Esonero di Analisi Matematica I (A)

Ingegneria Edile, 27 novembre 2002

(Michele Campiti)

1. Studiare il seguente limite:

$$\lim_{x\to\pi/2} \frac{\cos x\ (1-\sin x)}{\tan^3\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)}\ .$$

---

2. Calcolare le seguenti radici quarte:

$$\sqrt[4]{\frac{-32i}{(1+i)^2}}\ .$$

Esonero di Analisi Matematica I (B)

Ingegneria Edile, 27 novembre 2002

(Michele Campiti)

1. Studiare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 1} \frac{2^{x^2-1} - \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{e^x - e}\ .$$

---

2. Calcolare le seguenti radici seste:

$$\sqrt[6]{16(i(1+i)(1-i))^2}\ .$$

Esonero di Analisi Matematica I (C)

Ingegneria Edile, 27 novembre 2002

(Michele Campiti)

1. Studiare il seguente limite:

$$\lim_{x\to\pi} \frac{1+\cos x}{\log\left(\sin\frac{x}{2}\right)} \ .$$

---

2. Calcolare le seguenti radici terze:

$$\sqrt[3]{4(1+i)^2} \ .$$

Soluzione esonero di Analisi Matematica I (A)

Ingegneria Edile, 27 novembre 2002

(Michele Campiti)

1. Posto $y = x - \pi/2$, si ha

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\pi/2} \frac{\cos x\ (1-\sin x)}{\tan^3\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)} &= \lim_{y\to 0} \frac{\cos\left(y+\dfrac{\pi}{2}\right)\ \left(1-\sin\left(y+\dfrac{\pi}{2}\right)\right)}{\tan^3 y} \\
&= \lim_{y\to 0} \frac{-\sin y\ (1-\cos y)}{y^3}\ \frac{y^3}{\tan^3 y} \\
&= \lim_{y\to 0} -\frac{\sin y}{y}\ \frac{1-\cos y}{y^2}\ \left(\frac{y}{\tan y}\right)^3 \\
&= -1\cdot\frac{1}{2}\cdot 1 = -\frac{1}{2}\ .
\end{aligned}$$

2. Poiché

$$1+i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\ \sin\frac{\pi}{4}\right)\ ,$$

si ha

$$(1+i)^2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\ \sin\frac{\pi}{2}\right)$$

e conseguentemente

$$\frac{-32i}{(1+i)^2} = \frac{32\left(\cos\dfrac{3\pi}{2} + i\ \sin\dfrac{3\pi}{2}\right)}{2\left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\ \sin\dfrac{\pi}{2}\right)} = 16\,(\cos\pi + i\ \sin\pi) = -16.$$

Applicando la formula di De Moivre, si ottengono le quattro radici:

$$\begin{aligned}
w_0 &= 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\ \sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}(1+i)\ , \\
w_1 &= 2\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\ \sin\frac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{2}(-1+i)\ , \\
w_2 &= 2\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\ \sin\frac{5\pi}{4}\right) = \sqrt{2}(-1-i)\ , \\
w_3 &= 2\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\ \sin\frac{7\pi}{4}\right) = \sqrt{2}(1-i)\ .
\end{aligned}$$

Soluzione esonero di Analisi Matematica I (B)

Ingegneria Edile, 27 novembre 2002

(Michele Campiti)

1. Ponendo $y = x - 1$, si ha:

$$\lim_{x\to 1} \frac{2^{x^2-1} - \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{e^x - e} = \lim_{x\to 1} \left(\frac{2^{x^2-1} - 1}{e(e^{x-1} - 1)} + \frac{1 - \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{e(e^{x-1} - 1)} \right)$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{2^{y(y+2)} - 1}{y(y+2)} \frac{y(y+2)}{e(e^y - 1)} + \lim_{y\to 0} \frac{1 - \sin\left(\frac{\pi}{2}(y+1)\right)}{e(e^y - 1)}$$

$$= \log 2 \lim_{y\to 0} \frac{y}{e^y - 1} \frac{y+2}{e} + \frac{1}{e} \lim_{y\to 0} \frac{1 - \cos\left(\frac{\pi}{2}y\right)}{\left(\frac{\pi}{2}y\right)^2} \frac{\pi^2}{4} y \frac{y}{e^y - 1}$$

$$= \frac{2}{e} \log 2 + 0 = \frac{2}{e} \log 2\ .$$

2. Si ha:

$$16(i(1+i)(1-i))^2 = 16(-1)(1-i^2)^2 = -16 \cdot 4 = -64 = 64(\cos\pi + i \sin\pi)\ ,$$

e quindi, le radici seste richieste sono date da

$$\begin{aligned}
w_0 &= 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i \sin\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} + i\ , \\
w_1 &= 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2}\right) = 2i\ , \\
w_2 &= 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i \sin\frac{5\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} + i\ , \\
w_3 &= 2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i \sin\frac{7\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} - i\ , \\
w_4 &= 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i \sin\frac{3\pi}{2}\right) = -2i\ , \\
w_5 &= 2\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i \sin\frac{11\pi}{6}\right) = \sqrt{3} - i\ .
\end{aligned}$$

Soluzione esonero di Analisi Matematica I (C)

Ingegneria Edile, 27 novembre 2002

(Michele Campiti)

1. Posto $y = x - \pi$, si ha

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\pi} \frac{1+\cos x}{\log\left(\sin\dfrac{x}{2}\right)} &= \lim_{y\to 0} \frac{1+\cos(y+\pi)}{\log\left(\sin\dfrac{y+\pi}{2}\right)} \\
&= \lim_{y\to 0} \frac{1-\cos y}{\log\left(\cos\dfrac{y}{2}\right)} = \lim_{y\to 0} \frac{1-\cos y}{\log\left(1-\left(1-\cos\dfrac{y}{2}\right)\right)} \\
&= -4 \lim_{y\to 0} \frac{1-\cos y}{y^2} \frac{\left(\dfrac{y}{2}\right)^2}{1-\cos\dfrac{y}{2}} \frac{-\left(1-\cos\dfrac{y}{2}\right)}{\log\left(1-\left(1-\cos\dfrac{y}{2}\right)\right)} \\
&= -4\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 1 = -4;.
\end{aligned}
$$

2. Si ha

$$1+1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

e conseguentemente

$$4(1+i)^2 = 8\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\,\sin\frac{\pi}{2}\right) \qquad (= 8i).$$

Dalla formula di De Moivre, le radici terze richieste sono date da

$$
\begin{aligned}
w_0 &= 8\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\,\sin\frac{\pi}{6}\right) = 4\left(\sqrt{3}+i\right)\ , \\
w_1 &= 8\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\,\sin\frac{5\pi}{6}\right) = 4\left(-\sqrt{3}+i\right)\ , \\
w_2 &= 8\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\,\sin\frac{3\pi}{2}\right) = -8i\ .
\end{aligned}
$$

Esonero di Analisi Matematica I (A)

Ingegneria Edile, 5 febbraio 2003

Michele Campiti

1. Calcolare il seguente integrale definito:

$$\int_0^{\pi/4} \sin^2(2x)\ \cos(2x)\, dx\ .$$

---

2. Studiare la convergenza della seguente serie numerica:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \log\left(1 + \sin\frac{\pi}{n}\right)\ .$$

---

3. Studiare massimi e minimi relativi ed eventualmente assoluti della seguente funzione:

$$f(x) = e^{\sin^2 x} \cos x\ .$$

Esonero di Analisi Matematica I (B)

Ingegneria Edile, 5 febbraio 2003

Michele Campiti

1. Calcolare il seguente integrale definito:

$$\int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x^2}\, dx \ .$$

---

2. Studiare la convergenza della seguente serie numerica:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{n^2+1}{n^3+1} \ .$$

---

3. Studiare massimi e minimi relativi ed eventualmente assoluti della seguente funzione:

$$f(x) = e^{\cos^2 x} \sin x \ .$$

Soluzione esonero di Analisi Matematica I (A)

Ingegneria Edile, 5 febbraio 2003

Michele Campiti

1. Posto $t = \sin(2x)$, da cui $dt = 2\cos(2x)\,dx$, si ha

$$\int_0^{\pi/4} \sin^2(2x)\cos(2x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 t^2\,dt = \frac{1}{6}\left[t^3\right]_0^1 = \frac{1}{6}\ .$$

2. La successione $(\log(1+\sin\pi/n)_{n\geq 2}$ é infinitesima e quindi la serie soddisfa la condizione necessaria per la convergenza.

Inoltre, per ogni $n \in \mathbf{N}$, tenendo presente che la funzione seno é strettamente crescente in $[0,\pi/2]$ e che $\pi/(n+1) < \pi/n$, si ha $1+\sin\pi/(n+1) < 1+\sin\pi/n$ e conseguentemente, dalla stretta crescenza della funzione logaritmo,

$$\log\left(1+\sin\frac{\pi}{n+1}\right) < \log\left(1+\sin\frac{\pi}{n}\right)\ .$$

Quindi la successione $(\log(1+\sin\pi/n))_{n\geq 2}$ é infinitesima e decrescente e pertanto, per il criterio di convergenza di Leibnitz, la serie converge semplicemente. La convergenza non é assoluta per il criterio sull'ordine di infinitesimo in quanto la successione $(\log(1+\sin\pi/n))_{n\geq 2}$ é un infinitesimo di ordine 1.

3. La funzione in esame é definita in tutto $\mathbf{R}$. Inoltre si verifica facilmente che essa é pari e periodica di periodo 2π per cui si può limitare lo studio del suo comportamento all'intervallo $[0,\pi]$.

Poiché f non é dotata di asintoti ed é derivabile, i suoi punti di massimo e di minimo relativo si ottengono tutti dall'equazione $f'(x) = 0$. Per ogni $x \in \mathbf{R}$, risulta

$$f'(x) = e^{\sin^2 x}\sin x(2\cos^2 x - 1)\ .$$

Il segno della derivata prima quindi dipende solo dal fattore $2\cos^2 x - 1$ (in quanto la funzione seno é positiva in $[0,\pi]$) e si ricava che f é strettamente crescente in ciascuno degli intervalli $[0,\pi/4]$ e $[3\pi/4,\pi]$, mentre é strettamente decrescente in $[\pi/4, 3\pi/4]$. Nel punto $\pi/4$ vi é un massimo relativo in cui la funzione assume il valore $\sqrt{2e}/2$ e nel punto $3\pi/4$ vi é un minimo relativo in cui la funzione assume il valore $-\sqrt{2e}/2$. Dalla simmetria della funzione si deduce inoltre la presenza di un ulteriore punto di minimo nel punto 0 in cui la funzione assume il valore 1 e di un ulteriore punto di massimo relativo in cui la funzione assume il valore -1. Dal confronto dei massimi e minimi relativi e tenendo presente la continuità della funzione in tutto $\mathbf{R}$, si conclude che il massimo assoluto di f é $\sqrt{2e}/2$ (assunto in tutti i punti $\pm\pi/4 + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$) mentre il minimo assoluto é $-\sqrt{2e}/2$ (assunto in tutti i punti $\pm 3\pi/4 + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$).

Soluzione esonero di Analisi Matematica I (B)

Ingegneria Edile, 5 febbraio 2003

Michele Campiti

1. Posto $t = \arctan x$, da cui $dt = dx/(1+x^2)$, si ha

$$\int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx = \int_0^{\pi/4} t\,dt = \frac{1}{2}\left[t^2\right]_0^{\pi/4} = \frac{\pi^2}{32}\ .$$

2. La successione $((n^2+1)/(n^3+1))_{n\in\mathbf{N}}$ é infinitesima e quindi la serie soddisfa la condizione necessaria per la convergenza.
Inoltre, per ogni $n \in \mathbf{N}$, si ha

$$\frac{(n+1)^2+1)}{(n+1)^3+1} < \frac{n^2+1}{n^3+1}$$

in quanto, portando tutto a secondo membro e considerando il minimo comune multiplo, si ottiene

$$\frac{n(n^3+2n^2+4n+1)}{((n+1)^3+1)(n^3+1)} > 0$$

che é ovviamente vera.

Quindi la successione $((n^2+1)/(n^3+1))_{n\in\mathbf{N}}$ é infinitesima e decrescente e pertanto, per il criterio di convergenza di Leibnitz, la serie converge semplicemente. La convergenza non é assoluta per il criterio sull'ordine di infinitesimo in quanto la successione $((n^2+1)/(n^3+1))_{n\in\mathbf{N}}$ é un infinitesimo di ordine 1.

3. La funzione in esame é definita in tutto $\mathbf{R}$. Inoltre si verifica facilmente che essa é dispari e periodica di periodo 2π per cui si può limitare lo studio del suo comportamento all'intervallo $[0,\pi]$.

Poiché f non é dotata di asintoti ed é derivabile, i suoi punti di massimo e di minimo relativo si ottengono tutti dall'equazione $f'(x) = 0$. Per ogni $x \in \mathbf{R}$, risulta

$$f'(x) = e^{\cos^2 x}\cos x(1 - 2\sin^2 x)\ .$$

Il segno della derivata prima quindi dipende dal fattore $\cos x$ che é positivo in $[0,\pi/2]$ e negativo in $[\pi/2,\pi]$ e dal fattore $1-2\sin^2 x$ che é positivo negli intervalli $[0,\pi/4]$ e $[3\pi/4,\pi]$ e negativo in $[\pi/4,3\pi/4]$. Si ricava che f é strettamente crescente in ciascuno degli intervalli $[0,\pi/4]$ e $[\pi/2,3\pi/4]$, mentre é strettamente decrescente in $[\pi/4,\pi/2]$ e $[3\pi/4,\pi]$. Nei punti $\pi/4$ e $3\pi/4$ vi sono due massimi relativi in cui la funzione assume il valore $\sqrt{2e}/2$ e nel punto $\pi/2$ vi é un minimo relativo in cui la funzione assume il valore 1. Dalla simmetria della funzione si deduce (per quanto riguarda l'intervallo $[-\pi, \pi]$), la presenza di altri due punti di minimo relativo in $-\pi/4$ e $-3\pi/4$ in cui la funzione assume il valore $-\sqrt{2e}/2$ e di un punto di massimo relativo in $-\pi/2$ in cui la funzione assume il valore -1. Dal confronto dei massimi e minimi relativi e tenendo presente la continuità della funzione in tutto $\mathbf{R}$, si conclude che il massimo assoluto di f é $\sqrt{2e}/2$ (assunto in tutti i punti $\pi/4 + 2k\pi$ e $3\pi/4 + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$) mentre il minimo assoluto é $-\sqrt{2e}/2$ (assunto in tutti i punti $-\pi/4 + 2k\pi$ e $-3\pi/4 + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$).

Esame di Analisi Matematica I

Ingegneria Edile, 13 febbraio 2003

Michele Campiti

1. Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log|1+\log x|}{\log x} \arctan \frac{e^x - 1}{e^{x^2} - 1} \; .$$

2. Studiare la seguente funzione e tracciarne approssimativamente il grafico:

$$f(x) = \log \left| \frac{x-1}{x^2-4} \right| \; .$$

Soluzione prova scritta di Analisi Matematica I
Ingegneria Edile, 13 febbraio 2003

1. Posto $y = \log x$ ed applicando la regola di l'Hôpital, si ha innanzitutto

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log|1+\log x|}{\log x} = \lim_{y\to-\infty} \frac{\log|1+y|}{y} = \lim_{y\to-\infty} \frac{1}{1+y} = 0\ ,$$

e ciò, tenendo presente che la funzione arcotangente é limitata, comporta che anche il limite in esame é uguale a 0.

2. L'argomento della funzione logaritmo é definito per $x \neq \pm 2$ ed inoltre imponendo che esso sia strettamente positivo si trova anche $x \neq 1$. Dunque la funzione é definita in $X_f = \mathbf{R} \setminus \{-2, 1, 2\}$. Essendo definita in un insieme che non é né simmetrico né periodico, la funzione non potrà verificare alcuna proprietà di simmetria né di periodicità.

Per quanto riguarda lo studio del segno della funzione, si osserva che l'equazione $f(x) \geq 0$ é equivalente alla disequazione con valore assoluto

$$\left|\frac{x-1}{x^2-4}\right| \geq 1\ ,$$

la quale a sua volta é equivalente ai seguenti sistemi

$$\left\{\frac{x-1}{x^2-4} \geq 1\ , \qquad \left\{\frac{x-1}{x^2-4} \leq -1\ .\right.\right.$$

La prima disequazione é soddisfatta nell'insieme $S_1 =]-2, (1-\sqrt{13})/2] \cup]2, (1+\sqrt{13})/2]$ e la seconda nell'insieme $S_2 = [(-1-\sqrt{21})/2, -2[\cup [(-1+\sqrt{21})/2, 2[$, per cui la funzione risulterà positiva in

$$S = \left[\frac{-1-\sqrt{21}}{2}, -2\right[\cup \left]-2, \frac{1-\sqrt{13}}{2}\right] \cup \left[\frac{-1+\sqrt{21}}{2}, 2\right[\cup \left]2, \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right]\ .$$

Si ricavano inoltre le seguenti intersezioni con gli assi

$$A\left(\frac{-1-\sqrt{21}}{2}, 0\right)\ ,\quad B\left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}, 0\right)\ ,$$

$$C\left(\frac{-1+\sqrt{21}}{2}, 0\right)\ ,\quad D\left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}, 0\right)\ ,$$

mentre l'intersezione con l'asse y é data dal punto $E(0, -\log 4)$.

La funzione in esame é composta da funzioni continue e pertanto é continua; inoltre, poiché

$$\lim_{x\to -2} f(x) = +\infty \ , \quad \lim_{x\to 1} f(x) = -\infty \ , \quad \lim_{x\to 2} f(x) = +\infty \ ,$$

le rette di equazione $x = -2$ ed $x = 2$ sono asintoti verticali in alto per f, mentre la retta di equazione $x = 1$ é un asintoto verticale in basso per f.

Nei punti $\pm\infty$ la funzione tende a $-\infty$ mentre $f(x)/x$ tende a 0 e quindi non possono esistere né asintoti orizzontali né obliqui per f.

A questo punto si osserva che la funzione é derivabile infinite volte in tutto l'insieme di definizione (infatti la funzione non é definita nel punto 1 in cui si annulla l'argomento del valore assoluto). Per ogni $x \in X_f$, si ha

$$f'(x) = -\frac{x^2 - 2x + 4}{(x-1)(x^2-4)} \ .$$

Il segno del termine $x^2 - 2x + 4$ é sempre strettamente positivo e dallo studio del segno degli altri fattori si deduce che la funzione é strettamente crescente in ognuno degli intervalli $]-\infty, -2[$ e $]1, 2[$, mentre é strettamente decrescente negli intervalli $]-2, 1[$ e $]2, +\infty[$.

Per ogni $x \in X_f$, la derivata seconda della é data da

$$f''(x) = \frac{-8 - 16x + 18x^2 - 4x^3 + x^4}{(x-1)^2(x^2-4)^2}$$

e se ne omette lo studio in quanto le informazioni già raccolte consentono di tracciare approssimativamente il grafico della funzione.

Esame di Analisi Matematica I

Ingegneria Edile, 24 febbraio 2003

Michele Campiti

1. Calcolare il seguente integrale indefinito:

$$\int \frac{\sin^2 \sqrt{2x+1}\ \cos \sqrt{2x+1}}{\sqrt{2x+1}}\, dx$$

2. Studiare la seguente funzione e tracciarne approssimativamente il grafico:

$$f(x) = x \left| \frac{x-1}{x+1} \right| .$$

Soluzione prova scritta di Analisi Matematica I
Ingegneria Edile, 24 febbraio 2003

1. Posto $t = \sqrt{2x+1}$, si ha $dt = dx/\sqrt{2x+1}$ e conseguentemente

$$\int \frac{\sin^2 \sqrt{2x+1}\ \cos\sqrt{2x+1}}{\sqrt{2x+1}}\,dx = \int \sin^2 t\ \cos t\,dt = \frac{\sin^3 t}{3} + c = \frac{\sin^3 \sqrt{2x+1}}{3} + c\,,$$

con $c \in \mathbf{R}$ costante arbitraria.

2. La funzione é definita in $X_f = \mathbf{R} \setminus \{-1\}$. Poiché l'insieme di definizione non é né simmetrico né periodico, la funzione non potrà verificare alcuna proprietà di simmetria né di periodicità.

Per quanto riguarda lo studio del segno della funzione, si osserva che che esso dipende dal solo fattore x e pertanto la funzione risulterà strettamente positiva in $]0,1[\cup]1,+\infty[$, strettamente negativa in $]-\infty,-1[\cup]-1,0[$ e si annullerà nei punti

$$A(0,0)\,, \quad B(1,0)\,.$$

La funzione in esame é composta da funzioni continue e pertanto é continua. Nel punto -1 vi é un asintoto verticale in basso in quanto $\lim_{x\to-1} f(x) = -\infty$ (infatti, la funzione reciproca tende a 0 e la funzione é negativa in un intorno di -1). Inoltre,

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1\,, \quad \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - x) = \lim_{x\to\pm\infty} x\left(\frac{x-1}{x+1} - 1\right) = -2$$

e quindi la retta di equazione $y = x - 2$ é un asintoto obliquo sia a destra che a sinistra per f.

A questo punto si osserva che si può dire subito che la funzione é derivabile infinite volte in $X_f \setminus \{1\}$ e, per ogni $x \in X_f \setminus \{1\}$, si ha

$$f'(x) = \left|\frac{x-1}{x+1}\right| \frac{x^2+2x-1}{x^2-1}\,.$$

Nel punto 1 la funzione non é derivabile in quanto

$$f'_+(1) = \lim_{x\to1^+} f'(x) = \frac{1}{2}\,, \qquad f'_-(1) = \lim_{x\to1^-} f'(x) = -\frac{1}{2}\,,$$

e quindi 1 é un punto angoloso per f.

Dallo studio del segno della derivata prima, si deduce che la funzione é strettamente crescente negli intervalli $]-\infty,-1-\sqrt{2}]$, $]-1,-1+\sqrt{2}]$ e $[1,+\infty[$ ed é strettamente decrescente negli intervalli $[-1-\sqrt{2},-1[$ e $[-1+\sqrt{2},1]$. I punti $-1\pm\sqrt{2}$ sono di massimo relativo per f nei quali la funzione assume i valori

$$f\left(-1-\sqrt{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-1-\sqrt{2}\right)\left(2+\sqrt{2}\right)\ ,$$

$$f\left(-1+\sqrt{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-1+\sqrt{2}\right)\left(2-\sqrt{2}\right)\ .$$

Infine, per ogni $x\in X_f\setminus\{1\}$, si ha

$$f''(x)=\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\frac{4}{(x-1)(x+1)^2}\ .$$

Dallo studio del segno della derivata seconda si deduce che f é strettamente convessa in $[1,+\infty[$ e strettamente concava negli intervalli $]-\infty,-1[$ e $]-1,1]$. Non vi sono punti di flesso per f.

Esame di Analisi Matematica I

Ingegneria Edile, 9 aprile 2003

Michele Campiti

1. Studiare il seguente limite:

$$\lim_{x\to+\infty} x^{3/2} \arccos e^{-1/x^4} \ .$$

2. Studiare la seguente funzione e tracciarne approssimativamente il grafico:

$$f(x) = x\,|x|\,e^{1-x^2} \ .$$

Soluzione prova scritta di Analisi Matematica I
Ingegneria Edile, 9 aprile 2003

1. Il limite si presenta nella forma indeterminata $+\infty \cdot 0$. Posto $y = 1/x$ ed applicando la regola di l'Hôpital, si ha

$$\lim_{x\to+\infty} x^{3/2}\arccos e^{-1/x^4} = \lim_{y\to 0} \frac{\arccos e^{-y^4}}{y^{3/2}} = \lim_{y\to 0} \frac{e^{-y^4}(-4y^3)}{\frac{3}{2}\sqrt{1-e^{-2y^4}}\,y^{1/2}}$$

$$= -\frac{8}{3}\lim_{y\to 0}\frac{y^{5/2}}{\sqrt{1-e^{-2y^4}}} = -\frac{8}{3}\lim_{y\to 0}\sqrt{\frac{2y^4}{1-e^{-2y^4}}}\;\frac{y^{5/2}}{\sqrt{2y^4}}$$

$$= -\frac{4\sqrt{2}}{3}\lim_{y\to 0}\sqrt{\frac{-2y^4}{e^{-2y^4}-1}}\;\sqrt{y} = -\frac{4\sqrt{2}}{3}\lim_{y\to 0}\sqrt{y} = 0\,.$$

2. La funzione è definita in tutto $\mathbf{R}$ ed è dispari per cui ci si può limitare a studiarla in $\mathbf{R}_+$ in cui si ha, per ogni $x \in \mathbf{R}_+$, $f(x) = x^2 e^{1-x^2}$. Si riconosce direttamente che f è positiva in $\mathbf{R}_+$ e si annulla solamente in 0. La funzione è continua e quindi non vi sono asintoti verticali mentre, tenendo presente che nei punti $\pm\infty$, il fattore $x|x|$ è un infinito di ordine 2 mentre e^{1-x^2} è un infinitesimo di ordine arbitrariamente grande, si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$$

e quindi la retta di equazione $y = 0$ è un asintoto orizzontale sia a sinistra che a destra per f. La funzione è sicuramente derivabile in $\mathbf{R}^*$ e risulta, per ogni $x \in \mathbf{R}^*$,

$$f'(x) = \begin{cases} 2x(1-x^2)e^{1-x^2}\,, & x > 0\,, \\ -2x(1-x^2)e^{1-x^2}\,, & x > 0\,. \end{cases}$$

Pertanto $\lim_{x\to 0} f'(x) = 0$ e quindi f è derivabile anche in 0 con $f'(0) = 0$. Il segno della derivata prima risulta strettamente positivo in $]-1,1[\setminus\{0\}$ e quindi f è strettamente crescente in $[-1,1]$ ed è strettamente decrescente in ognuno degli intervalli $]-\infty,-1]$ e $[1,+\infty[$. Vi è un solo punto di massimo relativo (che è anche assoluto) nel punto 1 in cui f assume il valore 1 ed un solo punto di minimo relativo (che è anche assoluto) in cui f assume il valore -1. Infine, f è derivabile due volte in $\mathbf{R}^*$ e si ha, per ogni $x \in \mathbf{R}^*$,

$$f''(x) = \begin{cases} 2(2x^4-5x^2+1)e^{1-x^2}\,, & x > 0\,, \\ -2(2x^4-5x^2+1)e^{1-x^2}\,, & x > 0\,. \end{cases}$$

Nel punto 0 la funzione non è derivabile due volte in quanto

$$f''_+(0) = \lim_{x\to 0^+} f''(x) = 2e\,, \qquad f''_-(0) = \lim_{x\to 0^-} f''(x) = -2e\,.$$

Il segno della derivata seconda risulta positivo negli intervalli

$$\left[-\infty, -\frac{1}{2}\sqrt{5+\sqrt{17}}\right] \quad , \quad \left[-\frac{1}{2}\sqrt{5-\sqrt{17}}, 0\right] \quad ,$$

$$\left[0, \frac{1}{2}\sqrt{5-\sqrt{17}}\right] \quad , \quad \left[\frac{1}{2}\sqrt{5+\sqrt{17}}, +\infty\right]$$

nei quali la funzione è strettamente convessa, mentre risulta strettamente concava in

$$\left[-\frac{1}{2}\sqrt{5+\sqrt{17}}, -\frac{1}{2}\sqrt{5-\sqrt{17}}\right] \quad , \quad \left[\frac{1}{2}\sqrt{5-\sqrt{17}}, \frac{1}{2}\sqrt{5+\sqrt{17}}\right] \quad .$$

I punti $\pm\sqrt{5+\sqrt{17}}/2$ e $\pm\sqrt{5-\sqrt{17}}/2$ sono di flesso proprio per f.

Dalle informazioni raccolte si può tracciare agevolmente il grafico della funzione.

Esame di Analisi Matematica I

Ingegneria Edile, 24 giugno 2003

Michele Campiti

1. Calcolare le radici quarte del numero complesso:

$$z = \frac{(1+i)^6}{(1-i)^2}\ .$$

2. Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to+\infty} \log \frac{x^3}{(e^{1/x}-1)e^x}\ .$$

Soluzione prova scritta di Analisi Matematica I
Ingegneria Edile, 24 giugno 2003

1. In forma trigonometrica, si ha $1 + i = \sqrt{2}(\cos \pi/4 + i \sin \pi/4)$ e $1 - i = \sqrt{2}(\cos -\pi/4 + i \sin -\pi/4)$ da cui

$$(1+i)^6 = 8\left(\cos \frac{3}{2}\pi + i \sin \frac{3}{2}\pi\right) , \qquad (1-i)^2 = 2\left(\cos -\frac{\pi}{2} + i \sin -\frac{\pi}{2}\right)$$

e pertanto $z = 4(\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = 4(\cos 0 + i \sin 0) = 4$. Dalla formula sulle radici n-esime, si ottengono direttamente le seguenti radici quarte:

$$w_0 = \sqrt{2}(\cos 0 + i \sin 0) = \sqrt{2} , \qquad w_1 = \sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2}i ,$$

$$w_2 = \sqrt{2}(\cos \pi + i \sin \pi) = -\sqrt{2} , \qquad w_3 = \sqrt{2}\left(\cos \frac{3}{2}\pi + i \sin \frac{3}{2}\pi\right) = -\sqrt{2}i ,$$

2. Tenendo presente che x^3 è un infinito di ordine 3, $e^{1/x} - 1$ è un infinitesimo di ordine 1 ed e^x è un infinito di ordine arbitrariamente grande risulta

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{(e^{1/x} - 1)e^x} = 0$$

e conseguentemente

$$\lim_{x \to +\infty} \log \frac{x^3}{(e^{1/x} - 1)e^x} = -\infty .$$

Esame di Analisi Matematica I

Ingegneria Edile, 16 luglio 2003

Michele Campiti

1. Studiare la seguente funzione e tracciarne approssimativamente il grafico:

$$f(x) = e^{\sqrt{2}\ \sin x}\ \cos x\ .$$

2. Calcolare il seguente integrale:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{\sin x} \cos x\, dx\ .$$

Soluzione prova scritta di Analisi Matematica I
Ingegneria Edile, 16 luglio 2003

1. La funzione è definita in tutto $\mathbf{R}$ ed è periodica di periodo 2π. La funzione non è simmetrica e quindi è necessario studiarla nell'intervallo $Y = [-\pi, \pi]$.

Il segno della funzione dipende solo dal fattore $\cos x$ e pertanto nell'insieme Y, f è positiva in $[-\pi/2, \pi/2]$ e negativa in $[-\pi, -\pi/2] \cup [\pi/2, \pi]$; le intersezioni con gli assi sono date dai punti $A(-\pi/2, 0)$, $B(\pi/2, 0)$ e $C(0, 1)$.

Trattandosi di una funzione continua e periodica (non costante), non possono esistere asintoti verticali, orizzontali oppure obliqui. La funzione è infinite volte derivabile e, per ogni $x \in \mathbf{R}$, risulta

$$f'(x) = e^{\sqrt{2}\sin x}(-\sin x + \sqrt{2}\cos^2 x) = -e^{\sqrt{2}\sin x}(\sqrt{2}\sin^2 x + \sin x - \sqrt{2}) \; .$$

Il segno di f' dipende pertanto dal fattore $\sqrt{2}\sin^2 x + \sin x - \sqrt{2}$; posto $t = \sin x$, si ottiene la disequazione $\sqrt{2}t^2 + t - \sqrt{2} \geq 0$, che è soddisfatta per $t \leq -\sqrt{2}$ e per $t \geq \sqrt{2}/2$; quindi risulta $f'(x) \geq 0$ per $-\sqrt{2} \leq \sin x \leq \sqrt{2}/2$; la prima di tali diseguaglianze è sempre soddisfatta, mentre per la seconda bisogna considerare l'insieme

$$\bigcup_{k \in \mathbf{Z}} \left[-\frac{5}{4}\pi + 2k\pi, \frac{\pi}{4} + 2k\pi \right] \; .$$

Quindi in Y, la funzione è strettamente crescente in ognuno degli intervalli $[-\pi, \pi/4]$ e $[3\pi/4, \pi]$ ed è strettamente decrescente in $[\pi/4, 3\pi/4]$.

Conseguentemente, vi è un massimo relativo (anche assoluto) nel punto $D(\pi/4, \sqrt{2}\; e/2)$ ed un minimo relativo (anche assoluto) nel punto $E(3\pi/4, \sqrt{2}\; e/2)$.

Per quanto riguarda lo studio della convessità, della concavità e dei punti di flesso, tenendo presente che f è infinite volte derivabile, è sufficiente considerare il segno della derivata seconda. Per semplicità, ci si limita ad semplicemente ad osservare che, per ogni $x \in \mathbf{R}$, risulta

$$f''(x) = e^{\sqrt{2}\sin x}\cos x(1 - 3\sqrt{2}\;\sin x - 2\sin^2 x) \; .$$

2. Posto $t = \sin x$, risulta

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{\sin x}\cos x \, dx = \int_{-1}^{1} e^t \, dt = \left[e^t\right]_{-1}^{1} = e - \frac{1}{e} \; .$$