Esonero di Analisi Matematica I (A)

Ingegneria Gestionale, 16 dicembre 1998

(Michele Campiti)

1. Si determinino le soluzioni della seguente equazione:

$$z = \sqrt{\left(\sqrt{3} + \mathrm{i}\right)^3}$$

e le si rappresentino geometricamente nel piano complesso.

2. Dire come sono disposte geometricamente nel piano complesso le

$$\sqrt[4]{\mathrm{i}}.$$

3. Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg}\left(\sqrt{1+\sqrt{x}} - 1\right)\ \log x}{\sqrt{1-\cos x}}.$$

4. Dire quale dei seguenti limiti ha significato (motivando la risposta):

$$\lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{arcsen}\left(\sqrt{x}+1\right)}{\log\sqrt{x}}, \qquad \lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{arcsen}\sqrt{x}}{\log\left(\sqrt{x}+1\right)}$$

e in tal caso calcolarlo.

5. Dire per quali valori di $x \in \mathbf{R}$ la seguente serie é convergente:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4^n\ \operatorname{arcsen}^n x}{\pi^n}\ \operatorname{sen} x.$$

Calcolare la somma (se possibile) per $x = \pi/6$.

Esonero di Analisi Matematica I (B)

Ingegneria Gestionale, 16 dicembre 1998

(Michele Campiti)

1. Si determinino le soluzioni della seguente equazione:

$$z = \sqrt{\left(\mathrm{i} - \sqrt{3}\right)^3}$$

e le si rappresentino geometricamente nel piano complesso.

2. Dire come sono disposte geometricamente nel piano complesso le

$$\sqrt[3]{-1}.$$

3. Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arcsen}\left(e^{\sqrt{x}} - 1\right)}{\left(\sqrt{1+x} - 1\right)\ \log x}.$$

4. Dire quale dei seguenti limiti ha significato (motivando la risposta):

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x-2} + 1}{\log\left(\sqrt{x} - 1\right)}, \qquad \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{\log\sqrt{x}}$$

e in tal caso calcolarlo.

5. Dire per quali valori di $x \in \mathbf{R}$ la seguente serie é convergente:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n\ \left(2\arccos x - \pi\right)^n}{\pi^n}\ \cos x.$$

Calcolare la somma (se possibile) per $x = \pi/6$.

Esonero di Analisi Matematica I (A)

Ingegneria Edile, 17 dicembre 1998

(Michele Campiti)

1. Si determinino le soluzioni della seguente equazione:

$$z = \sqrt[4]{\frac{\left(\sqrt{3}+\mathrm{i}\right)^8}{1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}}}$$

e le si rappresentino geometricamente nel piano complesso.

2. Dire come sono disposte geometricamente nel piano complesso le

$$\sqrt[4]{-1}.$$

3. Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\mathrm{e}^{\operatorname{sen}\left(1/\sqrt{x}\right)}-1\right)\log x}{\log\left(\dfrac{2\operatorname{arctg} x}{\pi}\right)}.$$

4. Dire quale dei seguenti limiti ha significato (motivando la risposta):

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arcsen}(1+x)\log x}{\log(\operatorname{arcsen}(1+x))}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arcsen}(\log(1+x))}{\log(\operatorname{arcsen}(1+x))}$$

e in tal caso calcolarlo.

5. Dire per quali valori di $x \in \mathbf{R}$ la seguente serie é convergente:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \log^n(\mathrm{e}^x+1)$$

e calcolarne la somma.

Esonero di Analisi Matematica I (B)

Ingegneria Edile, 17 dicembre 1998

(Michele Campiti)

1. Si determinino le soluzioni della seguente equazione:

$$z = \sqrt[3]{\frac{\left(\sqrt{3}\,\mathrm{i}+1\right)^5}{\sqrt{3}+\mathrm{i}}}$$

e le si rappresentino geometricamente nel piano complesso.

2. Dire come sono disposte geometricamente nel piano complesso le

$$\sqrt[3]{-i}.$$

3. Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\mathrm{e}^{-1+\sqrt{(1+x)/x}}-1\right)\,\log x}{\log\left(\dfrac{2-x^2}{1-x^2}\right)}.$$

4. Dire quale dei seguenti limiti ha significato (motivando la risposta):

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log x+\log(-x)}{\log^2 x}, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)\,\log(1-x)}{\log(1-x^2)}$$

e in tal caso calcolarlo.

5. Dire per quali valori di $x \in \mathbf{R}$ la seguente serie é convergente:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{4^n\ \operatorname{arcsen}^n x}{\pi^n}$$

e calcolarne la somma.

Soluzione esonero di Analisi Matematica I (A)
Ingegneria Gestionale, 17 dicembre 1998

1. In forma trigonometrica si ha $\sqrt{3}+\mathrm{i} = 2(\cos\pi/6 + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\pi/6)$ e quindi $\left(\sqrt{3}+\mathrm{i}\right)^3 = 8(\cos\pi/2 + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\pi/2) = 8i$. Pertanto le due radici sono date da

$$z_1 = 2\sqrt{2}(\cos\pi/4+\mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\pi/4) = 2+2\mathrm{i}, \quad z_2 = 2\sqrt{2}(\cos 5\pi/4+\mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,5\pi/4) = -2-2\mathrm{i}.$$

---

2. Le radici $\sqrt[4]{\mathrm{i}}$ costituiscono i vertici di un quadrato sulla circonferenza di centro l'origine e raggio 1 e uno dei vertici ha argomento uguale a $\pi/4$.

---

3. Utilizzando i limiti notevoli, si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{arctg}\left(\sqrt{1+\sqrt{x}}-1\right)\ \log x}{\sqrt{1-\cos x}} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\mathrm{arctg}\left(\sqrt{1+\sqrt{x}}-1\right)}{\sqrt{1+\sqrt{x}}-1}\frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}-1}{\sqrt{x}}\times\right.$$
$$\left.\times\sqrt{\frac{x^2}{1-\cos x}}\frac{\log x}{\sqrt{x}}\right) = 1\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot(-\infty) = -\infty.$$

---

4. Il primo limite non ha significato in quanto il punto 1 non é di accumulazione (infatti l'argomento dell'arcoseno deve essere minore o uguale di 1 e quindi il numeratore é definito solo in 0). Per quanto riguarda il secondo limite si ha

$$\lim_{x\to 1}\frac{\mathrm{arcsen}\sqrt{x}}{\log\left(\sqrt{x}+1\right)} = \frac{\mathrm{arcsen}1}{\log 2} = \frac{\pi}{2\log 2}.$$

---

5. Poiché il fattore $\mathrm{sen}\,x$ non dipende da n, la serie si puó scrivere $\mathrm{sen}\,x\ \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{4\ \mathrm{arcsen}\,x}{\pi}\right)^n$ e tenendo presente che la serie geometrica converge se e solo se la sua ragione é compresa tra -1 e 1, la serie assegnata risulta convergente se e solo se $-1 < \frac{4\ \mathrm{arcsen}\,x}{\pi} < 1$, quindi per $-\pi/4 < \mathrm{arcsen}\,x < \pi/4$, da cui

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} < x < \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Nel punto $\pi/6$ la serie é pertanto convergente e la sua somma é data da

$$\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{6}\ \left(\frac{1}{1-\frac{4\ \mathrm{arcsen}\,\frac{\pi}{6}}{\pi}}-1\right) = \frac{1}{2}\ \left(\frac{\pi}{\pi-4\,\mathrm{arcsen}\,\frac{\pi}{6}}-1\right) = 2\ \frac{\mathrm{arcsen}\,\frac{\pi}{6}}{\pi-4\,\mathrm{arcsen}\,\frac{\pi}{6}}.$$

Soluzione esonero di Analisi Matematica I (B)
Ingegneria Gestionale, 17 dicembre 1998

1. In forma trigonometrica si ha $\mathrm{i}-\sqrt{3}=2(\cos 5\pi/6+\mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,5\pi/6)$ e quindi $\left(\mathrm{i}-\sqrt{3}\right)^3=8(\cos 5\pi/2+\mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,5\pi/2)=8i$. Pertanto le due radici sono date da

$$z_1=2\sqrt{2}(\cos\pi/4+\mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\pi/4)=2+2\mathrm{i},\quad z_2=2\sqrt{2}(\cos 5\pi/4+\mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,5\pi/4)=-2-2\mathrm{i}.$$

---

2. Le radici $\sqrt[3]{-1}$ costituiscono i vertici di un triangolo equilatero sulla circonferenza di centro l'origine e raggio 1 e uno dei vertici ha argomento $\pi/3$.

---

3. Utilizzando i limiti notevoli, si ha

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{arcsen}\left(\mathrm{e}^{\sqrt{x}}-1\right)}{\left(\sqrt{1+x}-1\right)\ \log x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{arcsen}\left(\mathrm{e}^{\sqrt{x}}-1\right)}{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}-1}\frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}-1}{\sqrt{x}}\frac{x}{\sqrt{1+x}-1}\frac{1}{\sqrt{x}\log x}=2\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x}\log x}.$$

Tenendo presente che la funzione é negativa in un intorno (destro) di 0 e che il limite della sua reciproca é 0, il limite richiesto é uguale a $-\infty$.

---

4. Il primo limite non ha significato in quanto il punto 1 non é di accumulazione (infatti l'argomento della radice al numeratore é definito solo per $x\geq 2$). Per quanto riguarda il secondo limite si ha

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{\log\sqrt{x}}=\lim_{y\to 0}\frac{\sqrt{1+y}-1}{\log\sqrt{1+y}}=\lim_{y\to 0}\frac{\sqrt{1+y}-1}{\log\left(1+\left(\sqrt{1+y}-1\right)\right)}=1.$$

---

5. Poiché il fattore $\cos x$ non dipende da n, la serie si puó scrivere $\cos x\ \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2\ (2\arccos x-\pi)}{\pi}\right)^n$ e tenendo presente che la serie geometrica converge se e solo se la sua ragione é compresa tra -1 e 1, la serie assegnata risulta convergente se e solo se $-1<\frac{2\ (2\arccos x-\pi)}{\pi}<1$, quindi per $\pi/4<\arccos x<3\pi/4$, da cui

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}<x<\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Nel punto $\pi/6$ la serie é pertanto convergente e la sua somma é data da

$$\cos\frac{\pi}{6}\ \left(\frac{1}{1-\frac{2\ \left(2\arccos\frac{\pi}{6}-\pi\right)}{\pi}}-1\right)$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\ \left(\frac{\pi}{\pi-2\ \left(2\arccos\frac{\pi}{6}-\pi\right)}-1\right)=\sqrt{3}\left(2\arccos\frac{\pi}{6}-\pi\right).$$

Soluzione esonero di Analisi Matematica I (A)
Ingegneria Edile, 17 dicembre 1998

1. In forma trigonometrica risulta

$$\sqrt{3}+\mathrm{i} = 2(\cos\pi/6 + \mathrm{i}\operatorname{sen}\pi/6), \quad 1+\sqrt{3}\,\mathrm{i} = 2(\cos\pi/3 + \mathrm{i}\operatorname{sen}\pi/3)$$

e pertanto $\left(\sqrt{3}+\mathrm{i}\right)^8 = 256(\cos 4\pi/3 + \mathrm{i}\operatorname{sen}4\pi/3)$ da cui

$$\frac{\left(\sqrt{3}+\mathrm{i}\right)^8}{1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}} = 128(\cos\pi + \mathrm{i}\operatorname{sen}\pi) = -1.$$

Quindi le radici richieste sono date da:

$$z_1 = 2\sqrt[4]{8}(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}) = 2\sqrt[4]{2} + 2\sqrt[4]{2}\,\mathrm{i},$$

$$z_2 = 2\sqrt[4]{8}(\cos\frac{3\pi}{4} + \mathrm{i}\operatorname{sen}\frac{3\pi}{4}) = -2\sqrt[4]{2} + 2\sqrt[4]{2}\,\mathrm{i},$$

$$z_3 = 2\sqrt[4]{8}(\cos\frac{5\pi}{4} + \mathrm{i}\operatorname{sen}\frac{5\pi}{4}) = 2\sqrt[4]{2} - 2\sqrt[4]{2}\,\mathrm{i},$$

$$z_4 = 2\sqrt[4]{8}(\cos\frac{7\pi}{4} + \mathrm{i}\operatorname{sen}\frac{7\pi}{4}) = -2\sqrt[4]{2} - 2\sqrt[4]{2}\,\mathrm{i}.$$

---

2. Le radici quarte di -1 costituiscono i vertici di un quadrato sulla circonferenza di centro l'origine e raggio 1 e con i vertici sulle bisettrici degli assi coordinati.

---

3. Utilizzando i limiti notevoli si ha

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\mathrm{e}^{\operatorname{sen}\left(1/\sqrt{x}\right)}-1\right)\log x}{\log\left(\dfrac{2\operatorname{arctg}x}{\pi}\right)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\operatorname{sen}\left(1/\sqrt{x}\right)}-1}{\operatorname{sen}(1/\sqrt{x})}\,\frac{\operatorname{sen}(1/\sqrt{x})}{1/\sqrt{x}}\times$$

$$\times\frac{\frac{2\operatorname{arctg}x}{\pi}-1}{\log\left(1+\left(\dfrac{2\operatorname{arctg}x}{\pi}-1\right)\right)}\,\frac{\log x}{\sqrt{x}\,\left(\frac{2\operatorname{arctg}x}{\pi}-1\right)} = \pi\lim_{x\to+\infty}\frac{\log x}{\sqrt{x}\,(2\operatorname{arctg}x-\pi)}.$$

Posto $y = \operatorname{arctgx}$ nell'ultimo limite e osservato che $y \to \pi/2^-$, si ottiene $\pi\lim_{y\to\pi/2^-}\frac{\log\operatorname{tg}y}{\sqrt{\operatorname{tg}y}\,(2\,y-\pi)}$ da cui, posto ancora $u=\pi/2-y$, si ha $u\to 0^+$ e tenendo presente che $\cos u\to 0$ e $\log\cos u\to 0$ per $u\to 0$, si ottiene

$$-\pi\lim_{u\to0^+}\frac{\log\frac{\cos u}{\operatorname{sen}u}}{\sqrt{\frac{\cos u}{\operatorname{sen}u}}\,2u} = -\frac{\pi}{2}\lim_{u\to0^+}-\log\operatorname{sen}u\sqrt{\frac{\operatorname{sen}u}{u}}\,\frac{1}{\sqrt{u}} = \frac{\pi}{2}\lim_{u\to0^+}\frac{\log\operatorname{sen}u}{\sqrt{u}} = -\infty.$$

4. Il primo limite non ha significato in quanto il punto 0 é di accumulazione solo a sinistra per la funzione arcosen $(1+x)$ e solo a destra per la funzione $\log x$. Per quanto riguarda il secondo limite si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{arcsen}(\log(1+x))}{\log(\text{arcsen}(1+x))} = \frac{1}{\pi/2} \lim_{x\to 0} \text{arcsen}(\log(1+x)) = 0.$$

---

5. Si tratta della serie geometrica $\sum_{n=0}^{+\infty} (-\log(\mathrm{e}^x+1))^n$ che converge per $-1 < -\log(\mathrm{e}^x+1) < 1$, cioé per $\mathrm{e}^{-1} < \mathrm{e}^x + 1 < \mathrm{e}$ e quindi per

$$\log(\mathrm{e}^{-1} - 1) < x < \log(\mathrm{e} - 1).$$

Per tali valori di x, la somma é data da

$$\frac{1}{1+\log(\mathrm{e}^x+1)}.$$

Soluzione esonero di Analisi Matematica I (B)
Ingegneria Edile, 17 dicembre 1998

1. In forma trigonometrica si ha $\sqrt{3}\,\mathrm{i} + 1 = 2(\cos\pi/3 + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\pi/3)$ e $\sqrt{3} + \mathrm{i} = 2(\cos\pi/6 + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\pi/6)$. Quindi $\left(\sqrt{3}\,\mathrm{i} + 1\right)^5 = 32(\cos 5\pi/3 + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,5\pi/3)$ e conseguentemente

$$\frac{\left(\sqrt{3}\,\mathrm{i}+1\right)^5}{\sqrt{3}+\mathrm{i}} = 16(\cos 3\pi/2 + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,3\pi/2).$$

Le radici terze richieste sono date da

$$z_1 = 2\sqrt[3]{2}(\cos\pi/2 + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\pi/2) = 2\sqrt[3]{2}\mathrm{i},$$

$$z_2 = 2\sqrt[3]{2}(\cos 7\pi/6 + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,7\pi/6) = -\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{2}\sqrt{3}\mathrm{i},$$

$$z_3 = 2\sqrt[3]{2}(\cos 11\pi/6 + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,11\pi/6) = \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{2}\sqrt{3}\mathrm{i}.$$

---

2. Le radici $\sqrt[3]{-i}$ costituiscono i vertici di un triangolo equilatero sulla circonferenza di centro l'origine e raggio 1 e uno dei vertici ha argomento uguale a $\pi/2$.

---

3. Utilizzando i limiti notevoli, si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\mathrm{e}^{-1+\sqrt{(1+x)/x}} - 1\right)\log x}{\log\left(\dfrac{2-x^2}{1-x^2}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\mathrm{e}^{-1+\sqrt{(1+x)/x}} - 1\right)}{-1+\sqrt{(1+x)/x}} \times$$

$$\times \frac{-1+\sqrt{1+1/x}}{1/x} \frac{\dfrac{2-x^2}{1-x^2} - 1}{\log\left(1 + \left(\dfrac{2-x^2}{1-x^2} - 1\right)\right)} \frac{\log x}{x\left(\dfrac{2-x^2}{1-x^2} - 1\right)}$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty} \frac{(1-x^2)\log x}{x} = -\infty.$$

---

4. Il primo limite non ha significato in quanto il punto 0 é di accumulazione solo a destra per la funzione $\log x$ e solo a sinistra per la funzione $\log -x$ (quindi la funzione non é definita in un intorno di 0). Per quanto riguarda il secondo limite si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)\,\log(1-x)}{\log(1-x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)\,\log(1-x)}{\log(1+x) + \log(1-x)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{\frac{1}{\log(1-x)} + \frac{1}{\log(1+x)}} = 0.$$

5. Si tratta della serie geometrica $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{4\operatorname{arcsen}x}{\pi}\right)^n$ che converge per $-1 < -\frac{4\operatorname{arcsen}x}{\pi} < 1$ e quindi per $-\pi/4 < \operatorname{arcsen}x < \pi/4$. Pertanto la serie converge per $-\frac{\sqrt{2}}{2} < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$ e per tali valori di x la sua somma é data da

$$\frac{1}{1+\frac{4\operatorname{arcsen}x}{\pi}} = \frac{\pi}{\pi + 4\operatorname{arcsen}x}.$$

Esonero di Analisi Matematica I (A)

Ingegneria Edile e Gestionale, 27 gennaio 1999

(Michele Campiti)

1. Si calcoli l'integrale:

$$\int_0^{1/2} \frac{x^2+1}{(x-1)^2(x+1)}\,dx.$$

2. Si studi l'integrabilità della funzione:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{|x-1|^{5/2}}\,\log x\,dx.$$

3. Si studino la derivabilità ed i massimi e minimi relativi ed eventualmente assoluti della funzione:

$$f(x) = \log\left|\frac{x-2}{x^2-1}\right|.$$

Soluzione (A)

1. Si impone

$$\frac{x^2+1}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x+1} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\gamma_0}{x-1}\right)$$

e si ottiene il sistema

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = 1, \\ 2A_2 + \gamma_0 = 0, \\ -A_1 + A_2 - \gamma_0 = 1, \end{cases}$$

da cui si ricava $A_1 = 1/2$, $A_2 = 1/2$ e $\gamma_0 = -1$. Pertanto

$$\int_0^{1/2} \frac{x^2+1}{(x-1)^2(x+1)}\, dx = \left[\frac{1}{2}\log|x-1| + \frac{1}{2}\log|x+1| - \frac{1}{x-1}\right]_0^{1/2} = \log\frac{\sqrt{3}}{2} + 3.$$

2. L'integrabilità della funzione va studiata in intorni dei punti 0, 1 e $+\infty$.

Nel punto 0, la funzione $\operatorname{sen}\pi x$ é un infinitesimo di ordine 1 mentre il logaritmo é un infinito di ordine arbitrariamente piccolo. Quindi la funzione risulta essere un infinitesimo in 0 ed é pertanto integrabile in un intorno di tale punto.

Nel punto 1, le funzioni $\operatorname{sen}\pi x$ e $\log x$ sono infinitesime di ordine 1 mentre $|x-1|^{5/2}$ é un infinitesimo di ordine $5/2$. Si conclude che la funzione é un infinito di ordine $1/2$ ed é assolutamente integrabile in un intorno di 1 per il criterio sull'ordine di infinito.

Nel punto $+\infty$, la funzione $\log x/|x-1|^{5/2}$ é un infinitesimo di ordine minore di $5/2$ ma maggiore di $5/2-\varepsilon$ per ogni $\varepsilon \in]0, 5/2[$. Considerando, ad esempio, $\varepsilon = 1/4$ si ottiene un infinitesimo di ordine maggiore di $5/4 > 1$ e quindi l'integrabilitá per il criterio sull'ordine di infinitesimo. Poiché risulta

$$\left|\frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{|x-1|^{5/2}}\log x\right| \leq \frac{\log x}{|x-1|^{5/2}}$$

in un intorno di $+\infty$, si conclude per il criterio di confronto che anche la funzione assegnata é assolutamente integrabile in un intorno di $+\infty$.

Poiché la funzione risulta assolutamente integrabile in intorni di 0, 1 e $+\infty$, l'integrale improprio assegnato é assolutamente convergente e quindi convergente.

3. La funzione é definita in $\mathbf{R} \setminus \{-1, 1, 2\}$. Nei punti $\pm\infty$ l'argomento del logaritmo tende a 0 e quindi la funzione tende a $-\infty$. Quindi f non é limitata inferiormente e non puó essere dotata di minimo assoluto. Analogamente, nei punti ± 1, l'argomento del logaritmo tende a $+\infty$ e quindi la funzione tende a $+\infty$. Quindi f non é limitata superiormente e non puó essere dotata di massimo assoluto. (A questo punto il comportamento nel punto 2 é irrilevante anche se in tale punto la funzione tende a $-\infty$.)

La funzione é derivabile in tutto l'insieme di definizione, e poiché tutti i punti dell'insieme di definizione sono interni, gli eventuali punti di massimo e di minimo relativo sono tutti soluzioni dell'equazione $f'(x) = 0$. Per ogni $x \in \mathbf{R} \setminus \{-1, 1, 2\}$ risulta

$$f'(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 2} \, \frac{x^2 - 1 - 2x^2 + 4x}{(x^2 - 1)^2} = -\frac{x^2 - 4x + 1}{(x - 2)(x^2 - 1)}$$

e si ha $f'(x) = 0$ nei punti $x_1 = 2 - \sqrt{3}$ e $x_2 = 2 + \sqrt{3}$. Dallo studio del segno di f' segue che $(2 - \sqrt{3}, \log(\sqrt{3}/(4\sqrt{3} - 6)))$ é un punto di minimo relativo, mentre $(2 + \sqrt{3}, \log(\sqrt{3}/(6 + 4\sqrt{3})))$ é un punto di massimo relativo per f.

Esonero di Analisi Matematica I (B)

Ingegneria Edile e Gestionale, 27 gennaio 1999

(Michele Campiti)

1. Si calcoli l'integrale:

$$\int_0^{1/2} \frac{x^2+1}{(x-1)^3}\,dx.$$

2. Si studi l'integrabilitá della funzione:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(\pi x)}{|2x-1|^\pi} \log 2x\,dx.$$

3. Si studino la derivabilitá ed i massimi e minimi relativi ed eventualmente assoluti della funzione:

$$f(x) = \log\left(\frac{x^2-1}{|x-2|}\right).$$

Soluzione (B)

1. Si impone
$$\frac{x^2+1}{(x-1)^3} = \frac{A}{x-1} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\gamma_0+\gamma_1 x}{(x-1)^2}\right)$$
e si ottiene il sistema
$$\begin{cases} A = 1, \\ -2A + \gamma_1 = 0, \\ A - 2\gamma_0 = 1, \end{cases}$$
da cui si ricava $A = 1$, $\gamma_0 = 0$ e $\gamma_1 = -2$. Pertanto
$$\int_0^{1/2} \frac{x^2+1}{(x-1)^2(x+1)}\,dx = \left[\log|x-1| - \frac{2x}{(x-1)^2}\right]_0^{1/2} = \log\frac{1}{2} - 4.$$

2. L'integrabilitá della funzione va studiata in intorni dei punti 0, 1/2 e $+\infty$.

Nel punto 0, la funzione $1-\cos\pi x$ é un infinitesimo di ordine 2 mentre il logaritmo é un infinito di ordine arbitrariamente piccolo. Quindi la funzione risulta essere un infinitesimo in 0 ed é pertanto integrabile in un intorno di tale punto.

Nel punto 1/2, la funzione $1-\cos\pi x$ non é infinitesima né infinita, la funzione $\log 2x$ é infinitesima di ordine 1 mentre $|2x-1|^\pi$ é un infinitesimo di ordine π. Si conclude che la funzione é un infinito di ordine $\pi - 1$ e pertanto, per il criterio sull'ordine di infinito, non é assolutamente integrabile. Precisamente, l'integrale improprio é divergente positivamente in un intorno destro di 1/2 e negativamente in un intorno sinistro di 1/2.

Per completezza, si osserva che nel punto $+\infty$, la funzione $\log 2x/|x-1|^\pi$ é un infinitesimo di ordine minore di π ma maggiore di $\pi-\varepsilon$ per ogni $\varepsilon\in]0,\pi[$. Considerando, ad esempio, $\varepsilon = 1/10$ si ottiene un infinitesimo di ordine maggiore di $\pi - 1/10 > 1$ e quindi l'integrabilitá in un intorno di $+\infty$ per il criterio sull'ordine di infinitesimo. Poiché risulta
$$\left|\frac{1-\cos(\pi x)}{|x-1|^\pi}\log 2x\right| \le \frac{\log 2x}{|x-1|^\pi}$$
in un intorno di $+\infty$, per il criterio di confronto anche la funzione assegnata é assolutamente integrabile in un intorno di $+\infty$.

3. La funzione é definita in $]-\infty,-1[\cup]1,2[\cup]2,+\infty[$. Nei punti ± 1, l'argomento del logaritmo tende a 0 e quindi la funzione tende a $-\infty$. Quindi f non é limitata inferiormente e non puó essere dotata di minimo assoluto. Analogamente, nei punti $\pm\infty$, l'argomento del logaritmo tende a $+\infty$ e quindi la funzione tende a $+\infty$. Quindi f non é limitata superiormente e non puó essere dotata di massimo assoluto. (A questo punto il comportamento nel punto 2 é irrilevante anche se in tale punto la funzione tende a $+\infty$.)

La funzione é derivabile in tutto l'insieme di definizione, e poiché tutti i punti dell'insieme di definizione sono interni, gli eventuali punti di massimo e di minimo relativo sono tutti soluzioni dell'equazione $f'(x) = 0$. Per ogni $]-\infty, -1[\cup]1, 2[\cup]2, +\infty[$ risulta

$$f'(x) = \frac{|x-2|}{x^2-1} \, \frac{2x|x-2| - \frac{|x-2|}{x-2}(x^2-1)}{|x-2|^2} = \frac{x^2-4x+1}{(x-2)(x^2-1)}$$

e si ha $f'(x) = 0$ solamente nel punto $x_1 = 2 + \sqrt{3}$ (il punto $x_2 = 2 - \sqrt{3}$ non appartiene all'insieme di definizione. Dallo studio del segno di f' segue che $(2 + \sqrt{3}, \log(2\sqrt{3} + 4))$ é un punto di minimo relativo per f.

Esonero di Analisi Matematica I (C)

Ingegneria Edile e Gestionale, 27 gennaio 1999

(Michele Campiti)

1. Si calcoli l'integrale:
$$\int_0^1 \frac{x-1}{(x^2+1)^2}\,dx.$$

2. Si studi l'integrabilità della funzione:
$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\operatorname{sen}(\pi x/4)}{\sqrt{|x-2|^7}}\,\log(x/2)\,dx.$$

3. Si studino la derivabilità ed i massimi e minimi relativi ed eventualmente assoluti della funzione:
$$f(x) = \exp\left(\frac{x-2}{|x^2-1|}\right).$$

Soluzione (C)

1. Si impone
$$\frac{x-1}{(x^2+1)^2} = \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\gamma_0+\gamma_1 x}{x^2+1}\right)$$
e si ottiene il sistema
$$\begin{cases} B=0, \\ C-\gamma_1=0, \\ B-2\gamma_0=1, \\ C+\gamma_1=-1, \end{cases}$$
da cui si ricava $B=0$, $C=-1/2$, $\gamma_0=-1/2$ e $\gamma_1=-1/2$. Pertanto
$$\int_0^1 \frac{x-1}{(x^2+1)^2}\,dx = \left[-\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\frac{x+1}{x^2+1}\right]_0^1 = -\frac{\pi}{8}.$$

2. L'integrabilitá della funzione va studiata in intorni dei punti 0, 2 e $+\infty$.

Nel punto 0, la funzione $1-\operatorname{sen}(\pi x/4)$ non é infinitesima né infinita, mentre $\log x/2$ é un infinito di ordine arbitrariamente piccolo. Quindi la funzione risulta essere un infinito di ordine arbitrariamente picoclo in 0 ed é pertanto integrabile in un intorno di tale punto per il criterio sull'ordine di infinito.

Nel punto 2, le funzioni $1-\operatorname{sen}(\pi x/4)$ e $\log x$ sono infinitesime di ordine 2 e rispettivamente 1 mentre $\sqrt{|x-2|^7}$ é un infinitesimo di ordine $7/2$. Si conclude che la funzione é un infinito di ordine $1/2$ ed é assolutamente integrabile in un intorno di 2 per il criterio sull'ordine di infinito.

Nel punto $+\infty$, la funzione $(\log x/2)/\sqrt{|x-2|^7}$ é un infinitesimo di ordine minore di $7/2$ ma maggiore di $7/2-\varepsilon$ per ogni $\varepsilon \in]0,7/2[$. Considerando, ad esempio, $\varepsilon=2$ si ottiene un infinitesimo di ordine maggiore di $3/2>1$ e quindi l'integrabilitá per il criterio sull'ordine di infinitesimo. Poiché risulta
$$\left|\frac{1-\operatorname{sen}(\pi x/4)}{\sqrt{|x-2|^7}}\log(x/2)\right| \le \frac{\log(x/2)}{\sqrt{|x-2|^7}}$$
in un intorno di $+\infty$, si conclude per il criterio di confronto che anche la funzione assegnata é assolutamente integrabile in un intorno di $+\infty$.

Poiché la funzione risulta assolutamente integrabile in intorni di 0, 2 e $+\infty$, l'integrale improprio assegnato é assolutamente convergente e quindi convergente.

3. La funzione é definita in $\mathbf{R}\setminus\{-1,1\}$. Nei punti $\pm\infty$ l'argomento dell'esponenziale tende a 0 e quindi la funzione tende a 1. Quindi la retta di equazione $y=1$ é un asintoto orizzontale a destra e a sinistra per f. Nei punti ± 1 l'argomento della funzione esponenziale tende a $-\infty$ e quindi la funzione tende a 0. Poiché la funzione é strettamente positiva, essa non é dotata di minimo assoluto, ma solo di estremo inferiore uguale a 0.

La funzione é derivabile in tutto l'insieme di definizione, e poiché tutti i punti dell'insieme di definizione sono interni, gli eventuali punti di massimo e di minimo relativo sono tutti soluzioni dell'equazione $f'(x) = 0$. Per ogni $x \in \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}$ risulta

$$\begin{aligned} f'(x) &= \exp\left(\frac{x-2}{|x^2-1|}\right) \frac{|x^2-1| - \frac{|x^2-1|}{x^2-1} 2x(x-2)}{|x^2-1|^2} \\ &= -\exp\left(\frac{x-2}{|x^2-1|}\right) \frac{x^2-4x+1}{|x^2-1|(x^2-1)} \end{aligned}$$

e si ha $f'(x) = 0$ nei punti $x_1 = 2 - \sqrt{3}$ e $x_2 = 2 + \sqrt{3}$. Dallo studio del segno di f' segue che $(2 - \sqrt{3}, \exp(-\sqrt{3}/(4\sqrt{3} - 6)))$ e $(2 + \sqrt{3}, \exp(\sqrt{3}/(6 + 4\sqrt{3})))$ sono punti di massimo relativo per f. Poiché $f(x_2)$ é maggiore sia di $f(x_1)$, sia del valore dell'asintoto orizzontale e sia del limite di f nei punti ± 1, si conclude che $f(x_2)$ é il massimo assoluto di f.

Esame di Analisi Matematica I (A)

Ingegneria Edile & Gestionale, 8 Febbraio 1999

Michele Campiti

1. Studiare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left(\sqrt{1+\log^{-1} x} - 1\right) \quad \log x \quad \log\cos x}{\log\left(1+x^2\right)}.$$

2. Discutere e calcolare il seguente integrale:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\log\left(1+(e^x)^2\right)}{e^x}\, dx.$$

3. Studiare la seguente funzione e tracciarne approssimativamente il grafico:

$$f(x) = |\text{sen}\,(3x)| + \text{tg}\,(2x).$$

Esame di Analisi Matematica I (B)

Ingegneria Edile & Gestionale, 8 Febbraio 1999

Michele Campiti

1. Studiare il seguente limite:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\left(\sqrt{1+e^x}-1\right)\ \log^2\left(1+e^{-x}\right)\ \ \log\cos(1/x)}{e^x}.$$

2. Discutere e calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\log\left(1+\operatorname{tg}^2 x\right)}{\operatorname{sen}^2 x}\,dx.$$

3. Studiare la seguente funzione e tracciarne approssimativamente il grafico:

$$f(x) = |\cos(5x)| - \operatorname{tg}(2x).$$

Soluzione - Analisi Matematica I (A)

Ingegneria Edile & Gestionale, 8 Febbraio 1999

1. Si ha:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left(\sqrt{1+\log^{-1}x}-1\right) \quad \log x \quad \log\cos x}{\log\left(1+x^2\right)}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\log^{-1}x}-1}{\log^{-1}x} \quad \frac{\log(1+(\cos x-1))}{\cos x-1} \quad \frac{\cos x-1}{x^2} \quad \frac{x^2}{\log\left(1+x^2\right)}$$

$$\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 1 = -\frac{1}{4}.$$

2. La funzione è integrabile in senso improprio in quanto nei punti $-\infty$ e $+\infty$ è un infinitesimo di ordine arbitrariamente grande.
Posto $t = e^x$ ed integrando per parti, si ha

$$\begin{aligned}\int \frac{\log\left(1+(e^x)^2\right)}{e^x}\,dx &= \int \frac{\log\left(1+(e^x)^2\right)}{(e^x)^2}\,e^x\,dx \\ &= \int \frac{\log\left(1+t^2\right)}{t^2}\,dt \\ &= -\frac{1}{t}\log(1+t^2)+2\int\frac{1}{1+t^2}\,dt \\ &= -\frac{1}{t}\log(1+t^2)+2\operatorname{arctg} t + c\end{aligned}$$

da cui, tenendo presente che $t\to 0$ per $x\to-\infty$ e $t\to+\infty$ per $x\to+\infty$, si ricava

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\log\left(1+(e^x)^2\right)}{e^x}\,dx &= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\lim_{b\to+\infty}\int_\varepsilon^b \frac{\log\left(1+t^2\right)}{t^2}\,dt \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{\log(1+b^2)}{b}+\frac{\log(1+\varepsilon^2)}{\varepsilon}+2\operatorname{arctg} b-2\operatorname{arctg}\varepsilon\right)=\pi.\end{aligned}$$

3. La funzione è definita in $X_f = \mathbf{R}\setminus\{\pi/4+k\pi/2 \mid k\in\mathbf{Z}\}$. Poichè $|\mathrm{sen}|$ è periodica di periodo π, la funzione $|\mathrm{sen}(3x)|$ è periodica di periodo $\pi/3$; inoltre, $\mathrm{tg}(2x)$ è periodica di periodo $\pi/2$ e quindi, considerando il minimo comune multiplo dei periodi, si ottiene che la funzione è periodica di periodo π. Pertanto la si può studiare nell'insieme

$$Y = \left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right[\cup\left]\frac{\pi}{4},\frac{3}{4}\pi\right[.$$

Agli estremi di Y risulta

$$\lim_{x\to -\pi/4^+} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to \pi/4^-} f(x) = +\infty,$$

$$\lim_{x\to \pi/4^+} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to 3\pi/4^-} f(x) = +\infty$$

e quindi f non è limitata superiormente nè inferiormente. Inoltre, f è derivabile nell'insieme $X'_f = X_f \setminus \{k\pi/3 \mid k \in \mathbf{Z}\}$ e per ogni $x \in X'_f$ si ha

$$f'(x) = 3\,\frac{|\mathrm{sen}\,(3x)|}{\mathrm{sen}\,(3x)}\,\cos(3x) + \frac{2}{\cos^2(2x)}.$$

Per quanto riguarda l'insieme Y, bisogna escludere i punti $0, \pi/3, 2\pi/3$ nei quali risulta

$$f'_-(0) = -1, \quad f'_+(0) = 5,$$

$$f'_-\left(\frac{\pi}{3}\right) = 5, \quad f'_+\left(\frac{\pi}{3}\right) = 11, \quad f'_-\left(\frac{2}{3}\pi\right) = 5, \quad f'_+\left(\frac{2}{3}\pi\right) = 11.$$

Pertanto tali punti sono angolosi. Tenendo presente che la derivata prima di f tende a $+\infty$ in $\pm\pi/4$ e $3\pi/4$ si deduce che vi deve essere un massimo relativo tra $-\pi/4$ e 0 (infatti in 0 la derivata sinistra è negativa e in $-\pi/4$ tende a $+\infty$). Inoltre dal confronto delle derivate sinistra e destra in 0, segue che tale punto è un minimo relativo per f. Nei punti $\pi/3$ e $2\pi/3$ invece la funzione è strettamente crescente.

Soluzione - Analisi Matematica I (B)

Ingegneria Edile & Gestionale, 8 Febbraio 1999

1. Si ha:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\left(\sqrt{1+e^x}-1\right)\ \log^2\left(1+e^{-x}\right)\ \ \log\cos(1/x)}{e^x}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{1+e^x}-1}{e^x}\ \frac{\log^2\left(1+e^{-x}\right)}{x^2}\ \frac{\log(1+(\cos(1/x)-1))}{\cos(1/x)-1}\ \frac{\cos(1/x)-1}{1/x^2}$$

$$1\cdot 1\cdot 1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}$$

(si riconosce facilmente che $\lim_{x\to-\infty}\frac{\log^2\left(1+e^{-x}\right)}{x^2}=1$ utilizzando la regola di l'Hôpital).

2. La funzione è integrabile in senso improprio in quanto nel punto 0 tende ad 1 e nel punto $\pi/2$ è un infinito di ordine arbitrariamente piccolo.
Posto $t=\operatorname{tg}x$ (da cui $dt=dx/\cos^2 x$) ed integrando per parti, si ha

$$\begin{aligned}\int \frac{\log\left(1+\operatorname{tg}^2 x\right)}{\operatorname{sen}^2 x}\,dx &= \int \frac{\log\left(1+\operatorname{tg}^2 x\right)}{\operatorname{tg}^2 x}\ \frac{1}{\cos^2 x}\,dx\\ &= \int \frac{\log\left(1+t^2\right)}{t^2}\,dt\\ &= -\frac{1}{t}\log(1+t^2)+2\int\frac{1}{1+t^2}\,dt\\ &= -\frac{1}{t}\log(1+t^2)+2\operatorname{arctg}t+c\end{aligned}$$

da cui, tenendo presente che $t\to 0$ per $x\to 0$ e $t\to+\infty$ per $x\to\pi/2$, si ricava

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2}\frac{\log\left(1+\operatorname{tg}^2 x\right)}{\operatorname{sen}^2 x}\,dx &= \lim_{\varepsilon\to0^+}\lim_{b\to+\infty}\int_\varepsilon^b \frac{\log\left(1+t^2\right)}{t^2}\,dt\\ &= \lim_{\varepsilon\to0^+}\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{\log(1+b^2)}{b}+\frac{\log(1+\varepsilon^2)}{\varepsilon}+2\operatorname{arctg}b-2\operatorname{arctg}\varepsilon\right)=\pi.\end{aligned}$$

3. La funzione è definita in $X_f=\mathbf{R}\setminus\{\pi/4+k\pi/2 \mid k\in\mathbf{Z}\}$. Poichè $|\cos|$ è periodica di periodo π, la funzione $|\cos(5x)|$ è periodica di periodo $\pi/5$; inoltre, $\operatorname{tg}(2x)$ è periodica di periodo $\pi/2$ e quindi, considerando il minimo comune multiplo dei periodi, si ottiene che la funzione è periodica di periodo π. Pertanto la si può studiare nell'insieme

$$Y=\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right[\cup\left]\frac{\pi}{4},\frac{3}{4}\pi\right[.$$

Agli estremi di Y risulta

$$\lim_{x\to-\pi/4^+} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to\pi/4^-} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x\to\pi/4^+} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to3\pi/4^-} f(x) = -\infty$$

e quindi f non è limitata superiormente nè inferiormente. Inoltre, f è derivabile nell'insieme $X'_f = X_f \setminus \{\pi/10 + k\pi/5 \mid k \in \mathbf{Z}\}$ e per ogni $x \in X'_f$ si ha

$$f'(x) = -5\,\frac{|\cos(5x)|}{\cos(5x)}\,\mathrm{sen}\,(5x) - \frac{2}{\cos^2(2x)}.$$

Per quanto riguarda l'insieme Y, bisogna escludere i punti $-\pi/10$, $\pi/10$, $3\pi/10$, $\pi/2$ e $7\pi/10$ nei quali la derivata sinistra risulta strettamente negativa e quella destra strettamente positiva. Pertanto tali punti sono tutti angolosi e sono tutti minimi relativi per f. Tenendo presente che la derivata prima di f tende a $-\infty$ in $\pm\pi/4$ e $3\pi/4$ si deduce che vi devono essere un massimo relativo tra $-\pi/4$ e $-\pi/10$, tra $-\pi/10$ e $\pi/10$, tra $\pi/10$ e $\pi/4$, tra $\pi/4$ e $3\pi/10$, tra $3\pi/10$ e $\pi/2$, tra $\pi/2$ e $7\pi/10$ e infine tra $7\pi/10$ e $3\pi/4$.

Esame di Analisi Matematica I (A)

Ingegneria Edile & Gestionale, 18 Febbraio 1999

Michele Campiti

1. Studiare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\log(2-x)\ \ \operatorname{sen}(\log x)\ \ \arccos x}{\left(\sqrt[3]{x^2}-1\right)\ \ \log^3 x}.$$

2. Studiare il carattere della serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!\ 3^n}{(n+2)!\ (5^n+\log n)}.$$

3. Studiare massimi e minimi relativi ed assoluti della seguente funzione:

$$f(x) = \cos 2x - 2\operatorname{sen} x.$$

Esame di Analisi Matematica I (B)

Ingegneria Edile & Gestionale, 18 Febbraio 1999

Michele Campiti

1. Determinare i numeri complessi $z \in \mathbf{C}$ che soddisfano la seguente disequazione:

$$|Re\, z + Im\, z| \leq |z|.$$

2. Discutere il seguente integrale:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log x \;\; \operatorname{arctg}^2 x}{x^2 \; (x-1)}\, dx.$$

3. Studiare massimi e minimi relativi ed assoluti della seguente funzione:

$$f(x) = \operatorname{sen} 2x - 2\cos x.$$

Soluzione Scritto di Analisi Matematica I (A) Ingegneria Edile & Gestionale, 18 Febbraio 1999

1. Tenendo presente che

$$\lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{sen}(\log x)}{\log x} = 1,$$

si ha:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} \frac{\log(2-x)\ \operatorname{sen}(\log x)\ \arccos x}{\left(\sqrt[3]{x^2}-1\right)\ \log^3 x} &= \lim_{x\to 1} \frac{\log(2-x)\ \arccos x}{\left(\sqrt[3]{x^2}-1\right)\ \log^2 x} \\
&= \lim_{y\to 0} \frac{-\log(1-y)}{-y}\ \frac{y}{(1+y)^{2/3}-1}\ \frac{\arccos(1+y)}{\log^2(1+y)} \\
&= (-1)\cdot\frac{3}{2}\cdot\lim_{y\to 0}\frac{\arccos(1+y)}{\log^2(1+y)}
\end{aligned}$$

(nelle ultime uguaglianze si è posto $y = x - 1$). Poichè la funzione logaritmo è un infinitesimo di ordine 1 in 1 (quindi $\log^2(1+y)$ ha ordine 2 per $y \to 0$) mentre la funzione arcocoseno è un infinitesimo di ordine $1/2$, si conclude che la funzione è un infinito di ordine $3/2$. Dall'ultimo limite segue inoltre facilmente che la funzione è negativa in un intorno di 1 e pertanto il limite richiesto è uguale a $-\infty$.

2. La serie assegnata è a termini positivi e per ogni $n \geq 1$, risulta

$$\frac{n!}{(n+2)!}\ \frac{3^n}{5^n+\log n} \leq \frac{3^n}{(n+1)(n+2)5^n};$$

inoltre

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3^{n+1}}{(n+2)(n+3)5^{n+1}}\ \frac{(n+1)(n+2)5^n}{3^n} = \frac{3}{5}\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{n+3} = \frac{3}{5}.$$

Dal criterio del rapporto segue che la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{(n+1)(n+2)5^n}$$

è convergente e quindi, per il criterio del confronto per le serie a termini positivi, lo è anche la serie assegnata.

3. La funzione è definita e continua in tutto $\mathbf{R}$ ed è periodica di periodo 2π. Pertanto sarà dotata di minimo e di massimo assoluto. Inoltre, poichè la funzione

è derivabile in tutto l'insieme di definizione, per lo studio dei massimi e minimi relativi (ed assoluti) è sufficiente in questo caso considerare i punti in cui si annulla la derivata prima.
Per ogni $x \in \mathbf{R}$ risulta

$$f'(x) = 2\,\mathrm{sen}\,2x - 2\cos x = 2\cos x(2\mathrm{sen}\,x - 1)$$

e quindi f' si annulla nei punti $\pi/2 + k\pi$, $-\pi/6 + 2k\pi$ e $7\pi/6 + 2k\pi$, con $k \in \mathbf{Z}$. Dallo studio del segno di f' segue che, per ogni $k \in \mathbf{Z}$, i punti $\pi/2 + k\pi$ sono di minimo relativo per f mentre i punti e $-\pi/6 + 2k\pi$ e $7\pi/6 + 2k\pi$ sono di massimo relativo per f. Si ha inoltre

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1, \qquad f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{2}, \qquad f\left(\frac{7}{6}\pi\right) = \frac{3}{2}, \qquad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -3$$

e quindi il massimo assoluto è $3/2$ e viene assunto nei punti $-\pi/6+2k\pi$ e $7\pi/6+2k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$) mentre il minimo assoluto è -3 e viene assunto nei punti $\pi/2+2k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$).

Soluzione Scritto di Analisi Matematica I (B)
Ingegneria Edile & Gestionale, 18 Febbraio 1999

1. Poichè entrambi i membri sono positivi, la diseguaglianza assegnata equivale alla seguente

$$(Re\, z + Im\, z)^2 \leq Re^2\, z + Im^2\, z$$

dalla quale si ottiene $2Re\, z \cdot Im\, z \leq 0$ che è soddisfatta dai numeri complessi $z = x + \mathrm{i}\, y$ tali che

$$x \geq 0, y \leq 0, \qquad \text{oppure} \qquad x \leq 0, y \geq 0.$$

2. L'integrabilità in senso improprio deve essere discussa in intorni dei punti $0, 1$ e $+\infty$. Nel punto 0, il rapporto $\operatorname{arctg}^2 x/x^2$ tende ad 1 e quindi la funzione è un infinitesimo di ordine arbitrariamente piccolo (a causa del termine $\log x$. Dal criterio sull'ordine di infinito per gli integrali impropri segue che la funzione è assolutamente integrabile in senso improprio in un intorno di 0.

Nel punto 1 il rapporto $\log x/x$ tende ad 1 e quindi la funzione ammette un limite finito. Pertanto è assolutamente integrabile in un intorno di 1.

Infine, nel punto $+\infty$, il termine $\operatorname{arctg}^2 x$ tende a $\pi^2/4$ e la funzione risulta essere un infinitesimo di ordine ≤ 3 ma maggiore di $3 - \varepsilon$ per ogni $\varepsilon \in]0, 3[$. Dal criterio sull'ordine di infinitesimo per gli integrali impropri (considerando, ad esempio, $\varepsilon = 1$), segue che la funzione è assolutamente integrabile in senso improprio in un intorno di $+\infty$.

Si conclude che l'integrale improprio assegnato è assolutamente convergente (e quindi convergente).

3. La funzione è definita e continua in tutto $\mathbf{R}$ ed è periodica di periodo 2π. Pertanto sarà dotata di minimo e di massimo assoluto. Inoltre, poichè la funzione è derivabile in tutto l'insieme di definizione, per lo studio dei massimi e minimi relativi (ed assoluti) è sufficiente in questo caso considerare i punti in cui si annulla la derivata prima.

Per ogni $x \in \mathbf{R}$ risulta

$$f'(x) = 2\cos 2x + \operatorname{sen} x = -2(2\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x - 1)$$

e quindi f' si annulla nei punti $\pi/2 + 2k\pi$, $-\pi/6 + 2k\pi$ e $7\pi/6 + 2k\pi$, con $k \in \mathbf{Z}$. Dallo studio del segno di f' segue che, per ogni $k \in \mathbf{Z}$, i punti $7\pi/6 + 2k\pi$ sono di massimo relativo per f mentre i punti e $-\pi/6 + 2k\pi$ sono di minimo relativo per f. Tali punti sono di massimo e di minimo anche assoluto e, per quanto riguarda il massimo ed il minimo di f, essi vengono forniti dai valori

$$f\left(\frac{7}{6}\pi\right) = \frac{3}{2}\sqrt{3}, \qquad f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{2}\sqrt{3}.$$

Nei punti $\pi/2 + 2k\pi$ la funzione risulta strettamente crescente.

Esame di Analisi Matematica I (A)

Ingegneria Edile & Gestionale, 8 Marzo 1999

Michele Campiti

1. Studiare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 2} \frac{(\log x - \log 2) \quad \log(x-2)}{\left(\sqrt{3-x}-1\right) \quad \log\left(\sqrt{x}-\sqrt{2}\right)}.$$

2. Studiare per quali valori di $\alpha > 0$ la seguente serie converge assolutamente e per quali semplicemente:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(1 - \cos \frac{1}{n^\alpha}\right).$$

3. Studiare massimi e minimi relativi ed assoluti della seguente funzione:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+3}.$$

Esame di Analisi Matematica I (B)

Ingegneria Edile & Gestionale, 8 Marzo 1999

Michele Campiti

1. Determinare i numeri complessi $z \in \mathbf{C}$ che soddisfano la seguente equazione:

$$Re^2\, z + \mathrm{i}\, \log\left(Im\, z\right) = (\mathrm{i}+1)^{-1}.$$

2. Discutere il seguente integrale al variare di $\alpha > 0$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log x \quad (1-\cos x)^{\alpha}}{x^2}\, dx.$$

3. Studiare massimi e minimi relativi ed assoluti della seguente funzione:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+9}}{x+1}.$$

Soluzione Scritto di Analisi Matematica I (A)
Ingegneria Edile & Gestionale, 8 Marzo 1999

1. Tenendo presente che

$$\lim_{x\to 2} \frac{\log x - \log 2}{\left(\sqrt{3-x}-1\right)} = \lim_{x\to 2} \frac{\log x/2}{2-x} \; \frac{2-x}{\sqrt{1+(2-x)}-1}$$
$$= 2\lim_{x\to 2} \frac{\log\left(1+\left(\frac{x}{2}-1\right)\right)}{\frac{x}{2}-1} \; \frac{\frac{x}{2}-1}{2-x} = 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -1$$

e che, utilizzando ad esempio la regola di l'Hôpital,

$$\lim_{x\to 2} \frac{\log(x-2)}{\log\left(\sqrt{x}-\sqrt{2}\right)} = \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}\; 2\sqrt{x} = 2\sqrt{2}\lim_{x\to 2}\frac{1}{2\sqrt{x}} = 1,$$

si conclude che il limite assegnato è uguale a -1.

2. Il termine $1-\cos 1/n^{\alpha}$ è un infinitesimo di ordine 2α e quindi se $2\alpha > 1$ (cioè se $\alpha > 1/2$) la serie converge assolutamente per il criterio sull'ordine di infinitesimo. Inoltre $1-\cos 1/n^{\alpha} > 0$ per ogni $n \geq 1$ e quindi la serie è a termini di segno alterno. Per ogni $n \geq 1$, poichè la funzione coseno è strettamente decrescente in $[0,\pi]$ e $0 < 1/n^{\alpha} < \pi$, si ha

$$\frac{1}{(n+1)^{\alpha}} < \frac{1}{n^{\alpha}} \Rightarrow \cos\frac{1}{(n+1)^{\alpha}} > \cos\frac{1}{n^{\alpha}} \Rightarrow 1-\cos\frac{1}{(n+1)^{\alpha}} < 1-\cos\frac{1}{n^{\alpha}}$$

e quindi, per il criterio di Leibnitz, la serie converge semplicemente per ogni $\alpha > 0$.

3. La funzione è definita e continua in $\mathbf{R}\setminus\{-3\}$ e la retta di equazione $x=-3$ è un asintoto verticale a destra in alto e a sinistra in basso per f; quindi, si può subito concludere che f non è dotata di minimo e di massimo assoluto. Inoltre, poichè la funzione è derivabile in tutto l'insieme di definizione, per lo studio dei massimi e minimi relativi è sufficiente considerare i punti in cui si annulla la derivata prima. Per ogni $x\in\mathbf{R}\setminus\{-3\}$ risulta

$$f'(x) = \frac{3x-1}{\sqrt{x^2+1}\;(x+3)^2}$$

e quindi, dallo studio del segno di f' segue che il punto $1/3$ è di minimo relativo per f $(f(1/3)=\sqrt{10}/10)$.

Soluzione Scritto di Analisi Matematica I (B)
Ingegneria Edile & Gestionale, 8 Marzo 1999

1. Si tiene presente che $\mathrm{i}+1=\sqrt{2}\,(\cos\pi/4+\mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\pi/4)$ e conseguentemente

$$(\mathrm{i}+1)^{-1}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{-\pi}{4}+\mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\frac{-\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\mathrm{i}\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\,\mathrm{i}\right)$$

e quindi, posto $x=\mathit{Re}\,z$ e $y=\mathit{Im}\,z$, l'equazione assegnata diventa

$$x^2+\mathrm{i}\,\log y=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\,\mathrm{i}\right).$$

Separando le parti reali ed immaginarie, si ottengono le equazioni

$$x^2=\frac{1}{2},\qquad \log y=-\frac{1}{2}$$

dalle quali si ricava $x=\pm\sqrt{2}/2$, $y=\mathrm{e}^{-1/2}$. Quindi le soluzioni dell'equazione assegnata sono date da

$$z=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}+\mathrm{i}\,\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}.$$

2. L'integrabilità in senso improprio deve essere discussa in intorni dei punti 0 e $+\infty$. Nel punto 0, $\log x$ è un infinito di ordine arbitrariamente piccolo, $(1-\cos x)^\alpha$ è un infinitesimo di ordine 2α e x^2 è un infinitesimo di ordine 2. Pertanto la funzione è un infinito di ordine maggiore di $2-2\alpha$ e minore di $2-2\alpha+\varepsilon$ per ogni $\varepsilon>0$. Quindi se $2-2\alpha<1$ (cioè se $\alpha>1/2$), si può trovare $\varepsilon>0$ tale che $2-2\alpha+\varepsilon<1$ e quindi la funzione è assolutamente integrabile in senso improprio in un intorno di 0 per il criterio sull'ordine di infinito. Se $2-2\alpha\geq 1$ (cioè se $\alpha\leq 1/2$), per lo stesso criterio l'integrale improprio è assolutamente divergente; poichè la funzione è negativa in un intorno di 0 l'integrale improprio assegnato diverge negativamente in un intorno di 0. In un intorno del punto $+\infty$ (precisamente, per $x\geq 1$), si può usare la diseguaglianza

$$\left|\frac{\log x\quad(1-\cos x)^\alpha}{x^2}\right|\leq 2^\alpha\frac{\log x}{x^2}$$

ed il fatto che la funzione $2^\alpha\log x/x^2$ è integrabile in senso improprio in un intorno di $+\infty$ (in quanto infinitesima di ordine maggiore di $2-\varepsilon$ per ogni $\varepsilon\in]0,2[$), per concludere che anche l'integrale improprio assegnato è assolutamente convergente in un intorno di $+\infty$. Si conclude che l'integrale improprio assegnato è assolutamente convergente (e quindi convergente) per $\alpha > 1/2$ e divergente negativamente per $\alpha \leq 1/2$.

3. La funzione è definita e continua in $\mathbf{R} \setminus \{-1\}$ e la retta di equazione $x = -1$ è un asintoto verticale a destra in alto e a sinistra in basso per f; quindi, si può subito concludere che f non è dotata di minimo e di massimo assoluto. Inoltre, poichè la funzione è derivabile in tutto l'insieme di definizione, per lo studio dei massimi e minimi relativi è sufficiente considerare i punti in cui si annulla la derivata prima. Per ogni $x \in \mathbf{R} \setminus \{-1\}$ risulta

$$f'(x) = \frac{x-9}{\sqrt{x^2+9}\,(x+1)^2}$$

e quindi, dallo studio del segno di f' segue che il punto 9 è di minimo relativo per f $(f(9) = 3\sqrt{10}/10)$.

Esame di Analisi Matematica I (A)

Ingegneria Edile & Gestionale, 12 Aprile 1999

Michele Campiti

1. *(Punti 12)* Studiare il seguente limite:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\sqrt{n}} - 1}{\operatorname{sen}\frac{1}{\sqrt{n}}}.$$

2. *(Punti 6)* Determinare i numeri complessi dati da

$$z = \sqrt[3]{(1-\mathrm{i})^5}$$

e rappresentarli geometricamente nel piano complesso.

3. *(Punti 12)* Studiare gli asintoti e la derivabilità della seguente funzione:

$$f(x) = \operatorname{sen}\left|\frac{\pi x + 1}{2x - 1}\right|.$$

Esame di Analisi Matematica I (B)

Ingegneria Edile & Gestionale, 12 Aprile 1999

Michele Campiti

1. *(Punti 12)* Studiare la convergenza della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)^{\sqrt{n}} - 1}{\operatorname{sen} \dfrac{1}{\sqrt{n}}}.$$

2. *(Punti 6)* Determinare i numeri complessi dati da

$$z = \sqrt[5]{(1 - \mathrm{i})^3}$$

e rappresentarli geometricamente nel piano complesso.

3. *(Punti 12)* Studiare gli asintoti e la derivabilità della seguente funzione:

$$f(x) = \cos \left| \frac{2x^2 - 1}{x^2}\, \pi \right|.$$

Soluzione Scritto di Analisi Matematica I (A)
Ingegneria Edile & Gestionale, 12 Aprile 1999

1. Tenendo presente che

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}\log\left(1-\frac{1}{n}\right) = 0$$

in quanto prodotto di un infinito di ordine 1/2 con un infinitesimo di ordine 1 in $+\infty$, utilizzando i limiti notevoli, si ha

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\sqrt{n}} - 1}{\operatorname{sen} 1/\sqrt{n}} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{n}\log(1-1/n)} - 1}{\operatorname{sen} 1/\sqrt{n}} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{n}\log(1-1/n)} - 1}{\sqrt{n}\ \log(1-1/n)} \frac{\sqrt{n}\ \log(1-1/n)}{\operatorname{sen} 1/\sqrt{n}} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{\log(1-1/n)}{-1/n} \frac{-1/\sqrt{n}}{\operatorname{sen} 1/\sqrt{n}} = -1.
\end{aligned}$$

2. Si ha $1-\mathrm{i} = \sqrt{2}(\cos -\pi/4 + \mathrm{i}\operatorname{sen}\, -\pi/4)$ e quindi

$$(1-\mathrm{i})^5 = 4\sqrt{2}(\cos 3\pi/4 + \mathrm{i}\operatorname{sen} 3\pi/4).$$

Pertanto le radici terze di $(1-\mathrm{i})^5$ sono date da

$$\begin{aligned}
z_1 &= \sqrt[3]{4\sqrt{2}}(\cos \pi/4 + \mathrm{i}\operatorname{sen}\pi/4) = \sqrt[3]{4\sqrt{2}}(\sqrt{2}/2 + \mathrm{i}\,\sqrt{2}/2), \\
z_2 &= \sqrt[3]{4\sqrt{2}}(\cos 11\pi/12 + \mathrm{i}\operatorname{sen} 11\pi/12), \\
z_3 &= \sqrt[3]{4\sqrt{2}}(\cos 19\pi/12 + \mathrm{i}\operatorname{sen} 19\pi/12).
\end{aligned}$$

3. La funzione è definita e continua in $\mathbf{R}\setminus\{1/2\}$. La retta di equazione $x = 1/2$ non è un asintoto verticale nè a destra nè a sinistra per f in quanto f è limitata (inoltre il $\lim_{x\to1/2} f(x)$ non esiste). La retta di equazione $y = 1$ è un asintoto orizzontale a destra e a sinistra per f in quanto $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \operatorname{sen}\pi/2 = 1$. Inoltre, la funzione è derivabile in $\mathbf{R}\setminus\{1/2, -1/\pi\}$ e, per ogni $x \in \mathbf{R}\setminus\{1/2, -1/\pi\}$, si ha

$$f'(x) = -\frac{\pi+2}{(2x-1)^2}\left|\frac{\pi x+1}{2x-1}\right| \frac{2x-1}{\pi x+1} \cos\left|\frac{\pi x+1}{2x-1}\right|.$$

Poichè $\lim_{x\to-1/\pi^+} f'(x) = \pi^2/(\pi+2)$ e $\lim_{x\to-1/\pi^-} f'(x) = -\pi^2/(\pi+2)$, risulta

$$f'_+(x) = \frac{\pi^2}{\pi+2}, \qquad f'_-(x) = -\frac{\pi^2}{\pi+2}$$

e quindi f non è derivabile in nel punto $-1/\pi$.

Soluzione Scritto di Analisi Matematica I (B)
Ingegneria Edile & Gestionale, 12 Aprile 1999

1. Tenendo presente che

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}\log\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=0$$

in quanto prodotto di un infinito di ordine 1/2 con un infinitesimo di ordine 2 in $+\infty$, utilizzando i limiti notevoli, si ha

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \frac{\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{\sqrt{n}} - 1}{\operatorname{sen} 1/\sqrt{n}} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{e^{\sqrt{n}\log(1-1/n^2)} - 1}{\operatorname{sen} 1/\sqrt{n}} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{e^{\sqrt{n}\log(1-1/n^2)} - 1}{\sqrt{n}\ \log(1-1/n^2)} \frac{\sqrt{n}\ \log(1-1/n^2)}{\operatorname{sen} 1/\sqrt{n}} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{\log(1-1/n^2)}{-1/n^2} \frac{-1/(n\sqrt{n})}{\operatorname{sen} 1/\sqrt{n}} = -\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0.
\end{aligned}$$

e pertanto il termine generale della serie è un infinitesimo di ordine 1; per il criterio sull'ordine di infinitesimo, la serie è assolutamente divergente. Poichè $\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{\sqrt{n}} - 1 \le 0$ mentre $\operatorname{sen} \frac{1}{\sqrt{n}} \ge 0$ per ogni $n \ge 1$, la serie risulta divergente negativamente.

2. Si ha $1-\mathrm{i} = \sqrt{2}(\cos -\pi/4 + \mathrm{i}\operatorname{sen} -\pi/4)$ e quindi

$$(1-\mathrm{i})^3 = 2\sqrt{2}(\cos -3\pi/4 + \mathrm{i}\operatorname{sen} -3\pi/4) = 2\sqrt{2}(\cos 5\pi/4 + \mathrm{i}\operatorname{sen} 5\pi/4).$$

Pertanto le radici quinte di $(1-\mathrm{i})^3$ sono date da

$$\begin{aligned}
z_1 &= \sqrt[5]{2\sqrt{2}}(\cos \pi/4 + \mathrm{i}\operatorname{sen} \pi/4) = \sqrt[5]{2\sqrt{2}}(\sqrt{2}/2 + \mathrm{i}\,\sqrt{2}/2), \\
z_2 &= \sqrt[5]{2\sqrt{2}}(\cos 13\pi/20 + \mathrm{i}\operatorname{sen} 13\pi/20), \\
z_3 &= \sqrt[5]{2\sqrt{2}}(\cos 21\pi/20 + \mathrm{i}\operatorname{sen} 21\pi/20), \\
z_4 &= \sqrt[5]{2\sqrt{2}}(\cos 29\pi/20 + \mathrm{i}\operatorname{sen} 29\pi/20), \\
z_5 &= \sqrt[5]{2\sqrt{2}}(\cos 37\pi/20 + \mathrm{i}\operatorname{sen} 37\pi/20).
\end{aligned}$$

3. La funzione è definita e continua in $\mathbf{R}\setminus\{0\}$. La retta di equazione $x=0$ non è un asintoto verticale nè a destra nè a sinistra per f in quanto f è limitata (inoltre il $\lim_{x\to 0} f(x)$ non esiste). La retta di equazione $y = 1$ è un asintoto orizzontale a destra e a sinistra per f in quanto $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \cos 2\pi = 1$. Inoltre, la funzione è derivabile in $\mathbf{R} \setminus \{0, \pm\sqrt{2}/2\}$ e, per ogni $x \in \mathbf{R} \setminus \{0, \pm\sqrt{2}/2\}$, si ha

$$f'(x) = -\frac{2}{x(2x^2-1)} \left|\frac{2x^2-1}{x^2}\pi\right| \operatorname{sen} \left|\frac{2x^2-1}{x^2}\pi\right| .$$

Poichè $\lim_{x\to\pm\sqrt{2}/2} f'(x) = 0$, la funzione risulta derivabile anche nei punti $\pm\sqrt{2}/2$ con $f'(\pm\sqrt{2}/2) = 0$.

Esame di Analisi Matematica I (A)

Ingegneria Edile & Gestionale, 19 Maggio 1999

Michele Campiti

1. *(Punti 10)* Studiare il seguente integrale improprio:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log(1+\sqrt{x})}{x(x+1)}.$$

2. *(Punti 10)* studiare la convergenza della seguente serie:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}+1}{n+1}.$$

3. *(Punti 10)* Studiare la seguente funzione:

$$f(x) = \operatorname{arcsen} \left| \frac{x}{x+1} \right|.$$

Esame di Analisi Matematica I (B)

Ingegneria Edile & Gestionale, 19 Maggio 1999

Michele Campiti

1. *(Punti 10)* Calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+3x-2}\,dx.$$

2. *(Punti 10)* Studiare il seguente limite:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log \operatorname{sen} x}{\log x}.$$

3. *(Punti 10)* Studiare la seguente funzione:

$$f(x) = \operatorname{arctg}\left|\frac{x}{x+1}\right|.$$

Esame di Analisi Matematica I (A)

Ingegneria Edile & Gestionale, 16 Giugno 1999

Michele Campiti

1. Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg}\,\left(\log^2(\cos x)\right)}{\operatorname{sen}^2\,(\operatorname{arctg}\,(1-\cos x))}.$$

2. Studiare la convergenza della seguente serie:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{sen}^2 \frac{1}{\sqrt[4]{(n+1)^3}}.$$

3. Studiare massimi e minimi relativi ed eventualmente assoluti della seguente funzione:

$$f(x) = \sqrt{\frac{|x-1|}{(x+2)^2}}.$$

Esame di Analisi Matematica I (B)

Ingegneria Edile & Gestionale, 16 Giugno 1999

Michele Campiti

1. Studiare il seguente integrale improprio:

$$\int_0^{+\infty} \frac{(\operatorname{sen}\sqrt{x}) \cdot \log x}{\sqrt{x}\,(1+x)}\, dx.$$

2. Determinare i numeri complessi che soddisfano la seguente condizione:

$$\log \mathit{Im}\, z + \mathrm{i} \cos \mathit{Re}\, z = 1.$$

3. Studiare massimi e minimi relativi ed eventualmente assoluti della seguente funzione:

$$f(x) = \sqrt{\frac{(x+2)^2}{|x-1|}}.$$

Esame di Analisi Matematica I (A)

Ingegneria Edile & Gestionale, 14 Luglio 1999

Michele Campiti

1. Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x\ \log(\mathrm{e} + \operatorname{sen} x)}{\sqrt[3]{\log(1+x^2)}}.$$

2. Studiare la convergenza della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{n^{3/2}}.$$

3. Studiare massimi e minimi relativi ed eventualmente assoluti della seguente funzione:

$$f(x) = \operatorname{sen} 2x + \cos x.$$

Esame di Analisi Matematica I (B)

Ingegneria Edile & Gestionale, 14 Luglio 1999

Michele Campiti

1. Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{\log\left(1+4x^2\right)}}{\log\left(1+x\right)} \operatorname{sen}^2 x.$$

2. Calcolare il seguente integrale indefinito:

$$\int \frac{2x+1}{(x+1)^2(x-1)}\, dx.$$

3. Studiare massimi e minimi relativi ed eventualmente assoluti della seguente funzione:

$$f(x) = \cos 2x - \operatorname{sen} x.$$

Soluzione traccia A del 14 Luglio 1999

1. Si osserva innanzitutto che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt[3]{\log(1+x^2)}} = +\infty$$

in quanto le funzioni sono positive e il numeratore è un infinito di ordine 1 mentre il denominatore è un infinito di ordine arbitrariamente piccolo. Inoltre

$$\log(\mathrm{e} + \operatorname{sen} x) \geq \log(\mathrm{e} - 1) > 0$$

e quindi anche il limite richiesto è uguale a $+\infty$.

2. La successione $\left(\frac{2n+1}{n^{3/2}}\right)_{n\geq1}$ è un infinitesimo di ordine 1/2 e quindi la serie non converge assolutamente (per il criterio sull'ordine di infinitesimo). Poichè si tratta di una serie a termini di segno alterno, si può cercare di applicare il criterio di Leibnitz per studiare la convergenza semplice della serie. Si è già osservato che la successione $\left(\frac{2n+1}{n^{3/2}}\right)_{n\geq1}$ è infinitesima; per riconoscere che essa è anche decrescente, conviene considerare la funzione $\varphi(x) = \frac{2x+1}{x^{3/2}}$, definita per $x > 0$, la cui derivata è data da

$$\varphi'(x) = \frac{2x^{3/2} - 3/2 \cdot \sqrt{x}(2x+1)}{x^3} = -\frac{2x+3}{2\sqrt{x}x^2}.$$

Essendo tale derivata strettamente negativa per ogni $x > 0$, la funzione φ e conseguentemente la successione $\left(\frac{2n+1}{n^{3/2}}\right)_{n\geq1}$ risulta strettamente decrescente. A questo punto il criterio di Leibnitz consente di concludere che la serie assegnata è semplicemente convergente (ma non assolutamente convergente).

3. La funzione è continua e periodica di periodo 2π e pertanto è sicuramente dotata di minimo e di massimo assoluto. Poich'e essa è derivabile, lo studio dei massimi e minimi relativi ed assoluti segue interamente dallo studio del segno della derivata prima. Per semplicità si considera solamente l'intervallo $[-\pi, \pi]$. Risulta

$$f'(x) = 2\cos 2x - \operatorname{sen} x = -(4\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - 2), \qquad x \in [-\pi, \pi],$$

e quindi si ha un punto di minimo (assoluto) in $-(1+\sqrt{33})/8$ e di massimo (assoluto) in $(-1+\sqrt{33})/8$.

Soluzione traccia B del 14 Luglio 1999

1. Applicando la regola di l'Hôpital, si riconosce innanzitutto che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{\log(1+4x^2)}}{\log(1+x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{8x(1+x)}{2\sqrt{\log(1+4x^2)}\,(1+4x^2)}$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{\log(1+4x^2)}} = 0.$$

Poichè la funzione sen^2 è limitata, anche il limite richiesto è uguale a 0.

2. Si tratta di un integrale di una funzione razionale e quindi conviene porre

$$\frac{2x+1}{(x+1)^2(x-1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{d}{dx}\left(\frac{C}{x+1}\right).$$

Dal principio di identità dei polinomi, si ottiene il sistema

$$\begin{cases} A+B=0, \\ 2B-C=2, \\ -A+B+C=1 \end{cases}$$

che ammette la soluzione $A=-3/4$, $B=3/4$, $C=-1/2$. Segue pertanto

$$\int \frac{2x+1}{(x+1)^2(x-1)}\,dx. = -\frac{3}{4}\log|x+1| + \frac{3}{4}\log|x-1| - \frac{1}{2(x+1)} + c, \qquad c\in\mathbf{R},$$

in ognuno degli intervalli $]-\infty,-1[$, $]-1,1[$ e $]1,+\infty[$.

3. La funzione è continua e periodica di periodo 2π e pertanto è sicuramente dotata di minimo e di massimo assoluto. Poich'e essa è derivabile, lo studio dei massimi e minimi relativi ed assoluti segue interamente dallo studio del segno della derivata prima. Per semplicità si considera solamente l'intervallo $[-\pi,\pi]$. Risulta

$$f'(x) = -2\mathrm{sen}\,2x - \cos x = -\cos x(1+4\mathrm{sen}x), \qquad x\in[-\pi,\pi],$$

e quindi si ha un punto di massimo (assoluto) in $-\pi-\mathrm{arcsen}(-1/4)$ e in $\mathrm{arcsen}(-1/4)$, un punto di minimo relativo in $-\pi/2$ (in cui f assume il valore 0) e di minimo assoluto in $\pi/2$ (in cui f assume il valore 2).

Esame di Analisi Matematica I (A)

Ingegneria Edile & Gestionale, 22 Settembre 1999

Michele Campiti

1. Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3+\sqrt{-x}}\;\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}}{\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}.$$

2. Studiare la convergenza della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n e^{n \operatorname{arctg} x}$$

e calcolarne la somma nell'insieme di convergenza.

3. Studiare massimi e minimi relativi ed eventualmente assoluti della seguente funzione:

$$f(x) = \operatorname{sen}^2 x + \cos x.$$

Esame di Analisi Matematica I (B)

Ingegneria Edile & Gestionale, 22 Settembre 1999

Michele Campiti

1. Calcolare le radici terze del numero complesso:

$$i\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

2. Studiare il seguente integrale improprio:

$$\int_0^{+\infty}\frac{\log(1+x)\ \sqrt[3]{\operatorname{sen}x}}{x^2}\,dx.$$

3. Studiare massimi e minimi relativi ed eventualmente assoluti della seguente funzione:

$$f(x)=\cos^2 x-\operatorname{sen}x.$$

Esame di Analisi Matematica I (A)

Ingegneria Edile & Gestionale, 19 Ottobre 1999

Michele Campiti

1. Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-\cos^3 x} \quad \log x}{\log\left(1+\sqrt{x}\right)}.$$

2. Studiare la convergenza assoluta e semplice della seguente serie:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \sqrt{n} \left(\operatorname{sen} \frac{1}{n^2}\right).$$

3. Studiare massimi e minimi relativi ed eventualmente assoluti della seguente funzione:

$$f(x) = \log \frac{1+x}{1-x^2}.$$

Esame di Analisi Matematica I (B)

Ingegneria Edile & Gestionale, 19 Ottobre 1999

Michele Campiti

1. Calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^{1/2} \frac{1+x}{(x^2-1)(x-2)}\, dx\ .$$

2. Studiare la convergenza assoluta e semplice della seguente serie:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\ n \left(1 - \cos\frac{1}{n}\right)$$

Suggerimento: Si consideri la funzione $x\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)$ e si tenga presente che in un intorno di $+\infty$ la sua derivata è equivalente a $1/(2x^2) - 1/x^2 < 0$.

3. Studiare massimi e minimi relativi ed eventualmente assoluti della seguente funzione:

$$f(x) = \log\frac{x-1}{x^2-4}.$$

Esame di Analisi Matematica I (A)

Ingegneria Edile, 16 Novembre 1999

Michele Campiti

1. Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log\left(1+\dfrac{\cos x}{2}\right)\ \log\left(1+\sqrt{x}+x\right)}{\log\left(1+\sqrt{x}\right)}.$$

2. Studiare la convergenza assoluta e semplice della seguente serie:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n2^n}{3^n}.$$

3. Studiare il seguente integrale improprio:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log\left(1+\sqrt{x}+x\right)}{\log\left(1+\sqrt{x}\right)} \left(1-\cos\frac{1}{x}\right) dx.$$

Esame di Analisi Matematica I (A)

Ingegneria Edile & Gestionale, 14 Dicembre 1999

Michele Campiti

1. Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^{x+1}}{(x+1)^x}.$$

2. Studiare la convergenza assoluta e semplice della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n!\,(n+2)}{n^n}.$$

3. Studiare massimi e minimi relativi ed eventualmente assoluti della seguente funzione:

$$f(x) = |x| \mathrm{e}^{x/(x+1)}.$$

Esame di Analisi Matematica I (B)

Ingegneria Edile & Gestionale, 14 Dicembre 1999

Michele Campiti

1. Studiare la convergenza del seguente integrale improprio:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2 \ \log x}{\sqrt[3]{x(x-1)} \ \left(e^{x^2(x-1)} - 1\right)} \, dx \ .$$

2. Calcolare le radici quarte del numero complesso:

$$\frac{\left(\sqrt{3}+i\right)^7 \ \left(i+\sqrt{3}\right)}{i} .$$

3. Studiare massimi e minimi relativi ed eventualmente assoluti della seguente funzione:

$$f(x) = |x+1| \ e^{x/(x-1)} .$$