerata, per cui si giunge alla stessa conclusione precedente.)

Soluzione esonero di Analisi Matematica II (B)

Ingegneria Edile, 28 aprile 2003

Michele Campiti

1. Bisogna discutere l'integrabilità in un intorno dei punti 0, 1 e $+\infty$. Per quanto riguarda il punto 0, si osserva che $\lim_{x\to 0^+} x^2 \log^2 x/(x-1)^4 = 0$ in quanto il fattore x^2 è un infinitesimo di ordine 2 mentre $\log^2 x$ è un infinito di ordine arbitrariamente piccolo. Pertanto la funzione è limitata in un intorno di 0 e quindi è integrabile.

Nel punto $+\infty$, la funzione integranda è il prodotto di un infinitesimo di ordine 2 (la funzione $x^2/(x-1)^4$) con un infinito di ordine arbitrariamente piccolo (la funzione $\log^2 x$). Pertanto, la funzione è un infinitesimo di ordine minore di 2, ma maggiore di $2-\varepsilon$ per ogni $0<\varepsilon<2$; in particolare, la funzione è un infinitesimo di ordine maggiore di $3/2$ e quindi, per il criterio di integrabilità sull'ordine di infinitesimo, la funzione è assolutamente integrabile in un intorno di $+\infty$.

Infine, nel punto 1 la funzione è il rapporto di un infinitesimo di ordine 2 (la funzione $x^2\ \log^2 x$) con un infinitesimo di ordine 4 (la funzione $(x-1)^4$) e quindi è un infinito di ordine 2. Dal criterio sull'ordine di infinito, la funzione non è integrabile in un intorno di 1.

Non essendo verificata l'integrabilità in senso improprio in un intorno di uno dei punti da discutere, si conclude che l'integrale improprio in esame non è convergente.

2. Per ogni $x \in [0,+\infty[$, risulta

$$\lim_{n\to+\infty} x^n\ e^{-nx} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{x}{e^x}\right)^n = 0$$

(infatti, per ogni $x \in [0,+\infty[$ risulta $0 \le x/e^x < 1$ in quanto il grafico di e^x si trova al di sopra della retta di equazione $y = x$). Quindi la successione $(f_n)_{n\ge1}$ converge puntualmente in $[0,+\infty[$ verso la funzione $f \equiv 0$.

Inoltre, per ogni $n \ge 1$, $|f_n - f| = f_n$ e poichè f_n è derivabile per ogni $x \in [0,+\infty[$ e si ha

$$f_n'(x) = e^{-nx}(nx^{n-1} - nx^n) = nx^{n-1}e^{-nx}(1-x)$$

si deduce che $|f_n - f|$ è strettamente crescente in $[0,1]$ e strettamente decrescente in $[1,+\infty[$ per cui $\sup_{x\in[0,+\infty[} |f_n(x) - f(x)| = f_n(1) = e^{-n}$; poichè

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[0,+\infty[} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n\to+\infty} e^{-n} = 0\ ,$$

si deduce che la successione $(f_n)_{n\ge1}$ converge uniformemente verso la funzione nulla in tutto l'intervallo $[0,+\infty[$.

3. Tale esercizio si ottiene dalla traccia A scambiando le due variabili x ed y.

Esonero di Analisi Matematica II (A)

Ingegneria Edile, 23 giugno 2003

Michele Campiti

1. Calcolare il seguente integrale doppio:

$$\iint_A x\,y^2\,dx\,dy\ ,$$

dove $A = C \setminus T$ con

$$C = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq 1\}\ ,$$

$$T = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 1\}\ .$$

2. Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y''' - 2y'' + y' - 2y = 0\ , \\ y(\pi) = 0\ , \\ y'(\pi) = 1\ , \\ y''(\pi) = 0\ . \end{cases}$$

Esonero di Analisi Matematica II (B)

Ingegneria Edile, 23 giugno 2003

Michele Campiti

1. Calcolare il seguente integrale doppio:

$$\iint_A x^3\, y\, dx\, dy\ ,$$

dove $A = Q \setminus C$ con

$$Q = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}\ ,$$

$$C = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \ge 0,\ y \ge 0,\ x^2 + y^2 \le 1\}\ .$$

2. Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y^{(IV)} - 8y'' - 9y = 0\ , \\ y(0) = 10\ , \\ y'(0) = 0\ , \\ y''(0) = 10\ , \\ y'''(0) = 0\ . \end{cases}$$

Soluzione esonero di Analisi Matematica II (A)

Ingegneria Edile, 23 giugno 2003

Michele Campiti

1. Utilizzando il cambiamento di variabili in coordinate polari, si ha

$$\iint_C x\,y^2\,dx\,dy = \int_0^1 \rho^4\,d\rho \int_0^{\pi/2} \sin^2\theta\,\cos\theta\,d\theta = \left[\frac{\rho^5}{5}\right]_0^1 \left[\frac{\sin^3\theta}{3}\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{15}\ ;$$

inoltre, dalle formule di riduzione

$$\begin{aligned}\iint_T x\,y^2\,dx\,dy &= \int_0^1 x\,dx \int_0^{1-x} y^2\,dy = \int_0^1 x\cdot\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^{1-x} dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{x}{3} - x^2 + x^3 - \frac{x^4}{3}\right) dx = \left[\frac{x^2}{6} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{15}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{6} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{15} = \frac{1}{60}\end{aligned}$$

e quindi

$$\iint_A x\,y^2\,dx\,dy = \iint_C x\,y^2\,dx\,dy - \iint_T x\,y^2\,dx\,dy = \frac{1}{15} - \frac{1}{60} = \frac{1}{20}\ .$$

2. L'equazione differenziale assegnata è lineare omogenea del terzo ordine. Il polinomio caratteristico è dato da

$$(\lambda-2)(\lambda^2+1) = 0$$

e quindi la soluzione generale dell'equazione omogenea è data da

$$y = c_1 e^{2x} + c_2\sin x + c_3\cos x\ ,\quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbf{R}\ .$$

Tenendo presente che

$$\begin{aligned} y' &= 2c_1 e^{2x} + c_2\cos x - c_3\sin x\ ,\\ y'' &= 4c_1 e^{2x} - c_2\sin x - c_3\cos x\ ,\end{aligned}$$

imponendo le condizioni iniziali si ottiene il sistema

$$\begin{cases} c_1 e^{2\pi} - c_3 = 0\ ,\\ 2c_1 e^{2\pi} - c_2 = 1\ ,\\ 4c_1 e^{2\pi} + c_3 = 0\ .\end{cases}$$

Addizionando la prima e la terza equazione si ottiene $5c_1e^{2\pi} = 0$ da cui $c_1 = 0$ e conseguentemente anche $c_3 = 0$; infine dalla seconda si ricava $c_2 = -1$ e pertanto la soluzione richiesta è data da

$$y = -\sin x\ .$$

Soluzione esonero di Analisi Matematica II (B)

Ingegneria Edile, 23 giugno 2003

Michele Campiti

1. Dalle formule di riduzione

$$\iint_Q x\,y^2\,dx\,dy = \int_0^1 x^3\,dx \int_0^1 y\,dy = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{8}\ ;$$

inoltre, utilizzando il cambiamento di variabili in coordinate polari, si ha

$$\iint_C x^3\,y\,dx\,dy = \int_0^1 \rho^5\ d\rho \int_0^{\pi/2} \cos^3\theta\,\sin\theta\,d\theta = \left[\frac{\rho^6}{6}\right]_0^1 \left[-\frac{\cos^4\theta}{4}\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{24}\ ;$$

e quindi

$$\iint_A x\,y^2\,dx\,dy = \iint_Q x\,y^2\,dx\,dy - \iint_C x\,y^2\,dx\,dy = \frac{1}{8} - \frac{1}{24} = \frac{1}{12}\ .$$

2. L'equazione differenziale assegnata è lineare omogenea del quarto ordine. Il polinomio caratteristico è dato da

$$(\lambda-3)(\lambda+3)(\lambda^2+1) = 0$$

e quindi la soluzione generale dell'equazione omogenea è data da

$$y = c_1e^{3x} + c_2e^{-3x} + c_3\sin x + c_4\cos x\ , \quad c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbf{R}\ .$$

Tenendo presente che

$$\begin{aligned} y' &= 3c_1e^{3x} - 3c_2e^{-3x} + c_3\cos x - c_4\sin x\ , \\ y'' &= 9c_1e^{3x} + 9c_2e^{-3x} - c_3\sin x - c_4\cos x\ , \\ y''' &= 27c_1e^{3x} - 27c_2e^{-3x} - c_3\cos x + c_4\sin x\ , \end{aligned}$$

imponendo le condizioni iniziali si ottiene il sistema

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_4 = 10\ , \\ 3c_1 - 3c_2 + c_3 = 0\ , \\ 9c_1 + 9c_2 - c_4 = 10\ , \\ 27c_1 - 27c_2 - c_3 = 0\ . \end{cases}$$

Addizionando la prima e la terza equazione si ottiene $c_1 + c_2 = 2$ e sommando la seconda e la quarta si ottiene $c_1 - c_2 = 0$; pertanto $c_1 = c_2 = 1$ e conseguentemente, dalla prima e dalla seconda equazione, si ricava anche $c_3 = 0$ e $c_4 = 8$; pertanto la soluzione richiesta è data da

$$y = e^{3x} + e^{-3x} + 8\cos x\ .$$

Esame di Analisi Matematica II

Ingegneria Edile, 24 febbraio 2003

Michele Campiti

1. Studiare la convergenza puntuale ed uniforme della seguente successione di funzioni:

$$f_n(x) = \arctan \frac{nx^2+1}{n^2x^2+1} \; .$$

2. Determinare il massimo ed il minimo assoluto della funzione:

$$f(x,y) = \log(xy) - x - y \; ,$$

nel quadrato D di $\mathbf{R}^2$ avente vertici

$$A \equiv \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \; , \qquad B \equiv \left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right) \; , \qquad C \equiv \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right) \; , \qquad D \equiv \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right) \; .$$

Soluzione prova scritta di Analisi Matematica II
Ingegneria Edile, 24 febbraio 2003

1. Le funzioni f_n sono definite in tutto $\mathbf{R}$. Per ogni $x \in \mathbf{R}$ si ha

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \begin{cases} \pi/4\,, & x = 0\,; \\ 0\,, & x \neq 0\,; \end{cases}$$

quindi la successione $(f_n)_{n\geq 1}$ é converge puntualmente in tutto $\mathbf{R}$. Denotata con f la funzione limite, si osserva che f non é continua in 0 mentre ogni f_n lo é e quindi la convergenza non può essere uniforme. Più in particolare, ci si può chiedere se la convergenza é uniforme in $X =]-\infty, -\delta] \cup [\delta, +\infty[$ con $\delta > 0$ fissato. Per ogni $x \in X$ risulta $|f_n(x) - f(x)| = f_n(x)$ e si riconosce facilmente che f_n ha il massimo assoluto nei punti $\pm\delta$ essendo

$$f_n'(x) = -\frac{1}{1 + \left(\frac{nx^2+1}{n^2x^2+1}\right)^2} \frac{2n(n-1)x}{(1+n^2x^2)^2}$$

(quindi f_n é crescente in $]-\infty, -\delta]$ e decrescente in $[\delta, +\infty[$) e inoltre

$$f_n(\pm\delta) = \arctan\frac{n\delta^2+1}{n^2\delta^2+1}\;;$$

poiché $\lim_{n\to+\infty} f_n(\pm\delta) = 0$, la convergenza é uniforme in X.

2. La funzione é dotata di massimo e minimo assoluto in D per il teorema di Weierstrass in quanto D é chiuso e limitato ed f é continua. La funzione é differenziabile nell'insieme $\Omega = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid xy > 0\}$ e quindi i punti di massimi e di minimo relativo interni a D sono punti stazionari per f. Annullando le derivate parziali di f si ottiene il sistema

$$\begin{cases} 1/x - 1 = 0\,, \\ 1/y - 1 = 0\,, \end{cases}$$

che ha come soluzioni il punto $A(1,1) \in D$, nel quale la funzione assume il valore $f(1,1) = -2$. A questo punto bisogna studiare i massimi e minimi sulla frontiera di D. É sufficiente considerare i due lati $s_1 = \{(x, \frac{1}{2}) \mid \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{5}{2}\}$ ed $s_2 = \{(\frac{5}{2}, y) \mid \frac{1}{2} \leq y \leq \frac{5}{2}\}$ di D in quanto f é simmetrica rispetto alla bisettrice del piano cartesiano. Su s_1 si ottiene la funzione $\varphi(x) = \log(x/2) - x - 1/2$, la cui derivata é $\varphi'(x) = 1/x - 1$; poiché quest'ultima si annulla solamente per $x = 1$, i possibili massimi e minimi relativi su s_1 si trovano nei punti $(1/2, 1/2)$, $(1, 1/2)$ e $(5/2, 1/2)$ nei quali la funzione assume rispettivamente i valori

$$f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = -1 - \log 4\,, \quad f\left(1, \frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2} - \log 2\,, \quad f\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right) = -3 + \log\frac{5}{4}\,.$$

Sul lato s_2 si ottiene la funzione $\psi(y) = \log(y/2) - y - 5/2$, la cui derivata é $\psi'(y) = 1/y - 1$; procedendo come nel caso precedente, i possibili massimi e minimi relativi su s_2 si trovano nei punti $(5/2, 1/2)$, $(5/2, 1)$ e $(5/2, 5/2)$ nei quali la funzione assume rispettivamente i valori

$$f\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right) = -3 + \log\frac{5}{4}\ , \quad f\left(\frac{5}{2}, 1\right) = -\frac{7}{2} + \log\frac{5}{2}\ , \quad f\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right) = -5 + \log\frac{25}{4}\ .$$

Confrontando i valori ottenuti, si deduce che il massimo assoluto di f in D é uguale a $-1 - \log 4$ assunto nel punto $(1/2, 1/2)$ ed il minimo assoluto é uguale a $-5 + \log(25/4)$ assunto nel punto $(5/2, 5/2)$.

Esame di Analisi Matematica II

Ingegneria Edile, 24 giugno 2003

Michele Campiti

1. Determinare le soluzioni della seguente equazione differenziale:

$$y''' - 2y'' + 2y' - y = 0 \ .$$

2. Calcolare il seguente integrale doppio:

$$\iint_D \log(xy)\, dx\, dy \ ,$$

nel triangolo D di $\mathbf{R}^2$ avente vertici

$$A \equiv (1,1) \ , \qquad B \equiv (2,1) \ , \qquad C \equiv (2,2) \ .$$

Soluzione prova scritta di Analisi Matematica II
Ingegneria Edile, 24 giugno 2003

1. L'equazione differenziale è lineare omogenea del terzo ordine ed il polinomio caratteristico è $\lambda^3 - 2\lambda^2 + 2\lambda - 1 = 0$, che ha come soluzioni

$$\lambda = 1 \, , \quad \lambda = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2} \, .$$

Pertanto, la soluzione generale dell'equazione differenziale assegnata è data da:

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{x/2} \cos \frac{3}{2} x + c_3 e^{x/2} \sin \frac{3}{2} x \, , \qquad c_1, c_2, c_3 \in \mathbf{R} \, .$$

2. Il dominio di integrazione può essere considerato normale rispetto all'asse x al modo seguente

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 2 \, , 1 \leq y \leq x\}$$

e quindi, dalle formule di riduzione per gli integrali doppi e tenendo presente che, integrando per parti,

$$\int \log(xy) \, dy = y \log(xy) - y + c \, , \quad c \in \mathbf{R} \, ,$$

si ricava

$$\begin{aligned}
\iint_D \log(xy) \, dx \, dy &= \int_1^2 dx \int_1^x \log(xy) \, dy = \int_1^2 [y \log(xy) - y]_1^x \, dx \\
&= \int_1^2 (x \log(x^2) - x - \log x + 1) \, dx \\
&= 2 \int_1^2 x \log x \, dx - \int_1^2 x \, dx - \int_1^2 \log x \, dx + \int_1^2 dx \\
&= 2 \left[\frac{x^2}{2} \log x - \frac{x^2}{4} \right]_1^2 - \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^2 - [x \log x - x]_1^2 + [x]_1^2 \\
&= 2 \left(2 \log 2 - 1 + \frac{1}{4} \right) - \left(2 - \frac{1}{2} \right) - (2 \log 2 - 2 + 1) + (2 - 1) \\
&= 2 \log 2 - 3 \, .
\end{aligned}$$

Esame di Analisi Matematica II

Ingegneria Edile, 16 luglio 2003

Michele Campiti

1. Studiare la convergenza semplice ed uniforme della seguente successione di funzioni:

$$f_n(x) = x^n e^{-nx} , \qquad x \geq 0 , \quad n \geq 0 .$$

2. Determinare il massimo ed il minimo assoluto della funzione:

$$f(x, y) = \cos^2 x \sin y ,$$

nel quadrato D di $\mathbf{R}^2$ avente vertici

$$A \equiv \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) , \qquad B \equiv \left(\frac{\pi}{2}, 0\right) , \qquad C \equiv \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) , \qquad D \equiv \left(-\frac{\pi}{2}, \pi\right) .$$

Soluzione prova scritta di Analisi Matematica II
Ingegneria Edile, 16 luglio 2003

1. Se $x = 0$, risulta ovviamente

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(0) = 0 ,$$

mentre se $x > 0$, tenendo presente che $0 < x/e^x < 1$, si ha

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{x}{e^x}\right)^n = 0 .$$

Dunque, la successione $(f_n)_{n\geq 0}$ converge puntualmente verso la funzione nulla $f = 0$ in $[0, +\infty[$.

Per quanto riguarda la convergenza uniforme, si osserva che $\sup |f_n - f| = \sup f_n$. Poichè f_n è derivabile e, per ogni $x \in [0, +\infty[$, $f_n'(x) = nx^{n-1}e^{-nx}(1 - x)$, la derivata di f_n si annulla solamente in 1 e si ha $f_n(1) = e^{-n}$; inoltre agli estremi dell'intervallo $[0, +\infty[$, risulta $f_n(0) = 0$ e $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$, per cui $\sup f_n = e^{-n}$. Allora

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\geq 0} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n\to+\infty} \sup_{x\geq 0} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} e^{-n} = 0 ,$$

e quindi la convergenza è anche uniforme in $[0, +\infty[$.

2. La funzione è continua in D che è chiuso e limitato; quindi, per il teorema di Weierstrass, esistono il massimo ed il minimo assoluto di f. Poichè f è differenziabile, è sufficiente confrontare i valori nei punti di massimo e minimo relativo interni a D con quelli assunti sulla frontiera di D. Si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2\ \cos x\ \sin x\ \sin y\ , \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \cos^2 x\ \cos y\ ,$$

e quindi l'unico punto interno a D in cui si annullano entrambe le derivate parziali è il punto $A(0, \pi/2)$ nel quale risulta $f(0, \pi/2) = 1$. Poichè sulla frontiera di D, la funzione è costantemente nulla, si conclude che il minimo assoluto di f è 0 ed è assunto su tutti i punti della frontiera, mentre il massimo assoluto è 1 ed è assunto nel punto A.