Esonero di Analisi Matematica I (A)

Ingegneria Edile, 19 dicembre 2000

(Michele Campiti)

1. Studiare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log^2\left(\cos\sqrt{x}\right)\ \left(\sqrt[3]{1-x}-1\right)}{\mathrm{e}^{(x^3)}-1}.$$

---

2. Dire per quali numeri complessi entrambe le radici quadrate hanno la stessa parte reale ed immaginaria (sono cioè del tipo $w_{0,1} = a(1+\mathrm{i})$ con $a \in \mathbf{R}$). Calcolare inoltre le radici quarte di -1.

Esonero di Analisi Matematica I (B)

Ingegneria Edile, 19 dicembre 2000

(Michele Campiti)

1. Studiare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left(\sqrt[3]{1+\sqrt{\operatorname{tg} x}}\ -\ 1\right)\operatorname{sen}\sqrt{x}}{\log(\cos\sqrt{x})}.$$

---

2. Dire per quali numeri complessi le radici quadrate hanno parte reale ed immaginaria l'una opposta all'altra (sono cioè del tipo $w_{0,1} = a(1-\mathrm{i})$ con $a \in \mathbf{R}$). Calcolare inoltre le radici terze di i.

Esonero di Analisi Matematica I (A)

Ingegneria Civile, 21 dicembre 2000

(Michele Campiti)

1. Studiare il seguente limite:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2+\operatorname{sen} x}{x^2\ \mathrm{e}^x}.$$

---

2. Si determinino le soluzioni della seguente equazione:

$$\mathrm{i}\ \cos(\mathit{Re}\, z) + 1 = \operatorname{sen}(\mathit{Im}\, z).$$

Inoltre studiare i casi in cui il cubo di un numero complesso risulta essere un numero reale.

Esonero di Analisi Matematica I (B)

Ingegneria Civile, 21 dicembre 2000

(Michele Campiti)

1. Studiare il seguente limite:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\log x\ \cos^2 x}.$$

---

2. Si determinino le soluzioni della seguente equazione:

$$\mathrm{i}\ \mathrm{tg}\,(\mathit{Re}\, z) + \mathrm{sen}\,(\mathit{Im}\, z) = \mathrm{i} - 1.$$

Inoltre studiare i casi in cui il quadrato di un numero complesso risulta essere un numero immaginario puro.

Soluzione esonero di Analisi Matematica I (A)
Ingegneria Edile, 19 dicembre 2000

1. Si ha

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{\log^2\left(\cos\sqrt{x}\right)\,\left(\sqrt[3]{1-x}-1\right)}{\mathrm{e}^{(x^3)}-1}\\
&\quad=-\lim_{x\to 0}\left(\frac{\log\left(1+(\cos\sqrt{x}-1)\right)}{\cos\sqrt{x}-1}\right)^2\left(\frac{\cos\sqrt{x}-1}{x}\right)^2\frac{\left(\sqrt[3]{1-x}-1\right)}{-x}\,\frac{x^3}{\mathrm{e}^{(x^3)}-1}\\
&\quad=-1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{3}\cdot 1=-\frac{1}{12}.
\end{aligned}
$$

---

2. Il quadrato deve essere del tipo $z=a^2(1+\mathrm{i})^2=2a^2\mathrm{i}$ e quindi si tratta di tutti i soli i numeri complessi appartenenti all'asse immaginario positivo.

Le radici quarte di $-1=\cos\pi+\mathrm{i}\operatorname{sen}\pi$ sono date da:

$$
w_0=\cos\pi/4+\mathrm{i}\operatorname{sen}\pi/4=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+\mathrm{i}),\quad w_1=\cos 3\pi/4+\mathrm{i}\operatorname{sen}3\pi/4=\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+\mathrm{i}),
$$

$$
w_2=\cos 5\pi/4+\mathrm{i}\operatorname{sen}5\pi/4=\frac{\sqrt{2}}{2}(-1-\mathrm{i}),\quad w_3=\cos 7\pi/4+\mathrm{i}\operatorname{sen}7\pi/4=\frac{\sqrt{2}}{2}(1-\mathrm{i}).
$$

Soluzione esonero di Analisi Matematica I (B)
Ingegneria Edile, 19 dicembre 2000

1. Si ha

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt[3]{1+\sqrt{\operatorname{tg} x}}\ -\ 1\right)\operatorname{sen}\sqrt{x}}{\log(\cos\sqrt{x})}\\
&\quad=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{\operatorname{tg} x}}\ -\ 1}{\sqrt{\operatorname{tg} x}}\ \sqrt{\frac{\operatorname{tg} x}{x}}\ \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\ \frac{x}{\log(\cos\sqrt{x})}\\
&\quad=\frac{1}{3}\ \lim_{x\to 0}\frac{x}{\cos\sqrt{x}-1}\,\frac{\cos\sqrt{x}-1}{\log\left(1+(\cos\sqrt{x}-1)\right)}\\
&\quad=\frac{1}{3}\cdot(-2)\cdot 1=-\frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

---

2. Il quadrato deve essere del tipo $z=a^2(1-\mathrm{i})^2=-2a^2\mathrm{i}$ e quindi si tratta di tutti i soli i numeri complessi appartenenti all'asse immaginario negativo.

Le radici terze di $\mathrm{i}=\cos\pi/2+\operatorname{sen}\pi/2$ sono date da

$$w_0=\cos\pi/6+\operatorname{sen}\pi/6=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i},\qquad w_1=\cos 5\pi/6+\operatorname{sen}5\pi/6=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i},$$

$$w_2=\cos 3\pi/2+\operatorname{sen}3\pi/2=-\mathrm{i}.$$

Soluzione esonero di Analisi Matematica I (A)
Ingegneria Civile, 21 dicembre 2000

1. La funzione reciproca tende ovviamente a 0 in quanto x^2 è un infinito di ordine 2 mentre e^x è un infinitesimo di ordine arbitrariamente grande. Poichè la funzione è sempre positiva, il limite assegnato è uguale a $+\infty$.

---

2. Uguagliando le parti reali ed immaginarie, si ottengono le equazioni

$$1 = \operatorname{sen}(\mathit{Im}\, z), \qquad \cos(\mathit{Re}\, z) = 0.$$

Pertanto

$$\mathit{Im}\, z = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \qquad \mathit{Re}\, z = \frac{\pi}{2} + h\pi, \qquad h, k \in \mathbf{Z},$$

da cui le soluzioni

$$z = \frac{\pi}{2} + h\pi + \mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), \qquad h, k \in \mathbf{Z}.$$

Per la seconda parte bisogna osservare che si tratta di trovare le radici terze dei numeri reali. Se il numero reale è positivo, esse hanno argomenti principali $0, 2\pi/3, -2\pi/3$; se il numero reale è negativo, esse hanno argomenti principali $\pi/3, \pi, -\pi/3$. In definitiva, hanno cubo reale tutti i numeri complessi che in forma trigonometrica hanno uno dei seguenti argomenti principali:

$$0, \quad \frac{\pi}{3}, \quad \frac{2\pi}{3}, \quad \pi, \quad -\frac{\pi}{3}, \quad -\frac{2\pi}{3}.$$

Soluzione esonero di Analisi Matematica I (B)
Ingegneria Civile, 21 dicembre 2000

1. La funzione reciproca tende ovviamente a 0 in quanto x è un infinito di ordine 1 mentre $\log x$ è un infinito di ordine arbitrariamente piccolo. Poichè la funzione è sempre positiva, il limite assegnato è uguale a $+\infty$.

---

2. Uguagliando le parti reali ed immaginarie, si ottengono le equazioni

$$\operatorname{sen}(Im\, z) = -1, \qquad \operatorname{tg}(Re\, z) = 1.$$

Pertanto

$$Im\, z = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \qquad Re\, z = \frac{\pi}{4} + h\pi, \qquad h, k \in \mathbf{Z},$$

da cui le soluzioni

$$z = \frac{\pi}{4} + h\pi + \mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), \qquad h, k \in \mathbf{Z}.$$

Per la seconda parte bisogna osservare che si tratta di trovare le radici quadrate dei numeri immaginari puri. Se il numero si trova sull'asse immaginario positivo, esse hanno argomenti principali $\pi/4$ e $-3\pi/4$; se il numero si trova sull'asse immaginario negativo, esse hanno argomenti principali $3\pi/4$ e $-\pi/4$. In definitiva, hanno quadrato immaginario puro tutti i numeri complessi che in forma trigonometrica hanno uno dei seguenti argomenti principali:

$$\frac{\pi}{4}, \quad \frac{3\pi}{4}, \quad -\frac{\pi}{4}, \quad -\frac{3\pi}{4}.$$

Esonero di Analisi Matematica I (A)

Ingegneria Civile & Edile, 23 gennaio 2001

(Michele Campiti)

1. Si calcoli il seguente integrale indefinito:

$$\int e^{\cos x} \operatorname{sen}(2x)\, dx \ .$$

---

2. Studiare i massimi e minimi relativi ed eventualmente assoluti della seguente funzione:

$$f(x) = \frac{(2\ \log x - 9)\ x}{\log x} \ .$$

Esonero di Analisi Matematica I (B)

Ingegneria Civile & Edile, 23 gennaio 2001

(Michele Campiti)

1. Si calcoli il seguente integrale indefinito:

$$\int \log(\cos x)\ \operatorname{sen}(2x)\, dx\ .$$

---

2. Studiare i massimi e minimi relativi ed eventualmente assoluti della seguente funzione:

$$f(x) = \frac{x\ \log x}{2\ \log x - 1}\ .$$

Soluzione esonero di Analisi Matematica I (A)
Ingegneria Civile & Edile, 23 gennaio 2001

1. Posto $t = \cos x$ e integrando successivamente per parti, si ha

$$\int e^{\cos x} \ \mathrm{sen}\, 2x \ dx = 2 \int e^{\cos x} \ \mathrm{sen}\, x \ \cos x \ dx = -2 \int t \ e^t \ dt = -2t \ e^t + 2 \int e^t \ dt$$

$$= -2 \cos x \ e^{\cos x} + 2e^{\cos x} + c, \quad c \in \mathbf{R}.$$

---

2. La funzione è definita nell'insieme $X_f =]0,1[\cup]1,+\infty[$ e si ha

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0, \qquad \lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty \ .$$

Dagli ultimi tre limiti si ricava che la funzione non può essere dotata né di minimo né di massimo assoluto.

La funzione è derivabile nel suo dominio X_f e, per ogni $x \in X_f$, si ha

$$f'(x) = \frac{2 \ \log^2 x \ - 9 \ \log x \ + 9}{\log^2 x} \ .$$

Inoltre dallo studio di $f'(x)$ si ricava che la derivata prima si annulla nei punti $x = \mathrm{e}^{\frac{3}{2}}$ e $x = \mathrm{e}^3$, mentre risulta positiva in $]0,1[\cup]1, \mathrm{e}^{\frac{3}{2}}[\cup]\mathrm{e}^3, +\infty[$, e negativa in $]\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}, \mathrm{e}^3[$.

Da ciò, si può concludere che il punto $x = \mathrm{e}^{\frac{3}{2}}$ è di massimo relativo per f, mentre il punto $x = \mathrm{e}^3$ è di minimo relativo per f.

Soluzione esonero di Analisi Matematica I (B)
Ingegneria Civile & Edile, 23 gennaio 2001

1. Posto $t = \cos x$ e integrando successivamente per parti, si ha

$$\int \log(\cos x)\ \mathrm{sen}\,(2x)\,dx = 2\int \log(\cos x)\ \mathrm{sen}\,x\ \cos x\,dx$$

$$= -2\int t\,\log t\,dt = -2\frac{t^2}{2}\ \log t + 2\int \frac{t^2}{2}\,\frac{1}{t}\,dt = -\cos^2 x\ \log(\cos x) + \frac{1}{2}\cos^2 x + c, \quad c \in \mathbf{R}$$

in ogni intervallo $]-\pi/2 + 2k\pi, \pi/2 + 2k\pi[$ con $k \in \mathbf{Z}$ fissato.

---

2. La funzione è definita nell'insieme $X_f =]0, \sqrt{\mathrm{e}}[\, \cup\,]\sqrt{\mathrm{e}}, +\infty[$ e si ha

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0, \qquad \lim_{x\to\sqrt{\mathrm{e}}^-} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to\sqrt{\mathrm{e}}^+} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty\ .$$

Dagli ultimi tre limiti si ricava che la funzione non può essere dotata né di minimo né di massimo assoluto.

La funzione è derivabile nel suo dominio X_f e, per ogni $x \in X_f$, si ha

$$f'(x) = \frac{2\ \log^2 x\ - \log x\ - 1}{(2\ \log x - 1)^2}\ .$$

Inoltre dallo studio di $f'(x)$ si ricava che la derivata prima si annulla nei punti $x = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$ e $x = \mathrm{e}$, mentre risulta positiva in $]0, \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}[\, \cup\,]\mathrm{e}, +\infty[$, e negativa in $]\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}, \sqrt{\mathrm{e}}[\, \cup\,]\sqrt{\mathrm{e}}, \mathrm{e}[$.

Da ciò, si può concludere che il punto $x = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$ è di massimo relativo per f, mentre il punto $x = \mathrm{e}$ è di minimo relativo per f.

Esame di Analisi Matematica I (A)

Ingegneria Edile & Gestionale, 7 febbraio 2001

Michele Campiti

1. Studiare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos\left(\log\left(1+\sqrt{x}\right)\right)}{(1+x)^2-1}\ .$$

2. Determinare i numeri complessi che soddisfano la seguente equazione:

$$\mathrm{i} + \mathrm{Re}\, z = (1+\mathrm{i})\ \mathrm{Im}\, z\ .$$

Esame di Analisi Matematica I (B)

Ingegneria Edile & Gestionale, 7 febbraio 2001

Michele Campiti

1. Studiare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos\left(e^{\sqrt{x}}-1\right)}{\left((1+\sqrt{x})^2-1\right)^2} \, .$$

2. Determinare i numeri complessi che soddisfano la seguente equazione:

$$1 + i \,\mathrm{Im}\, z = (i-1)\,\mathrm{Re}\, z \, .$$

Esame di Analisi Matematica I (A)

Ingegneria Civile, Edile & Gestionale, 20 febbraio 2001

Michele Campiti

1. Studiare il seguente limite:

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x}\, \operatorname{sen} x \, \operatorname{sen} \frac{1}{x} \,.$$

2. Calcolare il seguente integrale indefinito:

$$\int x \, \mathrm{e}^{x^2} \, dx \,.$$

3. Studiare la convergenza della seguente serie numerica:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{sen}^3 \frac{1}{\sqrt{n}} \,.$$

Esame di Analisi Matematica I (B)

Ingegneria Civile, Edile & Gestionale, 20 febbraio 2001

Michele Campiti

1. Studiare il seguente limite:

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}\ \cos x\ \left(\mathrm{e}^{1/x} - 1\right)\ .$$

2. Calcolare il seguente integrale indefinito:

$$\int x^2 \operatorname{sen} x\ dx\ .$$

3. Studiare la convergenza della seguente serie numerica:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+1}\ .$$

Soluzione prova scritta di Analisi Matematica I
Ingegneria Civile, Edile & Gestionale, 20 febbraio 2001

(A) 1. La funzione seno è limitata e inoltre

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\,\frac{\mathrm{sen}\,1/x}{1/x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0\,.$$

Pertanto anche il limite richiesto è uguale a 0.

(A) 2. Posto $t = x^2$ (da cui $dt = 2x\,dx$), si ha:

$$\int x\,\mathrm{e}^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \mathrm{e}^t\,dt = \frac{1}{2}\mathrm{e}^t + c = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2} + c, \qquad c \in \mathbf{R}\,.$$

(A) 3. La serie è a termini positivi e quindi l'assoluta convergenza equivale a quella semplice. Inoltre $1/\sqrt{n}$ è un infinitesimo di ordine $1/2$ in $+\infty$ e viene composto con la funzione sen^3 che è un infinitesimo di ordine 3 in 0. Pertanto il termine generale della serie è un infinitesimo di ordine $3 \cdot 1/2 = 3/2$ e quindi, per il criterio sull'ordine di infinitesimo, la serie è convergente.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{sen}^3\,\frac{1}{\sqrt{n}}\,.$$

Soluzione prova scritta di Analisi Matematica I (B)
Ingegneria Edile & Gestionale, 20 febbraio 2001

(B) 1. La funzione coseno è limitata e inoltre

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}\ \left(\mathrm{e}^{1/x}-1\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\ \frac{\mathrm{e}^{1/x}-1}{1/x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\ = 0\ .$$

Pertanto anche il limite richiesto è uguale a 0.

(B) 2. Utilizzando due volte la regola di integrazione per parti, si ha:

$$\int x^2 \operatorname{sen} x\ dx = -x^2\cos x + 2\int x\ \cos x\ dx = -x^2\cos x + 2x\operatorname{sen} x + 2\int x \operatorname{sen} x\ dx$$

$$= -x^2\cos x + 2x\operatorname{sen} x - 2\cos x + c, \qquad c\in\mathbf{R}\ .$$

(B) 3. La serie è a termini positivi e quindi l'assoluta convergenza equivale a quella semplice. Inoltre il termine generale presenta al numeratore un infinitesimo di ordine $1/2$ ed al denominatore un infinitesimo di ordine 2. Pertanto il termine generale della serie è un infinitesimo di ordine $2-1/2=3/2$ e quindi, per il criterio sull'ordine di infinitesimo, la serie è convergente.

Esame di Analisi Matematica I (A)

Ingegneria Civile, Edile & Gestionale, 6 marzo 2001

Michele Campiti

1. Calcolare le radici terze del numero complesso $z = -\mathrm{i}$.

2. Studiare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x \ \log^2 x}{(1-\cos x)\ \log|\log x|} \,.$$

3. Studiare la convergenza della seguente serie numerica:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \operatorname{arctg} \frac{1}{n+1} \,.$$

Esame di Analisi Matematica I (B)

Ingegneria Civile, Edile & Gestionale, 6 marzo 2001

Michele Campiti

1. Calcolare le radici quarte del numero complesso $z = -64$.

2. Studiare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left(\sqrt{1+x}-1\right)\ \log|\log x|}{\sqrt{x}\ \log^2 x}\ .$$

3. Studiare la convergenza della seguente serie numerica:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \operatorname{sen} \frac{1}{n+1}\ .$$

Soluzione prova scritta di Analisi Matematica I
Ingegneria Civile, Edile & Gestionale, 6 marzo 2001

(A) 1. Le radici terze di $-\mathrm{i} = \cos(3\pi/2) + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,(3\pi/2)$ sono date dalla formula

$$w_k = \cos\frac{3\pi/2 + 2k\pi}{3} + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\frac{3\pi/2 + 2k\pi}{3}\ , \qquad k = 0, 1, 2$$

e quindi sono

$$w_0 = \cos\frac{\pi}{2} + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{2} = \mathrm{i}\ , \qquad w_1 = \cos\frac{7\pi}{6} + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\frac{7\pi}{6} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3} + \mathrm{i}\right)\ ,$$

$$w_2 = \cos -\frac{\pi}{6} + \mathrm{i}\,\mathrm{sen} - \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3} - \mathrm{i}\right).$$

(A) 2. Si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{sen}^2 x}{1 - \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{sen}^2 x}{x^2}\ \frac{x^2}{1 - \cos x} = 1 \cdot 2 = 2\ .$$

e inoltre, posto $t = \log x$,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log^2 x}{\log|\log x|} = \lim_{t\to -\infty} \frac{t^2}{\log|t|} = -\infty\ .$$

e quindi il limite richiesto è uguale a $-\infty$.

(A) 3. Poichè la successione

$$\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{n+1}\right)_{n\in\mathbf{N}}$$

è decrescente ed infinitesima, si può applicare il criterio di Leibnitz che fornisce la convergenza semplice della serie. La serie tuttavia non è assolutamente convergente in quanto la successione del termine generale è un infinitesimo di ordine 1.

Soluzione prova scritta di Analisi Matematica I (B)
Ingegneria Civile, Edile & Gestionale, 6 marzo 2001

(B) 1. Le radici quarte di $-64 = 64(\cos\pi + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\pi$ sono date dalla formula

$$w_k = \sqrt[4]{64}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{4} + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\frac{\pi+2k\pi}{4}\right)\ , \qquad k = 0,1,2,3$$

e quindi sono

$$w_0 = \sqrt{8}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{4}\right) = 4+4\mathrm{i}\ , \qquad w_1 = \sqrt{8}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\frac{3\pi}{4}\right) = -4+4\mathrm{i}\ ,$$

$$w_2 = \sqrt{8}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\frac{5\pi}{4}\right) = -4-4\mathrm{i}\ , \qquad w_3 = \sqrt{8}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\frac{7\pi}{4}\right) = 4-4\mathrm{i}\ .$$

(B) 2. Si ha

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+x}-1\right)}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+x}-1\right)}{x}\ \frac{x}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2}\cdot 0 = 0$$

e inoltre, posto $t = \log x$,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log|\log x|}{\log^2 x} = \lim_{t\to -\infty}\frac{\log|t|}{t^2} = 0$$

e quindi il limite richiesto è uguale a 0.

(B) 3. Poichè la successione

$$\left(\mathrm{sen}\,\frac{1}{n+1}\right)_{n\in\mathbf{N}}$$

è decrescente ed infinitesima, si può applicare il criterio di Leibnitz che fornisce la convergenza semplice della serie. La serie tuttavia non è assolutamente convergente in quanto la successione del termine generale è un infinitesimo di ordine 1.

Esame di Analisi Matematica I (A)

Ingegneria Civile, Edile & Gestionale, 3 aprile 2001

Michele Campiti

1. Studiare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \cos\sqrt{x}}{x} \, .$$

2. Calcolare il seguente integrale definito:

$$\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \, dx \, .$$

Esame di Analisi Matematica I (B)

Ingegneria Civile, Edile & Gestionale, 3 aprile 2001

Michele Campiti

1. Studiare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left(1+\sqrt{x}\right)^2 - \mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{\sqrt{1-\cos\sqrt{x}}}\ .$$

2. Calcolare il seguente integrale definito:

$$\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^3 x}\, dx\ .$$

Esame di Analisi Matematica I (A)

Ingegneria Civile & Edile, 15 maggio 2001

Michele Campiti

1. Calcolare il seguente integrale definito:

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x \ \cos x \ \operatorname{arctg}(\operatorname{sen} x) \ dx \ .$$

2. Calcolare le radici quadrate w_0 e w_1 del numero complesso i e successivamente calcolare:

$$z = \frac{(1+i)^3}{w_i} \ , \qquad i = 0, 1 \ .$$

Esame di Analisi Matematica I (B)

Ingegneria Civile & Edile, 15 maggio 2001

Michele Campiti

1. Calcolare il seguente integrale definito:

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \operatorname{sen} x \ \cos x \ \log(\operatorname{sen} x) \ dx \ .$$

2. Calcolare le radici quadrate w_0 e w_1 del numero complesso i e successivamente calcolare:

$$z = \frac{(1-i)^5}{w_i} \ , \qquad i = 0, 1 \ .$$

Esame di Analisi Matematica I (A)

Ingegneria Civile & Edile, 13 giugno 2001

Michele Campiti

1. Calcolare il seguente integrale indefinito:

$$\int x^2 \operatorname{sen} x \ \cos x \ dx \ .$$

2. Studiare il seguente limite:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log\left(1+\mathrm{e}^x\right)}{2^x} \ .$$

Esame di Analisi Matematica I (B)

Ingegneria Civile & Edile, 13 giugno 2001

Michele Campiti

1. Calcolare il seguente integrale indefinito:

$$\int x^2 \left(\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x\right) \, dx \, .$$

2. Studiare il seguente limite:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{\log\left(1 + 2^x\right)} \, .$$

Esame di Analisi Matematica I (A)

Ingegneria Civile & Edile, 3 luglio 2001

Michele Campiti

1. Calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^1 x^2 \operatorname{arctg} x^3 \; dx \; .$$

2. Studiare la convergenza semplice ed assoluta della seguente serie numerica:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}\left((-1)^n/\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n}} \; .$$

Esame di Analisi Matematica I (B)

Ingegneria Civile & Edile, 3 luglio 2001

Michele Campiti

1. Calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^{\sqrt{\pi/4}} x \operatorname{tg} x^2 \, dx \, .$$

2. Studiare la convergenza semplice ed assoluta della seguente serie numerica:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}\left((-1)^n/\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n}} \, .$$

Esame di Analisi Matematica I (A)

Ingegneria Civile & Edile, 18 settembre 2001

Michele Campiti

1. Calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x} \, dx \, .$$

2. Studiare massimi e minimi relativi ed assoluti della funzione:

$$f(x) = \operatorname{arcsen} \frac{x^2}{x+1} \, .$$

Esame di Analisi Matematica I (B)

Ingegneria Civile & Edile, 18 settembre 2001

Michele Campiti

1. Calcolare il seguente integrale:

$$\int_1^{e} \frac{\log^2 x}{x}\, dx\ .$$

2. Studiare massimi e minimi relativi ed assoluti della funzione:

$$f(x) = \arccos \frac{x^2}{x-1}\ .$$

Esame di Analisi Matematica I (A)

Ingegneria Civile & Edile, 16 ottobre 2001

Michele Campiti

1. Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{x^3} - \cos x}{x \, \sin x} \, .$$

2. Studiare massimi e minimi relativi ed assoluti della funzione:

$$f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x-1}{x^2} \, .$$

Esame di Analisi Matematica I (B)

Ingegneria Civile & Edile, 16 ottobre 2001

Michele Campiti

1. Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^3 x}{\log\cos x} \, .$$

2. Studiare massimi e minimi relativi ed assoluti della funzione:

$$f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x}{x^2-1} \, .$$

Esame di Analisi Matematica I (A)

Ingegneria Civile & Edile, 13 novembre 2001

Michele Campiti

1. Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x^2)}{\left(\arctan x(e^{\sqrt{x}}-1)\ \log x\right)^2} \ .$$

2. Calcolare il seguente integrale definito:

$$\int_0^{\pi} x \ \operatorname{sen} x \, dx \ .$$

Esame di Analisi Matematica I (B)

Ingegneria Civile & Edile, 13 novembre 2001

Michele Campiti

1. Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}\ \log\left(1+\frac{\arctan x}{x}\right)\ \log^2 x\ .$$

2. Calcolare il seguente integrale definito:

$$\int_0^\pi x\ \cos x\, dx\ .$$

Esame di Analisi Matematica I

Ingegneria Civile & Edile, 4 dicembre 2001

Michele Campiti

1. Calcolare le seguenti radici quadrate in campo complesso:

$$\sqrt{\left(\sqrt{3}-i\right)^4 \ \left(\sqrt{3}+i\right)^7} \, .$$

2. Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\log(\cos x) + e^{1/x}}{e^{\operatorname{sen} x} - \cos x} \, .$$