Analisi Matematica I (A)

Ingegneria Edile, 6 Novembre 1996 *(Michele Campiti)*

1. Si determinino i numeri complessi z soddisfacenti la relazione:

$$z = \frac{(\sqrt{3}+i)^2 \sqrt[3]{-27}}{(1-\sqrt{3}i)^6}.$$

2. Si studi il seguente integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{(x-1)^\alpha} + \operatorname{arctg}^7 \sqrt[5]{x-1}}{(x^2-1)\log x}\, dx$$

al variare del parametro $\alpha \in \mathbf{R}$.

Analisi Matematica I (B)

Ingegneria Edile, 6 Novembre 1996 *(Michele Campiti)*

1. Si determinino i numeri complessi z soddisfacenti la relazione:

$$z = \frac{(1+i)^2 \sqrt[4]{-16}}{i^2(1-i)^5}.$$

2. Si studi il seguente integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{(x^2-9)^{\alpha-2} + \sqrt[5]{(x-3)^7}}{(x^4-81)\log(x/3)}\, dx$$

al variare del parametro $\alpha \in \mathbf{R}$.

Soluzione del 6 Novembre 1996 (A)

1. Si ha $\sqrt{3}+i = 2(\cos\pi/6 + i\sin\pi/6)$ e quindi

$$(\sqrt{3}+i)^2 = 4\Big(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\Big) = 2 + 2\sqrt{3}i.$$

Inoltre $1-\sqrt{3}i = 2(\cos -\pi/3 + i\sin -\pi/3)$ da cui

$$(1-\sqrt{3}i)^6 = 64(\cos -2\pi + i\sin -2\pi) = 64.$$

Si ricava

$$\frac{(\sqrt{3}+i)^2}{(1-\sqrt{3}i)^6} = \frac{1}{16}\Big(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\Big) = \frac{1}{32} + \frac{\sqrt{3}}{32}i$$

e pertanto, tenendo presente che le radici terze di $-27 = 27(\cos\pi + i\sin\pi)$ sono date da

$$w_0 = 3\Big(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\Big) = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i,$$
$$w_1 = 3(\cos\pi + i\sin\pi) = -3,$$
$$w_2 = 3\Big(\cos\frac{5}{3}\pi + i\sin\frac{5}{3}\pi\Big) = \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i,$$

si ottengono le soluzioni

$$z_0 = \frac{1}{16}\Big(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\Big)w_0 = \frac{3}{16}\Big(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi\Big) = -\frac{3}{32} + \frac{3\sqrt{3}}{32}i,$$
$$z_1 = \frac{1}{16}\Big(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\Big)w_1 = \frac{3}{16}\Big(\cos\frac{4}{3}\pi + i\sin\frac{4}{3}\pi\Big) = -\frac{3}{32} - \frac{3\sqrt{3}}{32}i,$$
$$z_2 = \frac{1}{16}\Big(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\Big)w_2 = \frac{3}{16}(\cos 2\pi + i\sin 2\pi) = \frac{3}{16}.$$

2. Bisogna discutere l'integrabilità nei punti 0, 1 e $+\infty$. In 0 la funzione è infinitesima e quindi è sempre integrabile.

Nel punto 1, se $\alpha \le 0$, si ha un infinito di ordine $2-\alpha/3 (\ge 1)$ e quindi la funzione non è integrabile. Se $\alpha > 0$, si ha il rapporto di un infinitesimo di ordine $\min\{\alpha/3, 7/5\}$ ed uno di ordine 2; segue che se $\alpha/3 \le 7/5$, si ha un infinito di ordine $2-\alpha/3$, mentre se $\alpha/3 > 7/5$, si ha un infinito di ordine $2 - 7/5 < 1$. Applicando il criterio dell'ordine di infinito, si ottiene l'integrabilità per $\alpha > 3$.

Si considera infine il punto $+\infty$ per $\alpha > 3$. Se $\alpha \le 6$ la funzione è un infinitesimo di ordine $> 2-\alpha/3$ e $< 2-\alpha/3+\varepsilon$ per ogni $\varepsilon > 0$; dal criterio sull'ordine di infinitesimo, si ha l'integrabilità quando $\alpha < 3$ e la non integrabilità quando $3 < \alpha \le 6$ (quindi per nessun valore di α). Se $\alpha = 3$, la funzione è equivalente a $1/(x\log x)$ e quindi non è integrabile. Infine, se $\alpha \ge 6$, la funzione è un infinito (oppure ammette un limite $\neq 0$ per $\alpha = 6$) e quindi non è integrabile.

Si conclude che la funzione non è integrabile per alcun valore di α.

Soluzione del 6 Novembre 1996 (B)

1. Si ha $1+i=\sqrt{2}(\cos\pi/4+i\sin\pi/4)$ e quindi $(1+i)^2=2\big(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\big)=2i$. Inoltre $1-i=\sqrt{2}(\cos-\pi/4+i\sin-\pi/4)$ da cui $(1-i)^5=4\sqrt{2}\big(\cos-\frac{5}{4}\pi+i\sin-\frac{5}{4}\pi\big)$. Poichè $i^2=-1=\cos\pi+i\sin\pi$, si ricava

$$\frac{(1+i)^2}{i^2(1-i)^5}=\frac{\sqrt{2}}{4}\frac{\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}}{(\cos\pi+i\sin\pi)\Big(\cos-\frac{5}{4}\pi+i\sin-\frac{5}{4}\pi\Big)}=\frac{\sqrt{2}}{4}\Big(\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi\Big)$$

e pertanto, tenendo presente che le radici quarte di $-16=16(\cos\pi+i\sin\pi)$ sono date da

$$w_0=2\Big(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\Big)=\sqrt{2}+\sqrt{2}i,\quad w_1=2\Big(\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi\Big)=-\sqrt{2}+\sqrt{2}i,$$

$$w_2=2\Big(\cos\frac{5}{4}\pi+i\sin\frac{5}{4}\pi\Big)=-\sqrt{2}-\sqrt{2}i,\quad w_3=2\Big(\cos\frac{7}{4}\pi+i\sin\frac{7}{4}\pi\Big)=\sqrt{2}-\sqrt{2}i,$$

si ottengono le soluzioni

$$z_0=\frac{\sqrt{2}}{4}\Big(\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi\Big)w_0=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\pi+i\sin\pi)=-\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$z_1=\frac{\sqrt{2}}{4}\Big(\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi\Big)w_1=\frac{\sqrt{2}}{2}\Big(\cos\frac{3}{2}\pi+i\sin\frac{3}{2}\pi\Big)=-\frac{\sqrt{2}}{2}i,$$

$$z_2=\frac{\sqrt{2}}{4}\Big(\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi\Big)w_2=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos 2\pi+i\sin 2\pi)=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$z_3=\frac{\sqrt{2}}{4}\Big(\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi\Big)w_3=\frac{\sqrt{2}}{2}\Big(\cos\frac{5}{2}\pi+i\sin\frac{5}{2}\pi\Big)=\frac{\sqrt{2}}{2}i.$$

2. Bisogna discutere l'integrabilità nei punti 0, 3 e $+\infty$. In 0 la funzione è infinitesima e quindi è sempre integrabile.

Nel punto 3, se $\alpha<2$, si ha un infinito di ordine $2-\alpha$ diviso per un infinitesimo di ordine 2 (quindi un infinito di ordine $4-\alpha>2$ e quindi la funzione non è integrabile. Se $\alpha=2$ si ha un infinito di ordine 2 e quindi ancora la non integrabilità. Se $\alpha>2$, si ha il rapporto di un infinitesimo di ordine $\min\{\alpha-2,7/5\}$ ed uno di ordine 2; segue che se $\alpha-2\le 7/5$, si ha un infinito di ordine $2-(\alpha-2)$, mentre se $\alpha-2>7/5$, si ha un infinito di ordine $2-7/5<1$. Applicando il criterio dell'ordine di infinito, si ottiene l'integrabilità per $\alpha>3$.

Si considera infine il punto $+\infty$ per $\alpha>3$. Poichè $2\alpha-4>7/5$, si ha il rapporto di un infinito di ordine $2\alpha-4$ ed uno di ordine >4 e $<4+\varepsilon$ per ogni $\varepsilon>0$. Segue che se $2\alpha-4<4$, si ottiene un infinitesimo di ordine $>8-2\alpha$ e $<8-2\alpha+\varepsilon$ per ogni $\varepsilon>0$. Dal criterio sull'ordine di infinitesimo segue l'integrabilità per $3<\alpha<7/2$ e non per $\alpha>7/2$. Se $\alpha=7/2$, la funzione è equivalente a $1/(x\log x)$ e quindi non integrabile.

Si conclude che deve essere $3<\alpha<7/2$.

Analisi Matematica I (A)

Ingegneria Edile, 5 Dicembre 1996 *(Michele Campiti)*

1. Si studi il seguente limite

$$\lim_{x\to+\infty} x^5 \sin x \Big(\cos\big(\frac{1}{x^3}\big) - 1\Big) \log^2 x.$$

2. Si studino la derivabilità ed i massimi e minimi relativi ed eventualmente assoluti della funzione:

$$f(x) = \frac{2x-1}{2x+|x-2|+1}.$$

Analisi Matematica I (B)

Ingegneria Edile, 5 Dicembre 1996 *(Michele Campiti)*

1. Si studi il seguente limite

$$\lim_{x\to+\infty} x^3 \cos x (\log(x^2-1) - 2\log x)^2 \log^3 x.$$

2. Si studino la derivabilità ed i massimi e minimi relativi ed eventualmente assoluti della funzione:

$$f(x) = \frac{5x-1}{2x+|x-3|+1}.$$

Soluzione del 5 Dicembre 1996 (A)

1. Si tiene innanzitutto presente che in $+\infty$ la funzione x^5 è un infinito di ordine 5, $\log^2 x$ è un infinito di ordine arbitrariamente piccolo e che la funzione $\cos 1/x^3 - 1$ è un infinitesimo di ordine 6 (infatti, ponendo $y = 1/x^3$, si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos(1/x^3) - 1}{1/x^6} = \lim_{y\to 0} \frac{\cos y - 1}{y^2} = -\frac{1}{2}).$$

Da ciò segue che

$$\lim_{x\to+\infty} x^5 \Big(\cos\big(\frac{1}{x^3}\big) - 1\Big) \log^2 x = 0.$$

Poiché la funzione sin è limitata, si ottiene anche

$$\lim_{x\to+\infty} x^5 \sin x \Big(\cos\big(\frac{1}{x^3}\big) - 1\Big) \log^2 x = 0.$$

2. La funzione in esame è definita per $2x + |x-2| + 1 \neq 0$. Se $x \geq 2$, si ha $2x+|x-2|+1 = 3x-1$ che è sempre diverso da 0; se $x < 2$, si ha $2x+|x-2|+1 = x+3$ e quindi bisogna imporre $x \neq -3$. Quindi f è definita in $X = \mathbf{R}\setminus\{-3\}$ e si ha

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x-1}{3x-1}, & \text{se } x \geq 2, \\ \frac{2x-1}{x+3}, & \text{se } x < 2,\ x \neq -3. \end{cases}$$

Segue che f è derivabile in $X\setminus\{2\}$ e si ha

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{(3x-1)^2}, & \text{se } x > 2, \\ \frac{7}{(x+3)^2}, & \text{se } x < 2,\ x \neq -3. \end{cases}$$

Nel punto 2 risulta $f'_+(2) = \lim_{x\to 2^+} f'(x) = 1/25$ e $f'_-(2) = \lim_{x\to 2^-} f'(x) = 7/25$ e quindi f non è derivabile in tale punto.

Dal segno della derivata prima, segue che f è strettamente crescente negli intervalli $]-\infty, -3[$ e $]-3, +\infty[$ e non è dotata di massimi o minimi relativi.

Infine, si osserva che nel punto -3 risulta

$$\lim_{x\to -3^-} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to -3^+} f(x) = -\infty$$

e quindi f non è dotata neanche di massimo assoluto e di minimo assoluto.

Soluzione del 5 Dicembre 1996 (B)

1. Si tiene innanzitutto presente che in $+\infty$ la funzione x^3 è un infinito di ordine 3, $\log^3 x$ è un infinito di ordine arbitrariamente piccolo e che la funzione

$$(\log(x^2-1)-2\log x)^2 = (\log(x^2-1)-\log x^2)^2 = \log^2 \frac{x^2-1}{x^2} = \log^2\bigl(1-\frac{1}{x^2}\bigr)$$

è un infinitesimo di ordine 4 (infatti, ponendo $y = 1/x^2$, si ha

$$\frac{\log^2\bigl(1-\frac{1}{x^2}\bigr)}{1/x^4} = \lim_{y\to 0}\frac{\log^2(1-y)}{y^2} = -1).$$

Da ciò segue che

$$\lim_{x\to+\infty} x^3(\log(x^2-1)-2\log x))^2\log^3 x = 0.$$

Poiché la funzione cos è limitata, si ottiene anche

$$\lim_{x\to+\infty} x^3\cos x(\log(x^2-1)-2\log x))^2\log^3 x = 0.$$

2. La funzione in esame è definita per $2x+|x-3|+1 \neq 0$. Se $x \geq 3$, si ha $2x+|x-3|+1 = 3x-2$ che è sempre diverso da 0; se $x < 3$, si ha $2x+|x-3|+1 = x+4$ e quindi bisogna imporre $x \neq -4$. Quindi f è definita in $X = \mathbf{R}\setminus\{-4\}$ e si ha

$$f(x) = \begin{cases} \frac{5x-1}{3x-2}, & \text{se } x \geq 3, \\ \frac{5x-1}{x+4}, & \text{se } x < 3,\ x \neq -4. \end{cases}$$

Segue che f è derivabile in $X\setminus\{3\}$ e si ha

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-7}{(3x-2)^2}, & \text{se } x > 3, \\ \frac{21}{(x+4)^2}, & \text{se } x < 3,\ x \neq -4. \end{cases}$$

Nel punto 3 risulta $f'_+(3) = \lim_{x\to 3^+} f'(x) = -1/7$ e $f'_-(3) = \lim_{x\to 3^-} f'(x) = 3/7$ e quindi f non è derivabile in tale punto.

Dal segno della derivata prima, segue che f è strettamente crescente negli intervalli $]-\infty,-4[$ e $]-4,3]$ e strettamente decrescente in $[3,+\infty[$. Il punto 3 di massimo relativo per f e si ha $f(3) = 2$. Non vi sono altri punti di massimo o di minimo relativo per f.

Infine, si osserva che nel punto -4 risulta

$$\lim_{x\to -4^-} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to -4^+} f(x) = -\infty$$

e quindi f non è dotata di massimo assoluto né di minimo assoluto.

Analisi Matematica I (A)

Ingegneria Edile, 13 Gennaio 1997 *(Michele Campiti)*

1. Si studi il seguente limite

$$\lim_{x\to 1} \frac{\log\left(\sin\dfrac{\pi x}{2}\right)}{(x-1)\,\log(x-1)\,\cos^2\dfrac{\pi x}{2}}.$$

2. Si studino la derivabilità ed i massimi e minimi relativi ed eventualmente assoluti della funzione:

$$f(x) = \frac{5\sin 2x}{1+\sin x}.$$

Analisi Matematica I (B)

Ingegneria Edile, 13 Gennaio 1997 *(Michele Campiti)*

1. Si studi il seguente limite

$$\lim_{x\to\pi/2} \operatorname{tg} x \quad \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \quad \log(\operatorname{tg} x).$$

2. Si studino la derivabilità ed i massimi e minimi relativi ed eventualmente assoluti della funzione:

$$f(x) = \frac{5\sin 2x}{1+\cos x}.$$

Soluzione del 13 Gennaio 1997 (A)

1. Si ha

$$\lim_{x\to 1} \frac{\log\left(\sin\dfrac{\pi x}{2}\right)}{(x-1)\,\log(x-1)\,\cos^2\dfrac{\pi x}{2}} = \lim_{x\to 1} \frac{\log\left(1+\left(\sin\dfrac{\pi x}{2}-1\right)\right)}{\sin\dfrac{\pi x}{2}-1}\times$$

$$\times\frac{\sin\dfrac{\pi x}{2}-1}{(x-1)\,\log(x-1)\,\cos^2\dfrac{\pi x}{2}} = \lim_{x\to 1} \frac{\sin\dfrac{\pi x}{2}-1}{(x-1)\,\log(x-1)\,\cos^2\dfrac{\pi x}{2}}$$

e quindi, posto $y = x-1$ e tenendo presente che $y \to 0^+$ e che il prodotto $y\log y$ è negativo in un intorno destro di 0, si ottiene il limite

$$\lim_{y\to 0} \frac{\sin\dfrac{\pi(1+y)}{2}-1}{y\,\log y\,\cos^2\dfrac{\pi(1+y)}{2}} = \lim_{y\to 0} \frac{\cos\dfrac{\pi y}{2}-1}{y\,\log y\,\sin^2\dfrac{\pi y}{2}} = -\frac{1}{2}\lim_{y\to 0}\frac{1}{y\log y} = +\infty.$$

2. La funzione in esame è definita per $1+\sin x \neq 0$ e quindi nell'insieme

$$X_f = \bigcup_{k\in\mathbf{Z}} \left]-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{3\pi}{2}+2k\pi\right[$$

ed è derivabile in tale insieme. Poichè f è periodica di periodo 2π, può essere studiata nell'intervallo $I =]-\pi/2, 3\pi/2[$. Risulta innanzitutto

$$\lim_{x\to -\pi/2^+} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to 3\pi/2^-} f(x) = +\infty,$$

e quindi f non è dotata di massimo e di minimo assoluto.

Per quanto riguarda i massimi e minimi relativi, risulta, per ogni $x \in I$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{10\cos 2x(1+\sin x) - 5\sin 2x\cos x}{(1+\sin x)^2} \\ &= -\frac{10(\sin^3 x + 2\sin^2 x - 1)}{(1+\sin x)^2} = -\frac{10(\sin^2 x + \sin x - 1)}{1+\sin x}, \end{aligned}$$

e quindi si ha $f'(x) = 0$ per $\sin x = (-1\pm\sqrt{5})/2$; si può accettare solamente la soluzione $\sin x = (-1+\sqrt{5})/2$ che nell'intervallo I ammette due soluzioni x_0 e $\pi - x_0$ con $\pi/6 < x_0 < \pi/2$. Dal segno di f' segue che x_0 è un punto di massimo relativo per f e $\pi - x_0$ è un punto di minimo relativo per f.

Si ha infine $\cos x_0 = \sqrt{1-((-1+\sqrt{5})/2)^2} = \sqrt{(-1+\sqrt{5})/2}$ e conseguentemente $\cos(\pi - x_0) = -\sqrt{(-1+\sqrt{5})/2}$ e da ciò è facile calcolare i valori di f nei punti x_0 e $\pi - x_0$:

$$f(x_0) = \frac{5\sqrt{2}\left(-1+\sqrt{5}\right)^{\frac{3}{2}}}{1+\sqrt{5}} \approx 3.00283, \qquad f(\pi - x_0) = -f(x_0).$$

Soluzione del 13 Gennaio 1997 (B)

1. Si osserva innanzitutto che

$$\operatorname{tg} x \ \operatorname{tg}(x - \frac{\pi}{2}) = \frac{\sin x}{\cos x} \, \frac{-\cos x}{\sin x} = -1$$

e quindi

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x \ \operatorname{tg}\big(x - \frac{\pi}{2}\big) \quad \log(\operatorname{tg} x) = - \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \log(\operatorname{tg} x) = -\infty.$$

2. La funzione in esame è definita per $1 + \cos x \neq 0$ e quindi nell'insieme

$$X_f = \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} \,]-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi[$$

ed è derivabile in tale insieme. Poichè f è periodica di periodo 2π, può essere studiata nell'intervallo $I =]-\pi, \pi[$. Risulta innanzitutto

$$\lim_{x \to -\pi^+} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to \pi^-} f(x) = -\infty,$$

e quindi f non è dotata di massimo e di minimo assoluto.

Per quanto riguarda i massimi e minimi relativi, risulta, per ogni $x \in I$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{10 \cos 2x (1 + \cos x) + 5 \sin 2x \sin x}{(1 + \cos x)^2} \\ &= \frac{10(\cos^3 x + 2\cos^2 x - 1)}{(1 + \cos x)^2} = \frac{10(\cos^2 x + \cos x - 1)}{1 + \cos x}, \end{aligned}$$

e quindi si ha $f'(x) = 0$ per $\cos x = (-1 \pm \sqrt{5})/2$; si può accettare solamente la soluzione $\cos x = (-1 + \sqrt{5})/2$ che nell'intervallo I ammette due soluzioni $\pm x_0$ con $0 < x_0 < \pi/3$. Dal segno di f' segue che x_0 è un punto di massimo relativo per f e $-x_0$ è un punto di minimo relativo per f.

Si ha infine $\sin x_0 = \sqrt{1 - ((-1 + \sqrt{5})/2)^2} = \sqrt{(-1 + \sqrt{5})/2}$ e conseguentemente $\sin -x_0 = -\sqrt{(-1 + \sqrt{5})/2}$ e da ciò è facile calcolare i valori di f nei punti $\pm x_0$:

$$f(x_0) = \frac{5\sqrt{2}\left(-1 + \sqrt{5}\right)^{\frac{3}{2}}}{1 + \sqrt{5}} \approx 3.00283, \qquad f(-x_0) = -f(x_0).$$

Analisi Matematica I (A)

Ingegneria Edile, 3 Febbraio 1997 *(Michele Campiti)*

1. Si studi il seguente integrale improprio:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{\log|1-e^x|}\ \sqrt[4]{\operatorname{arccotg}^3(-x)}}{\sqrt{|e^x-1|}}\, dx.$$

2. Si studi la seguente funzione e se ne tracci approssimativamente il grafico:

$$f(x) = \frac{2\log(|x|)-1}{\log(|x|)-1}.$$

Analisi Matematica I (B)

Ingegneria Edile, 3 Febbraio 1997 *(Michele Campiti)*

1. Si studi il seguente integrale improprio:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt[3]{\frac{\log^4 |1 - e^x|}{\text{arctg}(x^2)\ (e^x + 1)}}\, dx.$$

2. Si studi la seguente funzione e se ne tracci approssimativamente il grafico:

$$f(x) = \frac{2\log(|x|) + 1}{\log(|x|) + 1}.$$

Analisi Matematica I (A)

Ingegneria Edile, 3 Marzo 1997 *(Michele Campiti)*

1. Si calcoli il seguente limite:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x-4+\sqrt{2+x}}{\left(\sqrt[6]{3-x}-1\right)\sqrt[4]{\sin(2-x)}}.$$

2. Si studino la derivabilità della seguente funzione ed i suoi massimi e minimi relativi ed eventualmente assoluti:

$$f(x)=\sqrt[3]{\arcsin\frac{1-x^2}{1+x^2}}.$$

Soluzione del 3 Marzo 1997 (A)

1. Si ha

$$\lim_{x\to 2} \frac{x-4+\sqrt{2+x}}{(\sqrt[6]{3-x}-1)\,\sqrt[4]{\sin(2-x)}}$$
$$= \lim_{x\to 2} \frac{(x-4+\sqrt{2+x})(x-4-\sqrt{2+x})}{x-4-\sqrt{2+x}}\,\frac{1}{(\sqrt[6]{3-x}-1)\,\sqrt[4]{\sin(2-x)}}$$
$$= -\frac{1}{4}\lim_{x\to 2} \frac{x^2-9x+14}{(\sqrt[6]{3-x}-1)\,\sqrt[4]{\sin(2-x)}}$$
$$= -\frac{1}{4}\lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x-7)}{\sqrt[6]{3-x}-1}\,\sqrt[4]{\frac{2-x}{\sin(2-x)}}\,\frac{1}{\sqrt[4]{2-x}}$$
$$= -\frac{5}{4}\lim_{x\to 2} \frac{-(x-2)}{\sqrt[6]{3-x}-1}\,\frac{1}{\sqrt[4]{2-x}}$$
$$= -\frac{15}{2}\lim_{x\to 2} \frac{1}{\sqrt[4]{2-x}} = -\infty.$$

2. La funzione in esame è definita per $\left|\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right| \le 1$ e quindi in tutto $\mathbf{R}$. Tenendo presente che l'argomento dell'arcoseno (e quindi della radice) si annulla per $x=\pm 1$ e che assume il valore 1 solamente per $x=0$ (mentre non assume mai il valore -1), si ricava che f è derivabile in $\mathbf{R}\setminus\{-1,0,1\}$. Per ogni $x\in\mathbf{R}\setminus\{-1,0,1\}$, si ha

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{\arcsin^2\frac{1-x^2}{1+x^2}}}\,\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}}\,\frac{-2x(1+x^2)-2x(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$$
$$= \frac{1}{3\sqrt[3]{\arcsin^2\frac{1-x^2}{1+x^2}}}\,\frac{1+x^2}{2|x|}\,\frac{-4x}{(1+x^2)^2} = -\frac{2}{3}\,\frac{x}{|x|(1+x^2)\sqrt[3]{\arcsin^2\frac{1-x^2}{1+x^2}}}.$$

Da ciò si ottiene che f' è negativa in $]-\infty,0[\setminus\{-1\}$ ed è positiva in $]0,+\infty[\setminus\{1\}$. Quindi f è strettamente crescente in $]-\infty,0]$ ed è strettamente decrescente in $[0,+\infty[$. Il punto 0 è di massimo relativo per f e $f(0)=\sqrt[3]{\pi/2}$. Poichè $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = -\sqrt[3]{\pi/2}$, 0 è un punto di massimo assoluto per f e non vi sono punti di minimo relativo o assoluto.

Dall'espressione della derivata prima di f, si ottiene anche $f'(1)=\lim_{x\to 1} f'(x) = -\infty$, $f'(-1)=\lim_{x\to -1} f'(x)=+\infty$ e quindi f è dotata di derivata infinita in tali punti. Nel punto 0, allo stesso modo si ha $f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+} f'(x) = -\dfrac{2\sqrt[3]{4}}{3\sqrt[3]{\pi^2}}$ e inoltre $f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \dfrac{2\sqrt[3]{4}}{3\sqrt[3]{\pi^2}}$ e quindi f non è derivabile in 0.

Analisi Matematica I (A)

Ingegneria Edile, 14 aprile 1997 *(Michele Campiti)*

1. Si risolva la seguente equazione:

$$\left(\frac{z}{i+1}\right)^3 = i - 1.$$

2. Si studino la derivabilità ed i massimi e minimi relativi (ed eventualmente assoluti) della funzione:

$$f(x) = x + 4 \operatorname{arctg} \sqrt{|x-1|}.$$

3. Si calcoli (se possibile) il seguente integrale improprio:

$$\int_0^1 x^5 \log x \, dx.$$

Analisi Matematica I (B)

Ingegneria Edile, 14 aprile 1997 *(Michele Campiti)*

1. Si risolva la seguente equazione:

$$\left(\frac{z}{i-\sqrt{3}}\right)^3 = -27\, i.$$

2. Si studino la derivabilità ed i massimi e minimi relativi (ed eventualmente assoluti) della funzione:

$$f(x) = 2x + \operatorname{arctg}\sqrt{|x-2|}.$$

3. Si calcoli (se possibile) il seguente integrale improprio:

$$\int_0^1 \frac{\log x}{\sqrt{x}}\, dx.$$