

Algebra Lineare e Geometria Analitica

Soluzioni del primo compito in itinere (12 Novembre 2003)

1. Il prodotto di A con A_T è dato da

$$AA_T = \begin{bmatrix} 1 & k & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ k & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k^2 + 2 & k & 2 \\ k & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Usando ad esempio la regola di Sarrus, si ha

$$\det(AA_T) = \begin{vmatrix} k^2 + 2 & k & 2 \\ k & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4(k^2 + 2) - 8 - 2k^2 = 2k^2.$$

Quindi $\det(AA_T) = 8$ se e solo se $k^2 = 4$, ossia $k = \pm 2$.

2. (a) Per mostrare che i vettori \mathbf{a} , \mathbf{b} e \mathbf{c} formano una base di \mathbb{R}^3 è sufficiente mostrare che tali vettori sono linearmente indipendenti. Per fare questo è sufficiente osservare che la matrice che ha per righe i tre vettori in questione ha rango 3, ossia ha determinante non nullo:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4 + 6 = 10 \neq 0.$$

- (b) Poiché \mathbf{a} , \mathbf{b} e \mathbf{c} formano una base di \mathbb{R}^3 , il vettore \mathbf{v} si può scrivere in modo unico come combinazione lineare di questi vettori. Si ha $\mathbf{v} = x\mathbf{a} + y\mathbf{b} + z\mathbf{c}$ se e solo se

$$\begin{aligned} (2, 4, -3) &= x(3, 2, -1) + y(1, 1, 4) + z(1, 0, 1) \\ &= (3x + y + z, 2x + y, -x + 4y + z) \end{aligned}$$

ossia se e solo se

$$\begin{cases} 3x + y + z = 2 \\ 2x + y = 4 \\ x - 4y - z = 3. \end{cases}$$

Dalla seconda equazione si ha $y = 4 - 2x$. Sostituendo nella terza equazione si ha $z = x - 16 + 8x - 3 = 9x - 19$. Sostituendo nella prima equazione si ha $3x + 4 - 2x + 9x - 19 = 2$, ossia $x = 17/10$. Quindi $y = 3/5$ e $z = -37/10$.

(c) Infine si ha

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{c} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k} = (2, -4, -2).$$

Poiché $\mathbf{a} \wedge \mathbf{c} = -2(-1, 2, 1)$, il vettore $\mathbf{a} \wedge \mathbf{c}$ appartiene al sottospazio $\langle (-1, 2, 1) \rangle$.

3. **Primo modo.** Poiché i due vettori che generano il sottospazio V sono linearmente indipendenti essi formano una sua base. In particolare ogni vettore $\mathbf{v} \in V$ si può scrivere nella forma

$$\mathbf{v} = \alpha (1, 1, 0, 2) + \beta (2, 3, 1, 0) = (\alpha + 2\beta, \alpha + 3\beta, \beta, 2\alpha).$$

Analogamente si ha che ogni vettore $\mathbf{w} \in W$ si può scrivere nella forma

$$\mathbf{w} = \lambda (0, 1, 1, 4) + \mu (1, 3, 2, 2) = (\mu, \lambda + 3\mu, \lambda + 2\mu, 4\lambda + 2\mu).$$

Gli elementi di $V \cap W$ sono i vettori per i quali si ha

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = \mu \\ \alpha + 3\beta = \lambda + 3\mu \\ \beta = \lambda + 2\mu \\ 2\alpha = 4\lambda + 2\mu. \end{cases}$$

Dalle ultime due equazioni ricaviamo i parametri α e β in funzione dei parametri λ e μ : $\alpha = 2\lambda + \mu$ e $\beta = \lambda + 2\mu$. Sostituendo questi due valori nelle prime due equazioni si ottiene un'unica condizione, $\lambda + \mu = 0$, sui parametri λ e μ . Quindi i vettori appartenenti a $V \cap W$ sono della forma

$$(\mu, 2\mu, \mu, -2\mu) = \mu (1, 2, 1, -2).$$

Di conseguenza si ha $V \cap W = \langle (1, 2, 1, -2) \rangle$ e $\dim(V \cap W) = 1$.

Secondo modo. Consideriamo un vettore $\mathbf{x} \in V \cap W$. Poiché \mathbf{x} appartiene a V , per quanto già osservato poco sopra, si ha che

$$\mathbf{x} = (\alpha + 2\beta, \alpha + 3\beta, \beta, 2\alpha).$$

Dovendo appartenere anche a W , il vettore \mathbf{x} deve essere combinazione lineare dei vettori che generano W . Poiché questi ultimi sono

linearmente indipendenti, la matrice

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ \alpha + 2\beta & \alpha + 3\beta & \beta & 2\alpha \end{bmatrix}$$

deve avere rango 2. Per il teorema di Kronecker, questo accade quando entrambi i seguenti minori di ordine 3, che si ottengono orlando il minore in alto a sinistra in tutti i modi possibili, sono nulli:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ \alpha + 2\beta & \alpha + 3\beta & \beta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ \alpha + 2\beta & \alpha + 2\beta & \beta \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ \alpha + 2\beta & \alpha + 3\beta & 2\alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -5 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2\beta & -2\alpha + 3\beta & 0 \end{vmatrix} = -8(\alpha + \beta) = 0.$$

Si ha quindi, ad esempio, che $\alpha = -\beta$ e

$$\mathbf{x} = (\beta, 2\beta, \beta, -2\beta) = \beta(1, 2, 1, -2).$$

In conclusione si riottiene $V \cap W = \langle (1, 2, 1, -2) \rangle$.

4. La dimensione del sottospazio V generato dalle soluzioni di un sistema lineare omogeneo è data da $n - r(A)$, dove n è il numero delle incognite ed A è la matrice dei coefficienti. Si tratta quindi di calcolare il rango della matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & k \\ 0 & k+1 & 2 & -3k \\ 1 & 4 & k+1 & -k-2 \end{bmatrix}$$

al variare del parametro k . Procediamo usando il teorema di Kronecker. Il minore di ordine due individuato dalle prime due righe e dalla prima e terza colonna è non nullo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

Orlandolo in tutti i modi possibili si hanno i due seguenti minori del terzo ordine:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & k+1 & 2 \\ 1 & 4 & k+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & k+1 & 2 \\ 0 & 3 & k \end{vmatrix} = k^2 + k - 6 = (k-2)(k+3)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & k \\ 0 & 2 & -3k \\ 1 & k+1 & -k-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & k \\ 0 & 2 & -3k \\ 0 & k & -2k-2 \end{vmatrix} = 3k^2 - 4k - 4 = (k-2)(3k+2).$$

Questi due minori si annullano entrambi solo per $k = 2$. Pertanto

$$r(A) = \begin{cases} 2 & \text{se } k = 2 \\ 3 & \text{se } k \neq 2 \end{cases}$$

e quindi

$$\dim V = 4 - r(A) = \begin{cases} 2 & \text{se } k = 2 \\ 1 & \text{se } k \neq 2. \end{cases}$$

Si ha che $\dim V = 2$ solo per $k = 2$. In questo caso il sistema che definisce V si riduce (eliminando, ad esempio, la terza equazione che dipende linearmente dalle prime due) al sistema

$$\begin{cases} x + y + z + 2t = 0 \\ 3y + 2z - 6t = 0. \end{cases}$$

Dalla seconda equazione si ha $y = -(2/3)z + 2t$. Sostituendo nella prima equazione si ottiene $x = -(1/3)z - 4t$. Quindi il generico vettore \mathbf{v} di V si scrive nella forma

$$\mathbf{v} = \left(-\frac{1}{3}z - 4t, -\frac{2}{3}z + 2t, z, t \right) = -\frac{1}{3}z(1, 2, -3, 0) + t(-4, 2, 0, 1).$$

Pertanto una base di V è data dai vettori $(1, 2, -3, 0)$ e $(-4, 2, 0, 1)$.

5. Se $|A| = 0$ allora dalla condizione che definisce A si ottiene $A = I$ e quindi $|A| = 1$. Si ha un così un assurdo. Di conseguenza $|A| \neq 0$ ed A è invertibile.