Esonero di Analisi Matematica I (A)

Ingegneria Edile, 20 dicembre 1999

(Michele Campiti)

1. Si determinino le soluzioni della seguente equazione:

$$\log(\cos \operatorname{Im} z) + \mathrm{i}\, \operatorname{Re} z = -\mathrm{i}.$$

2. Studiare la convergenza semplice ed assoluta della seguente serie numerica:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{2^n \sqrt{n+1}}{e^n}.$$

---

3. Studiare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\mathrm{e}^{x-1} + \cos(\pi x)}{x-1}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x + x^3 \operatorname{sen}(1/x)}{\arccos^2(1-x)}.$$

Esonero di Analisi Matematica I (B)

Ingegneria Edile, 20 dicembre 1999

(Michele Campiti)

1. Si determinino le soluzioni della seguente equazione:

$$\mathrm{i}\,\mathrm{Re}\,z + \mathrm{e}^{\cos(\mathrm{Im}\,z)} = 1 + \mathrm{i}.$$

2. Studiare la convergenza semplice ed assoluta della seguente serie numerica:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n!\,\sqrt{n+1}}{2^n\, n^n}.$$

---

3. Studiare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1-\mathrm{e}^x)\ \log(\cos x)}{x\,|x|}, \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{x + \mathrm{e}^{-x}\cos x}{\cos^2 x + \sqrt{x}\ \log x}.$$

Esonero di Analisi Matematica I (A)

Ingegneria Gestionale, 21 dicembre 1999

(Michele Campiti)

1. Si determinino le soluzioni della seguente equazione:

$$\mathrm{i}\,|z| + 2\overline{z} = 1.$$

2. Studiare la convergenza semplice ed assoluta della seguente serie numerica:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (n-1)!\,\mathrm{sen}\frac{1}{(n+1)!}.$$

---

3. Studiare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 + \mathrm{e}^{-x}\cos x + 5\cos^2 x}{2 + \cos^2 x + x^2 \log x}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\left(\mathrm{e}^{1-\cos x} - 1\right)\ \log(\cos x)}{x^4}.$$

Esonero di Analisi Matematica I (B)

Ingegneria Gestionale, 21 dicembre 1999

(Michele Campiti)

1. Si determinino le soluzioni della seguente equazione:

$$|z| - 2\,\mathrm{i}\,\overline{z} = \mathrm{i}\,.$$

2. Studiare la convergenza semplice ed assoluta della seguente serie numerica:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n!\left(1 - \cos\frac{1}{n!}\right).$$

---

3. Studiare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arcsen} x^3\ \ \cos\frac{1}{x}\ \ \operatorname{tg}^5 x + x^2\ \ \log x}{\operatorname{arcsen}^2 x + x^3}, \qquad \lim_{x\to 1} \frac{x^\pi - \cos(x-1)}{(x-1)^2}.$$

Soluzione esonero di Analisi Matematica I (A)
Ingegneria Edile, 20 dicembre 1999

1. Separando le parti reali ed immaginarie, si ottiene il sistema

$$\begin{cases} \log\cos\operatorname{Im} z = 0, \\ \operatorname{Re} z = -1; \end{cases}$$

la prima equazione ha come soluzioni $\operatorname{Im} z = 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$ e la seconda $\operatorname{Re} z = -1$, per cui tutte le soluzioni sono date da

$$z = -1 + 2k\pi\,\mathrm{i}, \qquad k \in \mathbf{Z}.$$

---

2. Si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2^{n+1}\sqrt{n+2}}{\mathrm{e}^{n+1}}\ \frac{\mathrm{e}^n}{2^n\sqrt{n+1}} = \frac{2}{\mathrm{e}} < 1$$

e quindi, dal criterio del rapporto, la serie risulta assolutamente convergente (dunque anche semplicemente convergente).

---

3. Posto $y = x - 1$, risulta

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1} \frac{\mathrm{e}^{x-1} + \cos\pi x}{x-1} &= \lim_{y\to 0} \frac{\mathrm{e}^{y} + \cos\pi(y+1)}{y} \\ &= \lim_{y\to 0} \frac{\mathrm{e}^{y} - \cos\pi y}{y} \\ &= \lim_{y\to 0} \left(\frac{\mathrm{e}^{y} - 1}{y} + \frac{1-\cos\pi y}{y} \right) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Per il secondo limite basta osservare che, per $x \to 0$,

$$\operatorname{sen} x + x^3 \operatorname{sen}(1/x) \sim \operatorname{sen} x \sim x$$

e quindi, posto $y = \arccos(1-x)$, si ottiene

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\arccos^2(1-x)} = \lim_{y\to 0} \frac{1-\cos y}{y^2} = \frac{1}{2}.$$

Soluzione esonero di Analisi Matematica I (B)
Ingegneria Edile, 20 dicembre 1999

1. Separando le parti reali ed immaginarie, si ottiene il sistema

$$\begin{cases} e^{\cos \operatorname{Im} z} = 1, \\ \operatorname{Re} z = 1; \end{cases}$$

la prima equazione ha come soluzioni $\operatorname{Im} z = \pi/2 + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$ per cui tutte le soluzioni sono date da

$$z = 1 + \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) \mathrm{i}, \qquad k \in \mathbf{Z}.$$

---

2. Si ha

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)!\sqrt{n+2}}{2^{n+1}(n+1)^{n+1}} \ \frac{2^n\, n^n}{n!\sqrt{n+1}} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{2} \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \\ &= \frac{1}{2e} < 1 \end{aligned}$$

e quindi, dal criterio del rapporto, la serie risulta assolutamente convergente (dunque anche semplicemente convergente).

---

3. Tenendo presente che il punto 0 è di accumulazione solo a sinistra in quanto $1 - e^x$ deve essere strettamente positivo, si ha

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{\log(1-e^x)\ \log(\cos x)}{x\,|x|} &= \lim_{x\to 0} \log(1-e^x) \frac{\log(1+(\cos x - 1))}{\cos x - 1} \ \frac{\cos x - 1}{x^2} \frac{x^2}{x\,|x|} \\ &= (-\infty)\cdot 1 \cdot (-\frac{1}{2})(-1) = -\infty. \end{aligned}$$

Per il secondo limite basta osservare che, per $x \to +\infty$,

$$x + e^{-x}\cos x \sim x, \qquad \cos^2 x + \sqrt{x}\,\log x \sim \sqrt{x}\,\log x$$

per cui il limite assegnato diventa

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x}\,\log x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{\log x} = +\infty.$$

Soluzione esonero di Analisi Matematica I (A)
Ingegneria Gestionale, 21 dicembre 1999

1. Posto $z = x + iy$, si ottiene l'equazione

$$\mathrm{i}\sqrt{x^2 + y^2} + 2x - 2y\mathrm{i} = 1$$

e, separando le parti reali ed immaginarie, si ottiene il sistema

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} - 2y = 0, \\ 2x = 1, \end{cases}$$

da cui si ricava $x = 1/2$ e conseguentemente $y^2 = 1/12$. Dunque tutte le soluzioni dell'equazione assegnata sono date da

$$z = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{6}\mathrm{i}.$$

---

2. Tenendo presente che

$$\operatorname{sen}\frac{1}{(n+1)!} \sim \frac{1}{(n+1)!}, \qquad n \to +\infty,$$

risulta

$$(n-1)!\operatorname{sen}\frac{1}{(n+1)!} \sim \frac{(n-1)!}{(n+1)!} = \frac{1}{n(n+1)}, \qquad n \to +\infty,$$

e quindi il termine generale della serie è un infinitesimo di ordine 2; dal criterio sull'ordine di infinitesimo, la serie è convergente (la serie è a termini positivi e quindi la convergenza assoluta è equivalente a quella semplice).

---

3. Tenendo presente che

$$x^3 + \mathrm{e}^{-x}\cos x + 5\cos^2 x \sim x^3, \qquad 2 + \cos^2 x + x^2 \log x \sim x^2 \log x, \qquad x \to +\infty,$$

si ottiene il limite

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{x^2 \log x} = +\infty.$$

Per quanto riguarda il secondo limite, si ha

$$\begin{aligned}
&\lim_{x \to 0} \frac{\left(\mathrm{e}^{1-\cos x} - 1\right)\ \log(\cos x)}{x^4} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{e}^{1-\cos x} - 1}{1 - \cos x}\ \frac{1 - \cos x}{x^2}\ x^2\ \frac{\log(1 + (\cos x - 1))}{\cos x - 1}\ \frac{\cos x - 1}{x^2}\ \frac{x^2}{x^4} \\
&= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\lim_{x \to 0} \frac{x^4}{x^4} = -\frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Soluzione esonero di Analisi Matematica I (B)
Ingegneria Gestionale, 21 dicembre 1999

1. Posto $z = x + iy$, si ottiene l'equazione

$$\sqrt{x^2+y^2} - 2x\mathrm{i} - 2y = \mathrm{i}$$

e, separando le parti reali ed immaginarie, si ottiene il sistema

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} - 2y = 0, \\ -2x = 1, \end{cases}$$

da cui si ricava $x = -1/2$ e conseguentemente $y^2 = 1/12$. Dunque tutte le soluzioni dell'equazione assegnata sono date da

$$z = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{6}\mathrm{i}.$$

Si determinino le soluzioni della seguente equazione:

$$|z| - 2\,\mathrm{i}\,\overline{z} = \mathrm{i}\,.$$

---

2. Tenendo presente che

$$1 - \cos\frac{1}{n!} \sim \frac{1}{2(n!)^2}, \qquad n \to +\infty,$$

risulta

$$n!\left(1 - \cos\frac{1}{n!}\right) \sim \frac{1}{2n!}, \qquad n \to +\infty,$$

e quindi il termine generale della serie è un infinitesimo di ordine arbitrariamente grande; dal criterio sull'ordine di infinitesimo, la serie è convergente (la serie è a termini positivi e quindi la convergenza assoluta è equivalente a quella semplice).

---

3. Tenendo presente che

$$\operatorname{arcsen} x^3\ \cos\frac{1}{x}\ \operatorname{tg}^5 x + x^2\ \log x \sim x^2 \log x, \qquad \operatorname{arcsen}^2 x + x^3 \sim \operatorname{arcsen}^2 x, \qquad x \to 0,$$

si ottiene il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \log x}{\operatorname{arcsen}^2 x} = \lim_{x\to 0} \log x = -\infty.$$

Per quanto riguarda il secondo limite, posto $y = x - 1$, si ottiene

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} \frac{x^\pi - \cos(x-1)}{(x-1)^2} &= \lim_{y\to 0} \frac{(1+y)^\pi - 1 + 1 - \cos y}{y^2} \\
&= \lim_{y\to 0} \left(\frac{(1+y)^\pi - 1}{y^2} + \frac{1-\cos y}{y^2} \right) \\
&= \pi \lim_{y\to 0} \frac{1}{y} + \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

e quindi si conclude che il limite assegnato non esiste (da sinistra è uguale a $-\infty$ e da destra è uguale a $+\infty$).

Esonero di Analisi Matematica I (A)

Ingegneria Edile & Gestionale, 2 febbraio 2000

(Michele Campiti)

1. Si calcoli il seguente integrale indefinito:

$$\int x^3 \log^2 x \, dx \, .$$

2. Studiare il seguente integrale improprio:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2 \log x}{\sqrt[3]{(x-1)^4}} \, \mathrm{e}^{-x} \, dx \, .$$

---

3. Studiare la derivabilità e gli asintoti della seguente funzione:

$$f(x) = \frac{|x^2 - 9|}{x} \operatorname{arccotg} \frac{1}{x} \, .$$

Esonero di Analisi Matematica I (B)

Ingegneria Edile & Gestionale, 2 febbraio 2000

(Michele Campiti)

1. Si calcoli il seguente integrale indefinito:

$$\int x \operatorname{arctg} x \, dx \ .$$

2. Studiare il seguente integrale improprio:

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{\log(-x)} \, \mathrm{e}^{x} \, dx \ .$$

---

3. Studiare la derivabilità e gli asintoti della seguente funzione:

$$f(x) = \frac{|x^2 - 4|}{x} \arccos \frac{1}{x} \ .$$

Soluzione esonero di Analisi Matematica I (A)
Ingegneria Edile & Gestionale, 2 febbraio 2000

1. Utilizzando la regola di integrazione per parti

$$\begin{aligned}\int x^3 \log^2 x\,dx &= \frac{x^4}{4}\log^2 x - \frac{1}{2}\int x^4 \frac{\log x}{x}\,dx = \frac{x^4}{4}\log^2 x - \frac{1}{2}\int x^3 \log x\,dx \\ &= \frac{x^4}{4}\log^2 x - \frac{1}{2}\frac{x^4}{4}\log x + \frac{1}{8}\int x^3\,dx \\ &= \frac{x^4}{4}\log^2 x - \frac{1}{2}\frac{x^4}{4}\log x + \frac{1}{32}\,x^4 + c, \qquad c \in \mathbf{R}\,.\end{aligned}$$

---

2. Bisogna discutere l'integrabilità in intorni dei punti 0, 1 e $+\infty$. Nel punto 0 la funzione è infinitesima e quindi è assolutamente integrabile in un intorno di 0. Nel punto 1 la funzione è un rapporto di un infinitesimo di ordine 1 e di un infinitesimo di ordine $4/3$ e pertanto è un infinito di ordine $1/3 < 1$; dal criterio sull'ordine di infinito segue l'assoluta integrabilità in un intorno di 1. Infine, nel punto $+\infty$ la funzione risulta essere un infinitesimo di ordine arbitrariamente grande (a causa del termine e^{-x}) e quindi è assolutamente integrabile in un intorno di $+\infty$ per il criterio sull'ordine di infinitesimo.

Si conclude che l'integrale improprio è assolutamente convergente e quindi convergente.

---

3. La funzione è definita in $\mathbf{R}^*$ ed è sicuramente derivabile in $\mathbf{R}^* \setminus \{-3, 3\}$. Per ogni $x \in \mathbf{R}^* \setminus \{-3, 3\}$, risulta

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{2x\,\dfrac{|x^2-9|}{x^2-9}\,x - |x^2-9|}{x^2}\,\mathrm{arccotg}\frac{1}{x} + \frac{|x^2-9|}{x}\,\frac{1}{1+\dfrac{1}{x^2}}\,\frac{1}{x^2} \\ &= \frac{|x^2-9|}{x^2}\left(\frac{2x^2-x^2+9}{x^2-9}\,\mathrm{arccotg}\frac{1}{x} + \frac{x}{x^2+1}\right) \\ &= \frac{|x^2-9|}{x^2}\left(\frac{x^2+9}{x^2-9}\,\mathrm{arccotg}\frac{1}{x} + \frac{x}{x^2+1}\right)\,.\end{aligned}$$

Nei punti -3 e 3 risulta

$$f'_+(-3) = \lim_{x\to -3^+} f'(x) = -\frac{18}{9}\,\mathrm{arccotg}\left(-\frac{1}{3}\right) = -2\ \mathrm{arccotg}\left(-\frac{1}{3}\right)$$

e analogamente

$$f'_-(-3) = 2\ \mathrm{arccotg}\left(-\frac{1}{3}\right), \quad f'_+(3) = 2\ \mathrm{arccotg}\left(\frac{1}{3}\right),$$

$$f'_-(3) = -2\ \mathrm{arccotg}\left(\frac{1}{3}\right).$$

Quindi f non è derivabile nei punti -3 e 3 e tali punti sono angolosi.

Per gli asintoti verticali, va considerato solamente il punto 0; applicando la regola di l'Hôpital, si ha

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = 9 \lim_{x\to0^+} \frac{\mathrm{arccotg}\,(1/x)}{x} = 9 \lim_{x\to0^+} \frac{1}{x^2}\frac{1}{1+1/x^2} = 9 \lim_{x\to0^+} \frac{1}{x^2+1} = 9$$

Inoltre $\lim_{x\to0^-} f(x) = 9\pi \lim_{x\to0^-} 1/x = -\infty$. Pertanto, la retta di equazione $x=0$ è un asintoto verticale a sinistra in basso per f ma non è un asintoto a destra per f.

Inoltre

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{|x^2-9|}{x}\ \mathrm{arccotg}\,\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{|x^2-9|}{x} = \pm\infty$$

e quindi la funzione non è dotata di asintoti orizzontali. Infine

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{|x^2-9|}{x^2}\ \mathrm{arccotg}\,\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{|x^2-9|}{x^2} = \frac{\pi}{2}$$

e, tenendo presente che x^2-9 è positivo in intorni di $\pm\infty$, applicando la regola di l'Hôpital si ottiene

$$\lim_{x\to\pm\infty} \left(f(x) - \frac{\pi}{2}\,x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{|x^2-9|}{x^2}\ x \left(\mathrm{arccotg}\,\frac{1}{x} - \frac{\pi}{2}\ \frac{x^2}{|x^2-9|}\right)$$
$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\mathrm{arccotg}\,\dfrac{1}{x} - \dfrac{\pi}{2}\ \dfrac{x^2}{x^2-9}}{\dfrac{1}{x}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\dfrac{1}{1+1/x^2}\ \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{\pi}{2}\ \dfrac{2x(x^2-9)-2x^3}{(x^2-9)^2}}{-\dfrac{1}{x^2}}$$
$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\dfrac{1}{1+x^2} + 9\pi\ \dfrac{x}{(x^2-9)^2}}{-\dfrac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\pm\infty} \left(-\frac{x^2}{1+x^2} - 9\pi\ \frac{x^3}{(x^2-9)^2}\right) = -1\ .$$

Si conclude che la retta di equazione $y = \dfrac{\pi}{2}x - 1$ è un asintoto obliquo a sinistra e a destra per f.

Soluzione esonero di Analisi Matematica I (B)
Ingegneria Edile & Gestionale, 2 febbraio 2000

1. Utilizzando la regola di integrazione per parti

$$\begin{aligned}\int x \operatorname{arctg} x\, dx &= \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}\, dx \\ &= \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \left(\frac{x^2+1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2}\right) dx \\ &= \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + c, \qquad c \in \mathbf{R}\,.\end{aligned}$$

---

2. Bisogna discutere l'integrabilità in intorni dei punti 0, -1 e $-\infty$. Nel punto 0 la funzione è infinitesima e quindi è assolutamente integrabile in un intorno di 0. Nel punto -1 la funzione non è infinitesima nè infinita e pertanto, dal criterio sull'ordine di infinito, si ottiene ancora l'assoluta integrabilità in un intorno di 1. Infine, nel punto $-\infty$ la funzione risulta essere un infinitesimo di ordine arbitrariamente grande (a causa del termine e^x) e quindi è assolutamente integrabile in un intorno di $-\infty$ per il criterio sull'ordine di infinitesimo.

Si conclude che l'integrale improprio è assolutamente convergente e quindi convergente.

---

3. Imponendo la condizione $-1 \leq 1/x \leq 1$, si ricava che la funzione è definita in $X =]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[$, è ovviamente continua in tale insieme ed inoltre è sicuramente derivabile in $X \setminus \{-2,-1,1,2\}$. Per ogni $x \in X \setminus \{-2,-1,1,2\}$, risulta

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{2x\,\dfrac{|x^2-4|}{x^2-4}\,x - |x^2-4|}{x^2}\arccos\frac{1}{x} + \frac{|x^2-4|}{x}\,\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}}\,\frac{1}{x^2} \\ &= \frac{|x^2-4|}{x^2}\left(\frac{x^2+4}{x^2-4}\arccos\frac{1}{x} + \frac{|x|}{x\sqrt{x^2+1}}\right)\,.\end{aligned}$$

Nei punti -1 e 1 risulta $f'(\pm 1) = \lim_{x\to\pm 1} f'(x) = \pm\infty$ e quindi f non è derivabile in tali punti. Inoltre

$$f'_+(-2) = \lim_{x\to 2^+} f'(x) = -2\,\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = -2\frac{2}{3}\pi = -\frac{4}{3}\pi$$

e analogamente

$$f'_-(-2) = \frac{4}{3}\pi, \quad f'_+(2) = 2\,\arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}\pi, \quad f'_-(2) = -\frac{2}{3}\pi.$$

Quindi f non è derivabile nei punti -2 e 2 e tali punti sono angolosi.

La funzione non è dotata di asintoti verticali in quanto è continua e non vi sono punti di accumulazione reali non appartenenti all'insieme di definizione.

Inoltre

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{|x^2-4|}{x} \arccos\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{|x^2-4|}{x} = \pm\infty$$

e quindi la funzione non è dotata di asintoti orizzontali. Infine

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{|x^2-4|}{x^2} \arccos\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{|x^2-4|}{x^2} = \frac{\pi}{2}$$

e, tenendo presente che x^2-4 è positivo in intorni di $\pm\infty$, applicando la regola di l'Hôpital si ottiene

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\pm\infty} \left(f(x) - \frac{\pi}{2}\, x\right) &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{|x^2-4|}{x^2}\, x \left(\arccos\frac{1}{x} - \frac{\pi}{2}\, \frac{x^2}{|x^2-4|}\right) \\
&= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\arccos\frac{1}{x} - \frac{\pi}{2}\, \frac{x^2}{x^2-4}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-1/x^2}}\, \frac{1}{x^2} - \frac{\pi}{2}\, \frac{2x(x^2-4)-2x^3}{(x^2-4)^2}}{-\frac{1}{x^2}} \\
&= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\, \frac{|x|}{x^2} + 4\pi\, \frac{x}{(x^2-4)^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\pm\infty} \left(-\frac{|x|}{\sqrt{x^2-1}} - 4\pi\, \frac{x^3}{(x^2-4)^2}\right) \\
&= -1\,.
\end{aligned}$$

Si conclude che la retta di equazione $y = \dfrac{\pi}{2}x - 1$ è un asintoto obliquo a sinistra e a destra per f.

Esame di Analisi Matematica I (A)

Ingegneria Edile & Gestionale, 8 febbraio 2000

Michele Campiti

1. Studiare il seguente integrale improprio:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{e^x - 1}\,\operatorname{sen} x}{5^{x/2}\,\log(1+x^2)}\,dx\ .$$

2. Studiare la convergenza assoluta e semplice della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \log\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Esame di Analisi Matematica I (B)

Ingegneria Edile & Gestionale, 8 febbraio 2000

Michele Campiti

1. Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+2x}{1+3x}\right)^{1/x}\ \frac{\log(1+x^2)}{(1+x^2)^2-1}\ .$$

2. Calcolare il seguente integrale definito:

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3 x\ \cos^3 x\, dx\ .$$

Soluzione prova scritta di Analisi Matematica I (A)
Ingegneria Edile & Gestionale, 8 febbraio 2000

1. Bisogna discutere l'integrabilità in intorni dei punti 0 e $+\infty$. Nel punto 0 la funzione $\sqrt{\mathrm{e}^x - 1}$ è infinitesima di ordine $1/2$ e $\operatorname{sen} x$ è infinitesima di ordine 1. Al denominatore la funzione $\log(1 + x^2)$ è un infinitesimo di ordine 2. Pertanto la funzione è un infinito di ordine $1/2$ e quindi dal criterio sull'ordine di infinito è assolutamente integrabile in un intorno di 0.

Nel punto $+\infty$ la funzione $1/\log(1 + x^2)$ è un infinitesimo di ordine arbitrariamente piccolo mentre

$$\frac{\sqrt{\mathrm{e}^x - 1}}{5^{x/2}} \sim \frac{\mathrm{e}^{x/2}}{5^{x/2}} = \left(\frac{\mathrm{e}}{5}\right)^{x/2}$$

è un infinitesimo di ordine arbitrariamente grande per cui

$$\frac{\sqrt{\mathrm{e}^x - 1}}{5^{x/2}\ \log(1 + x^2)}$$

è un infinitesimo in $+\infty$ di ordine arbitrariamente grande. Poichè

$$\left|\frac{\sqrt{\mathrm{e}^x - 1}\ \operatorname{sen} x}{5^{x/2}\ \log(1 + x^2)}\right| \leq \frac{\sqrt{\mathrm{e}^x - 1}}{5^{x/2}\ \log(1 + x^2)},$$

dal criterio sull'ordine di infinitesimo si conclude che la funzione è assolutamente integrabile in un intorno di $+\infty$. Pertanto l'integrale improprio è assolutamente convergente e quindi convergente.

---

2. La successione

$$\left(\log\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)_{n \geq 1}$$

è infinitesima di ordine 1 e quindi dal criterio sull'ordine di infinitesimo si deduce che la serie è assolutamente divergente.

Tuttavia la successione in esame è strettamente decrescente in quanto, utilizzando la stretta crescenza della funzione logaritmo, per ogni $n \geq 1$ segue

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \Rightarrow 1 + \frac{1}{n+1} < 1 + \frac{1}{n} \Rightarrow \log\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) < \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)\ .$$

Dal criterio di Leibniz si deduce che la serie è convergente (solo semplicemente).

Soluzione prova scritta di Analisi Matematica I (B)
Ingegneria Edile & Gestionale, 8 febbraio 2000

1. Utilizzando i limiti notevoli si ha

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+2x}{1+3x}\right)^{1/x}\ \frac{\log(1+x^2)}{(1+x^2)^2-1} &= \lim_{x\to 0}\frac{(1+2x)^{1/x}}{(1+3x)^{1/x}}\ \frac{\log(1+x^2)}{(1+x^2)^2-1}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{(1+2x)^{1/x}}{(1+3x)^{1/x}}\ \frac{\log(1+x^2)}{x^2}\ \frac{x^2}{(1+x^2)^2-1}\\
&= \frac{\mathrm{e}^2}{\mathrm{e}^3}\cdot 1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2\mathrm{e}}\ .
\end{aligned}$$

---

2. Utilizzando la sostituzione $t=\operatorname{sen} x$ (da cui $dt=\cos x\,dx$), si ha

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^3 x\ \cos^3 x\,dx &= \int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^3 x\ \cos^2 x\ \cos x\,dx\\
&= \int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^3 x\ \left(1-\operatorname{sen}^2 x\right)\ \cos x\,dx\\
&= \int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^3 x\ \cos x\,dx-\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^5 x\ \cos x\,dx\\
&= \int_0^1 t^3\,dt-\int_0^1 t^5\,dt\\
&= \left[\frac{t^4}{4}-\frac{t^6}{6}\right]_0^1=\frac{1}{4}-\frac{1}{6}=\frac{1}{12}\ .
\end{aligned}$$

Esame di Analisi Matematica I (A)

Ingegneria Edile & Gestionale, 22 febbraio 2000

Michele Campiti

1. Studiare il seguente limite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}^3 x - x^3}{\dfrac{\operatorname{arctg}^2 x^3}{x} + \log^3 \cos x} \, .$$

2. Calcolare il seguente integrale:

$$\int_{-\pi/4}^{0} \operatorname{sen}(2x) \ \operatorname{tg}^2 x \, dx \, .$$

Esame di Analisi Matematica I (B)

Ingegneria Edile & Gestionale, 22 febbraio 2000

Michele Campiti

1. Studiare la convergenza semplice ed assoluta della seguente serie numerica:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \operatorname{sen}^p \frac{\pi}{2n}\ , \qquad\qquad p > 0\ .$$

2. Studiare il seguente integrale improprio *(il calcolo è facoltativo)*:

$$\int_{-1}^{1} \frac{\operatorname{sen}\pi x}{\log|x|}\, dx\ .$$

Soluzione prova scritta di Analisi Matematica I (A)
Ingegneria Edile & Gestionale, 22 febbraio 2000

1. Si ha $\operatorname{sen}^3 x - x^3 = (\operatorname{sen} x - x)(\operatorname{sen}^2 x + x \operatorname{sen} x + x^2)$ e poichè la funzione $\operatorname{sen}^2 x + x \operatorname{sen} x + x^2 \sim 3x^2$ in 0 mentre $\operatorname{sen} x - x \sim -x^3/6$ (infatti, applicando la regola di l'Hôpital,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2} = -\frac{1}{6}\ ),$$

si ricava $\operatorname{sen}^3 x - x^3 \sim -x^5/2$. Inoltre $\operatorname{arctg}^2 x^3/x$ è un infinitesimo di ordine 5 in 0 (in quanto $\operatorname{arctg}^2 x^3$ ha ordine 6) mentre $\log^3 \cos x$ è un infinitesimo di ordine 6 in 0 (infatti, utilizzando la regola sull'ordine delle funzioni composte, basta tener presente che $\log^3 \cos x = \log^3((\cos x - 1) + 1)$ e che $\cos x - 1$ ha ordine 2, il logaritmo ha ordine 1 e la potenza terza ha ordine 3 in 0). Pertanto, si ottiene

$$\frac{\operatorname{arctg}^2 x^3}{x} + \log^3 \cos x \sim \frac{\operatorname{arctg}^2 x^3}{x} \sim \frac{x^6}{x} = x^5$$

in 0 e quindi si conclude che

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^3 x - x^3}{\dfrac{\operatorname{arctg}^2 x^3}{x} + \log^3 \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\dfrac{1}{2}\ x^5}{x^5} = -\frac{1}{2}\ .$$

---

2. Si ha

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi/4}^{0} \operatorname{sen}(2x)\ \operatorname{tg}^2 x\, dx &= 2\int_{-\pi/4}^{0} \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\cos x}\, dx \\
&= 2\int_{-\pi/4}^{0} \frac{1-\cos^2 x}{\cos x}\ \operatorname{sen} x\, dx \\
&= 2\int_{-\pi/4}^{0} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\, dx - 2\int_{-\pi/4}^{0} \operatorname{sen} x\ \cos x\, dx \\
&= \left[-2\ \log|\cos x| - \operatorname{sen}^2 x\right]_{-\pi/4}^{0} \\
&= 2\log\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\ .
\end{aligned}$$

Soluzione prova scritta di Analisi Matematica I (B)
Ingegneria Edile & Gestionale, 22 febbraio 2000

1. La successione

$$\left(\operatorname{sen}^p \frac{\pi}{2n}\right)_{n\geq 1}$$

è infinitesima di ordine p e quindi dal criterio sull'ordine di infinitesimo si deduce che la serie è assolutamente convergente (quindi anche semplicemente convergente) se $p > 1$ e assolutamente divergente se $p \leq 1$.

Poichè la funzione seno è strettamente crescente in $]0, \pi/2]$, per ogni $n \geq 1$, da

$$\frac{\pi}{2(n+1)} < \frac{\pi}{2n}$$

segue

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{2(n+1)} < \operatorname{sen}\frac{\pi}{2n}$$

e da ciò, trattandosi di quantità positive,

$$\operatorname{sen}^p \frac{\pi}{2(n+1)} < \operatorname{sen}^p \frac{\pi}{2n}\ .$$

Si può pertanto applicare il criterio di Leibnitz che assicura la semplice convergenza anche nel caso $p \leq 1$.

---

2. La funzione integranda non è definita nei punti -1, 0 ed 1. Nei punti -1 ed 1 la funzione è un rapporto tra due infinitesimi di ordine 1 e quindi è convergente; segue che in un intorno di tali punti la funzione è assolutamente integrabile in senso improprio. Nel punto 0 la funzione è un rapporto tra un infinitesimo di ordine 1 ed un infinito di ordine arbitrariamente piccolo; quindi essa è infinitesima (di ordine maggiore di 1 e minore di $1 + \varepsilon$ per ogni $\varepsilon > 0$) e pertanto assolutamente integrabile in senso improprio in un intorno di 0. Si conclude che l'integrale improprio è assolutamente convergente.

Per quanto riguarda il calcolo dell'integrale improprio, basta osservare che per l'assoluta integrabilità si ha

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} \frac{\operatorname{sen}\pi x}{\log|x|}\,dx &= \int_{-1}^{0} \frac{\operatorname{sen}\pi x}{\log(-x)}\,dx + \int_{0}^{1} \frac{\operatorname{sen}\pi x}{\log x}\,dx \\ &= -\int_{1}^{0} \frac{-\operatorname{sen}\pi t}{\log t}\,dt + \int_{0}^{1} \frac{\operatorname{sen}\pi x}{\log x}\,dx \\ &= -\int_{0}^{1} \frac{\operatorname{sen}\pi t}{\log t}\,dt + \int_{0}^{1} \frac{\operatorname{sen}\pi x}{\log x}\,dx = 0\end{aligned}$$

(si è utilizzata la sostituzione $t = -x$).

Esame di Analisi Matematica I (A)

Ingegneria Edile & Gestionale, 7 marzo 2000

Michele Campiti

1. Studiare il seguente limite:

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}\,\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\ \log(1+x)\ .$$

2. Studiare la convergenza semplice ed assoluta delle seguenti serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\ \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+nm\pi\right)\ ,\qquad \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\ \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+nm\pi\right)}{n}\ ,$$

al variare di $m \geq 1$.

Esame di Analisi Matematica I (B)

Ingegneria Edile & Gestionale, 7 marzo 2000

Michele Campiti

1. Studiare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\,\mathrm{sen}^2 x - 1 + \cos x}{2^{(x^2)} - \cos x}\ .$$

2. Studiare la convergenza semplice ed assoluta della seguente serie:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\ \frac{\mathrm{arctg}(1/n)}{n^\alpha}\ ,$$

al variare di $\alpha > 0$.

Soluzione prova scritta di Analisi Matematica I (A)
Ingegneria Edile & Gestionale, 7 marzo 2000

1. Nel punto $+\infty$ la funzione $\sqrt{x}$ è un infinito di ordine $1/2$, la funzione $\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$ è un infinitesimo di ordine 1 ed infine $\log(1+x)$ è un infinito di ordine arbitrariamente piccolo. Si conclude che il limite richiesto è uguale a 0 (precisamente si tratta di un infinitesimo di ordine minore di $1/2$ e maggiore di $1/2-\varepsilon$ per ogni $\varepsilon \in]0, 1/2[$.

---

2. Se m è pari, si può scrivere $m = 2p$ con $p \geq 1$ e si ha $\operatorname{sen}(\pi/2 + nm\pi) = \operatorname{sen}(\pi/2 + 2np\pi) = 1$; pertanto la prima serie non può convergere in quanto il suo termine generale $(-1)^n$ non è infinitesimo, mentre la seconda coincide con la serie armonica a segni alterni e quindi risulta convergente ma non assolutamente convergente. Se m è dispari, si può scrivere $m = 2p+1$ con $p \geq 1$ e si ha $\operatorname{sen}(\pi/2 + nm\pi) = \operatorname{sen}(\pi/2 + 2np\pi + n\pi) = (-1)^n$; pertanto

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + nm\pi\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\ (-1)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} 1\ ,$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\ \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + nm\pi\right)}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\ ;$$

si conclude che entrambe le serie assegnate divergono positivamente (la seconda coincide con la serie armonica).

Soluzione prova scritta di Analisi Matematica I (B)
Ingegneria Edile & Gestionale, 7 marzo 2000

1. Poichè nel punto 0

$$\mathrm{sen}^2 x \sim x^2, \qquad 1 - \cos x \sim \frac{1}{2} x^2$$

il numeratore è equivalente a $2x^2 - x^2/2 = 3x^2/2$. Per quanto riguarda il denominatore, sempre utilizzando i limiti notevoli, si ha

$$2^{(x^2)} - \cos x = 2^{(x^2)} - 1 + 1 - \cos x \sim \log 2 \; x^2 + \frac{x^2}{2} = \left(\log 2 + \frac{1}{2} \right) x^2 \; .$$

Pertanto, il limite assegnato diventa

$$\lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{3}{2} \, x^2}{\left(\log 2 + \dfrac{1}{2} \right) x^2} = \frac{3}{2 \log 2 + 1} \; .$$

---

2. Per $n \to +\infty$, la funzione $\mathrm{arctg}(1/n)$ è un infinitesimo di ordine 1 mentre $1/n^\alpha$ è un infinitesimo di ordine α. Pertanto, il termine generale della serie assegnata è un infinitesimo di ordine $1 + \alpha$ e quindi la serie è assolutamente convergente (e quindi anche semplicemente convergente) per ogni $\alpha > 0$.

Esame di Analisi Matematica I (A)

Ingegneria Edile & Gestionale, 12 aprile 2000

Michele Campiti

1. Studiare la convergenza semplice ed assoluta della seguente serie numerica:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{n!\ 3^n\ n^3}\ .$$

2. Studiare i massimi e minimi relativi ed eventualmente assoluti della seguente funzione:

$$f(x) = \left|x^2 - 2x\right|\ e^{x-1}\ .$$

Esame di Analisi Matematica I (B)

Ingegneria Edile & Gestionale, 12 aprile 2000

Michele Campiti

1. Studiare il seguente integrale improprio:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\left(x^6 - 1\right)\ \mathrm{e}^{-x}}{\log x}\, dx\ .$$

2. Studiare i massimi e minimi relativi ed eventualmente assoluti della seguente funzione:

$$f(x) = \log\left(1 + \left|\frac{x^2 - 2x}{x - 1}\right|\right)\ .$$

Soluzione prova scritta di Analisi Matematica I (A)
Ingegneria Edile & Gestionale, 12 aprile 2000

1. Si tratta di una serie a termini positivi. Applicando il criterio del rapporto:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!\ 3^{n+1}\ (n+1)^3}\ \frac{n!\ 3^n\ n^3}{n^n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \frac{1}{3} \left(\frac{n}{n+1}\right)^3 = \frac{\mathrm{e}}{3} < 1$$

e quindi la serie è convergente. L'assoluta convergenza coincide in questo caso con quella semplice trattandosi di una serie a termini positivi.

---

2. La funzione è definita in tutto $\mathbf{R}$ e si ha

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty\ .$$

Dall'ultimo limite si ricava che la funzione non può essere dotata di massimo assoluto.

Inoltre, poichè la funzione è sempre positiva e si annulla nei punti 0 e 2, si deduce subito che tali punti sono di minimo assoluto per f (e il minimo assoluto vale 0).

La funzione è derivabile in $\mathbf{R} \setminus \{0,2\}$ e, per ogni $x \in \mathbf{R} \setminus \{0,2\}$, si ha

$$f'(x) = \mathrm{e}^{x-1} \left(\frac{|x^2-2x|}{x^2-2x}(2x-2) + |x^2-2x| \right) = |x^2-2x|\ \mathrm{e}^{x-1}\ \frac{x^2}{x^2-2x}\ .$$

Poichè

$$\lim_{x\to0^-} f'(x) = -\frac{2}{\mathrm{e}}, \quad \lim_{x\to0^+} f'(x) = \frac{2}{\mathrm{e}}, \quad \lim_{x\to2^-} f'(x) = -2\,\mathrm{e}, \quad \lim_{x\to2^+} f'(x) = 2\,\mathrm{e},$$

si ricava che 0 e 2 sono punti angolosi per f. Infine, dal segno della derivata prima, si conclude che i punti $\pm\sqrt{2}$ sono di massimo relativo per f.

Soluzione prova scritta di Analisi Matematica I (B)
Ingegneria Edile & Gestionale, 12 aprile 2000

1. Bisogna discutere l'integrabilità in intorni dei punti 0, 1 e $+\infty$.

Nel punto 0, l'unico fattore che da considerare è il $\log x$ che è un infinito di ordine arbitrariamente piccolo. Pertanto in tale punto la funzione risulta infinitesima e, per il criterio sull'ordine di infinito, è assolutamente integrabile in un intorno di 0.

Nel punto 1, la funzione è rapporto di un infinitesimo di ordine 1 ($x^6 - 1$) e un infinitesimo di ordine 1 ($\log x$) e quindi tende ad un numero reale diverso da 0. Ancora per il criterio sull'ordine di infinito, f è assolutamente integrabile in un intorno di 1.

Infine, nel punto $+\infty$, la funzione è rapporto di un infinito di ordine 6 per un infinitesimo di ordine arbitrariamente grande e di un infinito di ordine arbitrariamente piccolo. Si tratta quindi di un infinitesimo di ordine arbitrariamente grande e pertanto, per il criterio sull'ordine di infinitesimo, f è assolutamente integrabile in un intorno di $+\infty$.

Si conclude che l'integrale improprio è assolutamente convergente.

---

2. La funzione è definita in $\mathbf{R} \setminus \{1\}$ e si ha

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to1} f(x) = +\infty\ .$$

Si ricava pertanto che la funzione non può essere dotata di massimo assoluto e la retta di equazione $x = 1$ è un asintoto verticale in alto per f.

Inoltre, poichè la funzione è sempre positiva (in quanto l'argomento del logaritmo è sempre maggiore o uguale di 1) e si annulla nei punti 0 e 2 (in cui l'argomento del logaritmo assume il valore 1), si deduce subito che tali punti sono di minimo assoluto per f (e il minimo assoluto vale 0).

La funzione è derivabile in $\mathbf{R} \setminus \{0, 1, 2\}$ e, per ogni $x \in \mathbf{R} \setminus \{0, 1, 2\}$, si ha

$$f'(x) = \left|\frac{x-1}{x^2-2x}\right| \ \left|\frac{x^2-2x}{x-1}\right| \ \frac{x-1}{x^2-2x} \ \frac{2(x-1)^2 - x^2 + 2x}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x+2}{(x(x-1)(x-2)}\ .$$

Poichè

$$\lim_{x\to0^-} f'(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to0^+} f'(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to2^-} f'(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to2^+} f'(x) = +\infty,$$

si ricava che 0 e 2 sono punti cuspidali per f. Infine, dal segno della derivata prima, si conclude che non vi sono altri punti di massimo o di minimo relativo per f.

Esame di Analisi Matematica I (A)

Ingegneria Edile & Gestionale, 17 maggio 2000

Michele Campiti

1. Studiare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log x \;\cdot\; \log \operatorname{sen} x}{\log(1-\cos x)}\ .$$

2. Calcolare il seguente integrale indefinito:

$$\int \frac{2x-1}{(x-1)(x-2)^2}\, dx\ .$$

Esame di Analisi Matematica I (B)

Ingegneria Edile & Gestionale, 17 maggio 2000

Michele Campiti

1. Studiare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log x \ + \ \log \operatorname{sen} x}{\log(1-\cos x)} \ .$$

2. Calcolare il seguente integrale indefinito:

$$\int \frac{2x-1}{(x-1)^2(x-2)}\, dx \ .$$

Soluzione prova scritta di Analisi Matematica I (A)
Ingegneria Edile & Gestionale, 17 maggio 2000

1. Applicando la regola di l'Hôpital, si ottiene

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log x \ \cdot \ \log \operatorname{sen} x}{\log(1-\cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{\log\,\operatorname{sen} x}{x} + \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\ \log x}{\dfrac{\operatorname{sen} x}{1-\cos x}}.$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{1-\cos x}{x\ \operatorname{sen} x}\ \log\,\operatorname{sen} x + \frac{1-\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}\ \cos x\ \log x \right)$$

Poichè

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x\ \operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}\ \frac{x}{\operatorname{sen} x} = \frac{1}{2}, \qquad \lim_{x\to 0} \log \operatorname{sen} x = -\infty,$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\operatorname{sen}^2 x} \cos x = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}\ \frac{x^2}{\operatorname{sen}^2 x} \cos x = \frac{1}{2}, \qquad \lim_{x\to 0} \log x = -\infty,$$

si conclude che il limite assegnato è uguale a $-\infty$.

---

2. Si pone

$$\frac{2x-1}{(x-1)(x-2)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{d}{dx}\left(\frac{C}{x-2}\right) = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} - \frac{C}{(x-2)^2}$$

e si ottiene

$$2x-1 = Ax^2 - 4Ax + 4A + Bx^2 - 3Bx + 2B - Cx + C.$$

Dal principio di uguaglianza dei polinomi, si ricava il sistema

$$\begin{cases} A+B=0, \\ -4A-3B-C=2, \\ 4A+2B+C=-1 \end{cases}$$

che ha come soluzioni $A=1$, $B=-1$ e $C=-3$. Pertanto

$$\int \frac{2x-1}{(x-1)(x-2)^2}\,dx = \log|x-1| - \log|x-2| - \frac{3}{x-2} + c, \qquad c \in \mathbf{R}$$

(la costante c è da intendersi in ognuno degli intervalli $]-\infty,1[$, $]1,2[$ e $]2,+\infty[$ in cui è definita la funzione integranda).

Soluzione prova scritta di Analisi Matematica I (B)
Ingegneria Edile & Gestionale, 17 maggio 2000

1. Applicando la regola di l'Hôpital, si ottiene

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log x \ + \log \operatorname{sen} x}{\log(1-\cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{1}{x} + \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}}{\dfrac{\operatorname{sen} x}{1-\cos x}} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{1-\cos x}{x \operatorname{sen} x} + \frac{1-\cos x}{x \operatorname{sen}^2 x} \ \cos x \right)$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{1-\cos x}{x^2} \ \frac{x}{\operatorname{sen} x} + \frac{1-\cos x}{x^2} \ \frac{x^2}{\operatorname{sen}^2 x} \ \cos x \right)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

---

2. Si pone

$$\frac{2x-1}{(x-1)^2(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{d}{dx}\left(\frac{C}{x-1}\right) = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} - \frac{C}{(x-1)^2}$$

e si ottiene

$$2x-1 = Ax^2 - 3Ax + A + Bx^2 - 2Bx + B - Cx + 2C.$$

Dal principio di uguaglianza dei polinomi, si ricava il sistema

$$\begin{cases} A + B = 0, \\ -3A - 2B - C = 2, \\ A + B + 2C = -1 \end{cases}$$

che ha come soluzioni $A = -5/2$, $B = 5/2$ e $C = -1/2$. Pertanto

$$\int \frac{2x-1}{(x-1)^2(x-2)}\,dx = -\frac{5}{2} \ \log|x-1| + \frac{5}{2} \ \log|x-2| - \frac{1}{2(x-1)} + c, \qquad c \in \mathbf{R}$$

(la costante c è da intendersi in ognuno degli intervalli $]-\infty, 1[$, $]1, 2[$ e $]2, +\infty[$ in cui è definita la funzione integranda).

Esame di Analisi Matematica I (A)

Ingegneria Edile & Gestionale, 19 giugno 2000

Michele Campiti

1. Studiare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2^{\operatorname{sen}^3 x} \cos x - 1}{\operatorname{sen}^2 x \ \log x} \ .$$

2. Studiare la convergenza semplice ed assoluta della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\operatorname{sen}^2(\pi/2n)}{\log(1+n)} \ .$$

Esame di Analisi Matematica I (B)

Ingegneria Edile & Gestionale, 19 giugno 2000

Michele Campiti

1. Studiare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1-x^2)\cos x - 1}{\log(\cos x)} \; .$$

2. Calcolare le radici seste del numero complesso:

$$z = 4(\sqrt{3}+\mathrm{i})^3 \; (1+\mathrm{i})^2 \; .$$

Soluzione prova scritta di Analisi Matematica I
Ingegneria Edile & Gestionale, 19 giugno 2000

(A) 1.

$$\lim_{x\to 0} \frac{2^{\operatorname{sen}^3 x} \cos x - 1}{\operatorname{sen}^2 x \ \log x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x \left(2^{\operatorname{sen}^3 x} - 1\right) + (\cos x - 1)}{\operatorname{sen}^2 x \ \log x} .$$

il numeratore è somma di un infinitesimo di ordine 3 (cioè $\cos x \left(2^{\operatorname{sen}^3 x} - 1\right)$) e di un infinitesimo di ordine 2 (cioè $\cos x - 1$) e pertanto è un infinitesimo di ordine 2; il denominatore è il prodotto di un infinitesimo di ordine 2 (cioè $\operatorname{sen} x$) e di un infinito di ordine arbitrariamente piccolo (cioè $\log x$) e pertanto è un infinitesimo di ordine minore di 2. Si conclude che il limite richiesto è uguale a 0 (infinitesimo di ordine arbitrariamente piccolo).

(A) 2. Il termine $\operatorname{sen}^2(\pi/2n)$ è un infinitesimo di ordine 2 e $1/\log(1+n)$ è un infinitesimo di ordine arbitrariamente piccolo; quindi il termine generale della serie è un infinitesimo di ordine > 2 (e minore di $2+\varepsilon$ per ogni $\varepsilon > 0$) e pertanto, dal criterio sull'ordine di infinitesimo, la serie risulta assolutamente convergente (e quindi anche semplicemente convergente)

Soluzione prova scritta di Analisi Matematica I (B)
Ingegneria Edile & Gestionale, 19 giugno 2000

(B) 1.

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{(1-x^2)\cos x - 1}{\log(\cos x)} &= \lim_{x\to 0} \frac{(1-x^2)(\cos x - 1) + (1-x^2) - 1}{\log(\cos x)} \\
&= \lim_{x\to 0} \left((1-x^2) \frac{\cos x - 1}{\log(1 + (\cos x - 1))} - \frac{x^2}{\log(\cos x)} \right) \\
&= 1 - \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{\log(1 + (\cos x - 1))} \; \frac{x^2}{\cos x - 1} \\
&= 1 - (-2) = 3
\end{aligned}
$$

(B) 2. Si ha

$$
\sqrt{3} + \mathrm{i} = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + \mathrm{i}\ \mathrm{sen}\,\frac{\pi}{6}\right), \qquad 1 + \mathrm{i} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\ \mathrm{sen}\,\frac{\pi}{4}\right)
$$

e pertanto

$$
(\sqrt{3} + \mathrm{i})^3 = 8\left(\cos\frac{\pi}{2} + \mathrm{i}\ \mathrm{sen}\,\frac{\pi}{2}\right), \qquad (1 + \mathrm{i})^2 = \sqrt{4}\left(\cos\frac{\pi}{2} + \mathrm{i}\ \mathrm{sen}\,\frac{\pi}{2}\right).
$$

Quindi $z = 64(\cos\pi + \mathrm{i}\ \mathrm{sen}\,\pi)$, da cui si ottengono le radici seste

$$
w_k = \sqrt[6]{64}\left(\cos\frac{\pi + 2k\pi}{6} + \mathrm{i}\ \mathrm{sen}\,\frac{\pi + 2k\pi}{6}\right), \qquad k = 0, \ldots, 5,
$$

ed esplicitamente

$$
w_0 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + \mathrm{i}\ \mathrm{sen}\,\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} + \mathrm{i}, \qquad w_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + \mathrm{i}\ \mathrm{sen}\,\frac{\pi}{2}\right) = 2\mathrm{i},
$$

$$
w_2 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + \mathrm{i}\ \mathrm{sen}\,\frac{5\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} + \mathrm{i}, \; w_3 = 2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + \mathrm{i}\ \mathrm{sen}\,\frac{7\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} - \mathrm{i},
$$

$$
w_4 = 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + \mathrm{i}\ \mathrm{sen}\,\frac{3\pi}{2}\right) = -\mathrm{i}, \qquad w_5 = 2\left(\cos\frac{11\pi}{6} + \mathrm{i}\ \mathrm{sen}\,\frac{11\pi}{6}\right) = \sqrt{3} - \mathrm{i}.
$$

Esame di Analisi Matematica I (A)

Ingegneria Edile & Gestionale, 3 luglio 2000

Michele Campiti

1. Verificare se la serie :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{6^n}{5^n} \cos^n x \ .$$

è convergente per $x = \pi/6$ e per $x = \pi/3$ e in caso affermativo calcolarne la somma.

2. Studiare massimi e minimi relativi ed eventualmente assoluti della seguente funzione:

$$f(x) = \cos(2x) \ + \ \operatorname{sen} x \ .$$

Esame di Analisi Matematica I (B)

Ingegneria Edile & Gestionale, 3 luglio 2000

Michele Campiti

1. Studiare la convergenza del seguente integrale improprio:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{|x-1|}}{(x^2+1)\log x}\,dx\ .$$

2. Studiare massimi e minimi relativi ed eventualmente assoluti della seguente funzione:

$$f(x) = \operatorname{sen}(2x)\ +\ \cos x\ .$$

Esame di Analisi Matematica I (A)

Ingegneria Edile & Gestionale, 18 settembre 2000

Michele Campiti

1. Studiare la convergenza semplice ed assoluta della serie :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 \ \log n}{n^4 + n^2 + 1} \ .$$

2. Determinare l'ordine di infinito della funzione

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\operatorname{sen}(1/x)}$$

nel punto $+\infty$.

Esame di Analisi Matematica I (B)

Ingegneria Edile & Gestionale, 18 settembre 2000

Michele Campiti

1. Studiare la convergenza del seguente integrale improprio:

$$\int_0^{+\infty} \log\left(1+\frac{1}{x}\right)\ \sqrt[3]{\operatorname{sen}\frac{1}{x}}\ dx\ .$$

2. Studiare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{\cos x} - 1}\ .$$

Soluzione prova scritta di Analisi Matematica I
Ingegneria Edile & Gestionale, 18 settembre 2000

(A) 1. La serie è ovviamente a termini positivi. Il suo termine generale presenta al numeratore un infinito di ordine maggiore di 2 ma minore di $2+\varepsilon$ per ogni $\varepsilon > 0$ (in quanto n^2 è un infinito di ordine 2 e $\log n$ è un infinito di ordine arbitrariamente piccolo) ed al denominatore un infinito di ordine 4. Pertanto il termine generale della serie risulta essere un infinitesimo di ordine minore di 2 ma maggiore di $2-\varepsilon$ per ogni $\varepsilon \in]0,2[$, quindi, ad esempio, maggiore di $3/2$ (con $\varepsilon = 1/2$). Dal criterio sull'ordine di infinitesimo la serie risulta essere (assolutamente) convergente.

(A) 2. Nel punto $+\infty$ si ha $\operatorname{sen}(1/x) \sim 1/x$ e inoltre $\sqrt{x+1} \sim \sqrt{x}$ e $\sqrt{x-1} \sim \sqrt{x}$, per cui al denominatore vi è un infinitesimo di ordine 1 e al numeratore la somma di due infiniti dello stesso ordine; poichè

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{-\sqrt{x-1}} = -1,$$

dal teorema sull'ordine della somma di due infiniti, si può solamente dedurre che il numeratore può o non essere un infinito o esserlo di ordine minore di $1/2$.

Tuttavia, tenendo presente quanto sopra e che $\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1} \sim 2\sqrt{x}$, si ha

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)\ \left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)}{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)\ \operatorname{sen}(1/x)} \\ &\sim \frac{x+1-(x-1)}{(1/x)\ \left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)} \ \sim\ \frac{2x}{2\sqrt{x}} \ \sim\ \sqrt{x}\,. \end{aligned}$$

Da ciò si conclude che la funzione è un infinito di ordine $1/2$ nel punto $+\infty$.

Soluzione prova scritta di Analisi Matematica I (B)
Ingegneria Edile & Gestionale, 18 settembre 2000

(B) 1. Bisogna discutere l'integrabilità in un intorno del punto 0 e del punto $+\infty$ essendo la funzione integranda (definita e) continua in $]0,+\infty[$.

Nel punto 0, la funzione $\log\left(1+\frac{1}{x}\right)$ è un infinito di ordine arbitrariamente piccolo e la funzione $\operatorname{sen} 1/x$ è limitata. Quindi, per il criterio sull'ordine di infinito, la funzione è assolutamente integrabile in senso improprio in un intorno di 0.

Nel punto $+\infty$, la funzione $\log\left(1+\frac{1}{x}\right)$ è un infinitesimo di ordine 1 e la funzione $\sqrt[3]{\operatorname{sen}(1/x)}$ è un infinitesimo di ordine $1/3$. Quindi la funzione è un infinitesimo di ordine $4/3$ e, dal criterio sull'ordine di infinitesimo, è assolutamente integrabile in senso improprio in un intorno di $+\infty$.

Si conclude che l'integrale improprio è assolutamente convergente (e quindi convergente).

(B) 2. Si ha

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x-e^{-x}}{\sqrt{\cos x}-1} &= \lim_{x\to 0^+}\frac{e^x-1-(e^{-x}-1)}{x}\;\frac{x}{(1+(\cos x-1))^{1/2}-1}\\
&= \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{e^x-1}{x}+\frac{e^{-x}-1}{-x}\right)\;\frac{\cos x-1}{(1+(\cos x-1))^{1/2}-1}\;\frac{x}{\cos x-1}\\
&= 2\cdot\frac{1}{1/2}\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\cos x-1}\,.
\end{aligned}$$

Poichè $\lim_{x\to 0^+}(\cos x-1)/x=0$ e poichè la funzione $(\cos x-1)/x$ è negativa in un intorno destro di 0, si conclude che $\lim_{x\to 0^+} x/(\cos x-1)=-\infty$ e quindi anche il limite assegnato è uguale a $-\infty$.

Esame di Analisi Matematica I (A)

Ingegneria Edile & Gestionale, 17 ottobre 2000

Michele Campiti

1. Studiare la convergenza semplice ed assoluta della serie :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+1} \; - \; \operatorname{sen} \frac{1}{n+1} \right) \; .$$

2. Si calcoli il seguente integrale indefinito:

$$\int \frac{\cos x}{(2+\operatorname{sen} x)\, \sqrt{\log(2+\operatorname{sen} x)}}\, dx \; .$$

Esame di Analisi Matematica I (B)

Ingegneria Edile & Gestionale, 17 ottobre 2000

Michele Campiti

1. Studiare la convergenza semplice ed assoluta della serie :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \log\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right) .$$

2. Studiare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x} - \operatorname{sen}\sqrt{x}}{\log\left(1 + x\sqrt{x}\right)} .$$

Soluzione prova scritta di Analisi Matematica I
Ingegneria Edile & Gestionale, 17 ottobre 2000

(A) 1. La funzione $x - \operatorname{sen} x$ è un infinitesimo di ordine 3 in 0 (infatti, applicando la regola di l'Hôpital,

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \frac{1}{6})$$

e pertanto tale è la successione

$$\left(\frac{1}{n+1} - \operatorname{sen} \frac{1}{n+1}\right)_{n\in\mathbf{N}}$$

(ponendo $x = 1/(n+1)$). Dal criterio sull'ordine di infinitesimo per le serie si conclude che la serie in esame è assolutamente convergente (e quindi anche semplicemente convergente).

(A) 2. Si applica la regola di sostituzione ponendo $t = 2 + \operatorname{sen} x$, da cui $dt = \cos x \, dx$, e si ottiene

$$\int \frac{\cos x}{(2 + \operatorname{sen} x)\ \sqrt{\log(2 + \operatorname{sen} x)}}\, dx = \int \frac{1}{t\sqrt{t}}\, dt = 2\sqrt{t} + c = 2\sqrt{2 + \operatorname{sen} x} + c,$$

with $c \in \mathbf{R}$.

Soluzione prova scritta di Analisi Matematica I (B)
Ingegneria Edile & Gestionale, 17 ottobre 2000

(B) 1. Si osserva innanzitutto che il termine generale della serie è un infinitesimo di ordine 1 e quindi la serie non può essere assolutamente convergente.

A questo punto conviene osservare che la serie è a termini di segno alterno in quanto, per n pari,

$$\log\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right) = \log\left(1+\frac{1}{n}\right) = \log\frac{n+1}{n} > 0 \ ,$$

mentre, per n dispari,

$$\log\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right) = \log\left(1-\frac{1}{n}\right) = \log\frac{n-1}{n} < 0 \ .$$

Al fine di applicare il criterio di Leibnitz, si scrive la serie nella forma

$$\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n a_n \ ,$$

ponendo, per ogni $n \geq 2$,

$$a_n = (-1)^n \cdot \log\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right) \ .$$

Si osserva che la successione $(a_n)_{n\geq 2}$ è infinitesima e, inoltre, da quanto sopra,

$$a_n = (-1)^n \cdot \log\frac{n+1}{n} = \log\frac{n+1}{n}, \qquad n \text{ pari},$$

$$a_n = (-1)^n \cdot \log\frac{n-1}{n} = -\log\frac{n-1}{n} = \log\left(\frac{n-1}{n}\right)^{-1} = \log\frac{n}{n-1}, \qquad n \text{ dispari}.$$

Pertanto, per n pari, $a_{n+1} = \log\dfrac{n+1}{n} = a_n$ mentre, per n dispari, $a_{n+1} = \log\dfrac{n+1}{n+1} < \log\dfrac{n}{n-1} = a_n$ (in quanto $\dfrac{n+1}{n+1} < \dfrac{n}{n-1}$ e la funzione logaritmo è crescente). Quindi la successione $(a_n)_{n\geq 2}$ è decrescente e dal criterio di Leibnitz segue la convergenza semplice della serie.

(B) 2. Posto $\sqrt{x} = y$ e considerato il limite notevole $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log(1+x)}{x} = 1$, si ottiene

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x}-\operatorname{sen}\sqrt{x}}{\log\left(1+x\sqrt{x}\right)} &= \lim_{y\to 0}\frac{y-\operatorname{sen} y}{\log\left(1+y^3\right)} \\
&= \lim_{y\to 0}\frac{y-\operatorname{sen} y}{y^3}\,\frac{y^3}{\log\left(1+y^3\right)} \ . \\
&= \lim_{y\to 0}\frac{y-\operatorname{sen} y}{y^3}
\end{aligned}$$

Infine, applicando la regola di l'Hôpital,

$$\lim_{y \to 0} \frac{y - \operatorname{sen} y}{y^3} = \lim_{y \to 0} \frac{1 - \cos y}{3y^2} = \frac{1}{6} .$$

Esame di Analisi Matematica I (A)

Ingegneria Edile & Gestionale, 13 novembre 2000

Michele Campiti

1. Determinare le radici seste del numero complesso:

$$z = (\mathrm{i} - 1)^4 \ .$$

2. Studiare la convergenza del seguente integrale improprio:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\log \sqrt{x}}{(x-1)^{3/2}} \, dx \ .$$

Esame di Analisi Matematica I (B)

Ingegneria Edile & Gestionale, 13 novembre 2000

Michele Campiti

1. Determinare le radici terze del numero complesso:

$$z = (-1 - \mathrm{i})^2 \; .$$

2. Studiare la convergenza del seguente integrale improprio:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\log x} \operatorname{sen} \frac{\sqrt{x-1}}{x^2} \, dx \; .$$

Soluzione prova scritta di Analisi Matematica I
Ingegneria Edile & Gestionale, 13 novembre 2000

(A) 1. Si ha $\mathrm{i}-1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\frac{3}{4}\pi\right)$ e quindi $(\mathrm{i}-1)^4 = 4\,(\cos\pi + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\pi) = -4$. Le radici seste richieste sono date da:

$$w_0 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt[3]{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\mathrm{i}}{2}\right)\ ,$$

$$w_1 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\pi}{2} + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt[3]{2}\,\mathrm{i}\ ,$$

$$w_2 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{6} + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\frac{5\pi}{6}\right) = \sqrt[3]{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\mathrm{i}}{2}\right)\ ,$$

$$w_3 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{6} + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\frac{7\pi}{6}\right) = \sqrt[3]{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\mathrm{i}}{2}\right)\ ,$$

$$w_4 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{3\pi}{2} + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\frac{3\pi}{2}\right) = -\sqrt[3]{2}\,\mathrm{i}\ ,$$

$$w_5 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{11\pi}{6} + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\frac{11\pi}{6}\right) = \sqrt[3]{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\mathrm{i}}{2}\right)\ .$$

(A) 2. Bisogna discutere l'integrabilità in intorni dei punti 1 e $+\infty$. Nel punto 1 la funzione $\log\sqrt{x}$ è un infinitesimo di ordine 1 mentre $(x-1)^{3/2}$ è un infinitesimo di ordine $3/2$. Conseguentemente il rapporto risulta essere un infinito di ordine $1/2$ e quindi, per il criterio sull'ordine di infinito, la funzione è assolutamente integrabile in un intorno di 1.

Nel punto $+\infty$ la funzione $\log\sqrt{x}$ è un infinito di ordine arbitrariamente piccolo e la funzione $(x-1)^{3/2}$ è un infinito di ordine $3/2$. Conseguentemente il rapporto risulta essere un infinitesimo in $+\infty$ di ordine minore di $3/2$ e maggiore di $3/2-\varepsilon$ per ogni $\varepsilon\in]0,3/2[$; considerando, ad esempio, $\varepsilon = 1/4$ si ottiene che il rapporto è un infinitesimo di ordine maggiore di $5/4 > 1$ e quindi, per il criterio sull'ordine di infinitesimo, la funzione è assolutamente integrabile in un intorno di $+\infty$.

Si conclude che la l'integrale improprio è assolutamente convergente (e quindi convergente).

Soluzione prova scritta di Analisi Matematica I (B)
Ingegneria Edile & Gestionale, 13 novembre 2000

(B) 1. Si ha $-1-\mathrm{i} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5}{4}\pi + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\frac{5}{4}\pi\right)$ e quindi $(\mathrm{i}-1)^2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{2}\right) = 2\,\mathrm{i}$. Le radici terze richieste sono date da:

$$w_0 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt[3]{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\mathrm{i}}{2}\right) ,$$

$$w_1 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{6} + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\frac{5\pi}{6}\right) = \sqrt[3]{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\mathrm{i}}{2}\right) ,$$

$$w_2 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{3\pi}{2} + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\frac{3\pi}{2}\right) = -\sqrt[3]{2}\,\mathrm{i} .$$

(B) 2. Bisogna discutere l'integrabilità in intorni dei punti 1 e $+\infty$. Nel punto 1 la funzione $1/\log x$ è un infinito di ordine 1 mentre $\mathrm{sen}\,\sqrt{x-1}/x^2$ è un infinitesimo di ordine $1/2$. Conseguentemente il prodotto risulta essere un infinito di ordine $1/2$ e quindi, per il criterio sull'ordine di infinito, la funzione è assolutamente integrabile in un intorno di 1.

Nel punto $+\infty$ la funzione $1/\log x$ è un infinitesimo di ordine arbitrariamente piccolo e la funzione $\mathrm{sen}\,\sqrt{x-1}/x^2$ è un infinitesimo di ordine $3/2$. Conseguentemente il prodotto risulta essere un infinitesimo in $+\infty$ di ordine maggiore di $3/2$ (e minore di $3/2+\varepsilon$ per ogni $\varepsilon > 0$) e quindi, per il criterio sull'ordine di infinitesimo, la funzione è assolutamente integrabile in un intorno di $+\infty$.

Si conclude che la l'integrale improprio è assolutamente convergente (e quindi convergente).

Esame di Analisi Matematica I (A)

Ingegneria Edile & Gestionale, 5 dicembre 2000

Michele Campiti

1. Studiare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(2-\sqrt{x})^{7/3} - 2^{7/3}}{x} \ .$$

2. Studiare la convergenza semplice ed assoluta della seguente serie:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\, n^3 - 1}{n^{9/2} + 1} \ .$$

Esame di Analisi Matematica I (B)

Ingegneria Edile & Gestionale, 5 dicembre 2000

Michele Campiti

1. Studiare il seguente limite:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{(1-\mathrm{e}^x)^{2/3}-1}{3^x}\,.$$

2. Studiare la convergenza semplice ed assoluta della seguente serie:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1+(-1)^n\,n}{n^2+1}\,.$$

Soluzione prova scritta di Analisi Matematica I
Ingegneria Edile & Gestionale, 5 dicembre 2000

(A) 1. Si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{(2-\sqrt{x})^{7/3} - 2^{7/3}}{x} = \lim_{x\to 0} 2^{7/3} \frac{\left(1-\dfrac{\sqrt{x}}{2}\right)^{7/3} - 1}{-\dfrac{\sqrt{x}}{2}} \cdot \left(-\frac{\sqrt{x}}{2x}\right)$$

$$= 2^{7/3}\ \frac{7}{3}\ \lim_{x\to 0} -\ \frac{1}{2\sqrt{x}} = -\infty\ .$$

(A) 2. Il termine generale della serie è un infinitesimo di ordine $3/2$ (in quanto al numeratore vi è un infinito di ordine 3 ed al denominatore un infinito di ordine $9/2$) e quindi la serie è assolutamente convergente.

Soluzione prova scritta di Analisi Matematica I (B)
Ingegneria Edile & Gestionale, 5 dicembre 2000

(B) 1. Si ha

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{(1-\mathrm{e}^x)^{2/3}-1}{3^x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{(1-\mathrm{e}^x)^{2/3}-1}{-\mathrm{e}^x} \, \frac{-\mathrm{e}^x}{3^x} = \frac{2}{3} \lim_{x\to-\infty} \Big(-\frac{\mathrm{e}}{3}\Big)^x = 0\ .$$

(B) 2. Si osserva innanzitutto che la serie è a termini di segno alterno. Il termine generale della serie presenta al numeratore un infinito di ordine 1 ed al denominatore un infinito di ordine 2, per cui risulta essere un infinitesimo di ordine 1. Pertanto la serie non può convergere assolutamente. Inoltre il termine generale $(1+(-1)^n\, n)\,/(n^2+1)$ risulta essere la somma del termine $1/(n^2+1)$ che è infinitesimo di ordine 2 (per cui la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$ è (assolutamente) convergente), e del termine $(-1)^n\, n/(n^2+1)$ che è infinitesimo e tale che $n/(n^2+1)$ risulti decrescente (per cui la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\, n}{n^2+1}$ è anch'essa convergente per il criterio di Leibnitz). Si conclude che la serie assegnata è semplicemente convergente in quanto somma di due serie convergenti.