

Esercizi di geometria ¹(Versione preliminare ²)

¹La maggior parte degli esercizi qui proposti sono stati assegnati negli anni accademici precedenti dal Prof. A.Verra come testi di esame per il modulo di Geometria dei Corsi di Laurea in Fisica e Matematica presso l'Università degli Studi di Roma "Roma Tre". Durante il presente anno accademico sono stati riproposti agli studenti nell'ambito della attività di studio assistito svolta dal Dr. C.Madonna.

²Per eventuali suggerimenti e segnalazioni scrivere a madonna@mat.uniroma3.it, verra@mat.uniroma3.it

Indice

Capitolo 1. Matrici, Sistemi di equazioni e Spazi vettoriali	5
1. Esercizi svolti	5
2. Esercizi proposti	10
Capitolo 2. Applicazioni Lineari	13
1. Esercizi svolti	13
2. Esercizi proposti	21
Bibliografia	25

Matrici, Sistemi di equazioni e Spazi vettoriali

1. Esercizi svolti

ESERCIZIO 1.1. Calcolare usando il metodo della inversa l'inversa delle seguenti matrici:

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calcolare poi la matrice $3A^{-1} - AB^{-2}$.

(Suggerimento. Per calcolare la matrice B^{-2} osservare che $B^{-2} = (B^{-1})^2$.)

ESERCIZIO 1.2. Calcolare i seguenti prodotti

$$\begin{pmatrix} 3 & 8 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 8 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

ESERCIZIO 1.3. Siano date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 3 & -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Calcolare i prodotti AB e BA nel caso in cui siano definiti.

ESERCIZIO 1.4. Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$. Trovare una matrice $B = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tale che $AB = 3B$.

(Suggerimento. Calcolare prima le matrici AB e $3B$. Imporre poi l'uguaglianza delle righe ottenendo in questo modo un sistema di due equazioni. Procedere poi con il metodo di eliminazione di Gauss-Jordan per trovare le soluzioni.)

ESERCIZIO 1.5. Calcolare il determinante delle seguenti matrici:

$$\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

Soluzione.

Risultati: 8, 23, -13, 9.

ESERCIZIO 1.6. Calcolare il determinante della seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} x & a_1 & a_2 \\ x & x & a_3 \\ x & x & x \end{pmatrix}$$

(Suggerimento. *Procedere operando in maniera elementare sulle righe della matrice per stabilire che si ha $\det(A) = x(x - a_1)(x - a_3)$.*)

ESERCIZIO 1.7. Sia $A \in M_n(\mathbb{K})$. Provare che $A + A^t$ è una matrice simmetrica, che $A - A^t$ è antisimmetrica e che $A^t A$ è simmetrica.

ESERCIZIO 1.8. Provare che se $A \in M_n(\mathbb{K})$ è nilpotente (ovvero esiste $k > 0$ tale che $A^k = 0$) allora non è invertibile.

Soluzione.

Per assurdo supponiamo che A sia invertibile, sia quindi $B \in M_n(\mathbb{K})$ tale che $AB = I_n$. Allora

$$A^j B^j = A^{j-1} A B B^{j-1} = A^{j-1} B^{j-1} = \dots = I_n$$

per ogni $j \geq 1$. In particolare per $j = k$ si trova che $A^k B^k = I_n$ mentre $A^k = 0$ da cui l'assurdo.

ESERCIZIO 1.9. Determinare i valori di a, b per i quali il seguente sistema è compatibile:

$$\begin{cases} X_1 + X_2 - 2X_3 - X_4 = 2a - b \\ 2X_1 + X_2 - 3X_3 - 2X_4 = 3a - 2b \\ 2X_1 + 3X_2 - 5X_3 - 2X_4 = 3 \\ 3X_1 - 2X_2 - X_3 - 3X_4 = -2 \end{cases}$$

Determinare l'insieme delle soluzioni del sistema.

Determinare una base per lo spazio S delle soluzioni del sistema omogeneo associato.

Completare questa base di S a una base di \mathbf{R}^4 .

Soluzione.

Applicando il metodo di Gauss-Jordan il sistema diventa equivalente al seguente

$$\begin{cases} X_1 + X_2 - 2X_3 - X_4 = 2a - b \\ -X_2 + 4X_3 = -a \\ 0 = 5a - 2b - 3 \\ 0 = a - 3b + 2 \end{cases}$$

Quindi il sistema sarà compatibile per quei valori di a, b soddisfacenti alle condizioni

$$\begin{cases} 0 = 5a - 2b - 3 \\ 0 = a - 3b + 2 \end{cases}$$

Risolvendo questo sistema di due equazioni nelle incognite a, b otteniamo

$$a = b = 1.$$

Le soluzioni del sistema sono:

$$\{(-2t_3 + t_4, 4t_3 + 1, t_3, t_4), t_3, t_4 \in \mathbf{R}\}$$

Le soluzioni del sistema omogeneo associato sono: $(-2t_3 + t_4, 4t_3, t_3, t_4)$. Una base dello spazio S : $\{(-2, 4, 1, 0), (1, 0, 0, 1)\}$

Per completare questa a una base di \mathbf{R}^4 è sufficiente costruire una matrice 4×4 con quattro righe indipendenti di cui due siano le precedenti. Le righe di M saranno allora una base di \mathbf{R}^4 . Ad esempio M può avere le righe seguenti:

$$(-2, 4, 1, 0), (1, 0, 0, 1), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1).$$

Allora M ha rango 4 e cioè quattro righe linearmente indipendenti.

ESERCIZIO 1.10. Si determini una base di \mathbf{R}^3 costituita da vettori dell'insieme

$$I = \{(1, 0, 2), (1, 1, 1), (1, -2, 4), (3, -1, 7), (1, 3, 2), (3, 4, 2)\}$$

Si determinino le componenti dei vettori $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(1, 1, 0)$ rispetto ai vettori della base trovata.

Soluzione.

I primi due vettori sono indipendenti. Il terzo, quarto, sesto sono combinazione lineare dei primi due, (verifica: con Gauss-Jordan o calcolando il determinante della matrice). Il quinto non dipende dai primi due.

Una base di \mathbf{R}^3 è $(1, 0, 2)$, $(1, 1, 1)$, $(1, 3, 2)$. (Altre basi si possono costruire con lo stesso metodo).

Risolviendo il sistema

$$X_1(1, 0, 2) + X_2(1, 1, 1) + X_3(1, 3, 2) = (1, 0, 0)$$

si trovano le componenti richieste. Nello stesso modo per $(0, 1, 0)$. Per $(1, 1, 0)$ basta sommare le due terne di componenti trovate.

ESERCIZIO 1.11. Nello spazio vettoriale $M_{3,3}(\mathbb{R})$ delle matrici reali 3×3 si considerino i sottospazi

$$W_1 = \{A \in M(3, 3) | A = -^t A\}$$

e

$$W_2 = \{A \in M(3, 3) | A = PA\},$$

dove P è la matrice ottenuta scambiando tra loro le prime due colonne della matrice identica. Si determini la dimensione di W_1 , W_2 , $W_1 \cap W_2$. Inoltre, applicando la formula (di Grassmann)

$$\dim W_1 + W_2 = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim W_1 \cap W_2,$$

si decida se $W_1 + W_2 = M_{3,3}(\mathbb{R})$. Si scelgano una matrice M appartenente a W_1 ma non a W_2 ed una matrice N appartenente a W_2 ma non a W_1 . Per ogni valore del parametro λ si determini l'insieme S_λ delle soluzioni del sistema di tre equazioni in tre incognite

$$(M + \lambda N) \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Infine, si consideri l'insieme

$$S = \cup_{\lambda} S_\lambda, \quad \lambda \in \mathbf{R}$$

costituito da tutte le soluzioni dei precedenti sistemi. Si decida, motivando la risposta, se S è un sottospazio vettoriale di \mathbf{R}^3 e se esiste una base di \mathbf{R}^3 formata da vettori di S .

Soluzione.

W_1 è lo spazio delle matrici antisimmetriche 3×3 ; $A = (a_{ij})_{i,j} \in W_1$ se e solo se $a_{ii} = 0$, $a_{21} = -a_{12}$, $a_{31} = -a_{13}$, $a_{32} = -a_{23}$ e quindi $\dim W_1 = 3$; W_2 è lo spazio delle matrici con le prime due righe uguali quindi $\dim W_2 = 6$. Infatti è facile calcolare che $A = (a_{ij})_{i,j} \in W_2$ se e solo se $a_{11} = a_{21}$, $a_{22} = a_{12}$, $a_{23} = a_{13}$.

Se $A = (a_{ij})_{i,j} \in W_1 \cap W_2$ allora $a_{ii} = 0$ per ogni i , $a_{21} = -a_{12} = 0$, $a_{31} = -a_{13}$, $a_{32} = -a_{23} = -a_{13}$ e $\dim(W_1 \cap W_2) = 1$. Dalla formula di Grassmann segue che $\dim W_1 + W_2 = 8$; essendo $\dim M_{3,3}(\mathbb{R}) = 9$ segue che $W_1 + W_2 \neq M_{3,3}(\mathbb{R})$.

Scegliamo M, N nel modo indicato; il rango della matrice $M + \lambda N$ è sempre ≥ 2 . Se $\det(M + \lambda N) \neq 0$ il sistema ha solo la soluzione banale. I valori di λ per i quali il sistema

ha soluzioni non banali sono quelli per i quali $\det(M + \lambda N) = 0$. Tali valori sono due: $\lambda = 0$ e un altro valore che dipende dalla scelta delle matrici M, N . Indicando con S_0 l'insieme delle soluzioni per $\lambda = 0$ e con S_1 l'insieme delle soluzioni per l'altro valore di λ , abbiamo

$$S_0 = \{t(a, b, c), t \in \mathbf{R}\} \quad , \quad S_1 = \{t(a', b', c'), t \in \mathbf{R}\}$$

dove (a, b, c) , (a', b', c') sono due vettori fissati che dipendono dalla scelta delle matrici M, N . (Si puo' inoltre osservare che S_0, S_1 sono due sottospazi di dimensione 1 e che $S_0 \cap S_1 = (\vec{0})$). Per l'insieme S abbiamo $S = S_0 \cup S_1$. Per un qualunque $t \neq 0$ la somma

$$t(a, b, c) + t(a', b', c') = t(a + a', b + b', c + c')$$

non è soluzione di nessuno dei sistemi considerati. Quindi esistono vettori di S la cui somma non appartiene ad S e S non puo' essere un sottospazio. Una base di \mathbf{R}^3 è formata da tre vettori linearmente indipendenti. Scegliendo tre vettori a piacere in S almeno due di questi sono necessariamente proporzionali. Quindi non è possibile formare una base di \mathbf{R}^3 con vettori di S .

ESERCIZIO 1.12. Sia $A \in M_2(\mathbb{K})$ e sia $\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^2 a_{ii}$. Sia

$$T_0 = \{A \in M_2(\mathbb{K}) \mid \text{tr}(A) = 0\}.$$

Provare che T_0 è un sottospazio vettoriale di $M_2(\mathbb{K})$ e calcolare $\dim_{\mathbb{K}} T_0$.

Soluzione.

Per verificare che T_0 è un sottospazio vettoriale di $M_2(\mathbb{K})$ è sufficiente provare che qualsiasi siano le matrici $A, B \in M_2(\mathbb{K})$ e qualsiasi sia lo scalare $k \in \mathbb{K}$ valgono le seguenti (di verifica immediata)

$$\text{tr}(A + B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$$

$$\text{tr}(kA) = k\text{tr}(A).$$

Infatti da queste segue che se $A, B \in T_0$ allora $\text{tr}(A + B) = 0$ e quindi $A + B \in T_0$. Similmente se $A \in T_0$ allora $\text{tr}(kA) = k\text{tr}(A) = 0$ e quindi $kA \in T_0$. Per calcolare la dimensione di T_0 è sufficiente individuare un sistema di generatori linearmente indipendenti. Se $A \in T_0$ allora $\text{tr}(A) = 0$ e quindi la matrice sarà del tipo

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$$

ovvero

$$A = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} := aA_1 + bA_2 + cA_3$$

e quindi le matrici A_1, A_2, A_3 generano T_0 . È immediato verificare che queste tre matrici sono linearmente indipendenti; costituiscono quindi una base di T_0 che ha quindi dimensione 3.

ESERCIZIO 1.13. Stabilire se i vettori $v_1 = (0, 1, -1)$ e $v_2 = (2, 0, 1)$ sono linearmente indipendenti in \mathbf{R}^3 . Similmente per i vettori $v_1 = (0, 1, -1), v_2 = (2, 1, 0), v_3 = (2, 2, -1)$.

ESERCIZIO 1.14. Dimostrare che i seguenti sottoinsiemi di $M_2(\mathbb{R})$ sono sottospazi vettoriali e calcolarne la dimensione:

(i) $V = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid a_{11} + a_{12} + a_{21} = 0\}$;

(ii) $V = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid a_{11} + a_{12} + a_{21} + a_{22} = 0\}$.

Soluzione.

(i) È evidente che se $A, B \in V$ e $k \in \mathbb{R}$ allora $A + B \in V, kA \in V$; dunque V è un sottospazio vettoriale di $M_2(\mathbb{R})$. Osserviamo che una matrice $A \in V$ è del tipo

$$A = \begin{pmatrix} -a_{12} - a_{21} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Siano

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

allora $A = a_{21}A_1 + a_{12}A_2 + a_{22}A_3$ e le matrici A_1, A_2, A_3 sono un sistema di generatori. È di verifica immediata che sono linearmente indipendenti. Costituiscono dunque una base per V , quindi $\dim V = 3$.

(ii) Procedere come nel precedente.

ESERCIZIO 1.15. Studiare al variare di $t \in \mathbb{R}$ il sistema

$$\begin{cases} -x + y = 2 \\ x + y = 1 \\ x + 5y = t \end{cases}$$

Detto poi S_t l'insieme delle soluzioni del sistema, stabilire per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ S_t è un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^2 .

Soluzione.

Procedendo con il metodo di eliminazione di Gauss-Jordan otteniamo il sistema

$$\begin{cases} -x + y = 2 \\ 2y = 3 \\ 6y = t + 2 \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} -x + y = 2 \\ 2y = 3 \\ 9 = t + 2 \end{cases}$$

che è compatibile solo per $t = 7$. Per $t = 7$ la soluzione è unica, esattamente si trova $y = \frac{3}{2}$ ed $x = -\frac{1}{2}$. Infine S_7 non è un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^2 dato che non contiene il vettore nullo.

ESERCIZIO 1.16. Sia $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$, e sia $W = \{X \in M_{2,2}(\mathbb{R}) \mid AX = O_2\}$.

Stabilire se W è un sottospazio vettoriale di $M_{2,2}(\mathbb{R})$; in caso affermativo calcolarne la dimensione e scrivere una base.

Soluzione.

Osserviamo che se A, X, Y sono tre matrici in $M_{2,2}(\mathbb{R})$ ed $\alpha \in \mathbb{R}$ allora $A(X + Y) = AX + AY$ ed $A(\alpha X) = \alpha AX$. Da queste segue che W è un sottospazio vettoriale di $M_{2,2}(\mathbb{R})$. Mostriamo ora che un sistema di generatori di W è dato dalle matrici

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \text{ ed } X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Si ha

$$X \in W \Leftrightarrow AX = O_2 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x_{11} + 2x_{21} = 0 \\ 4x_{12} + 2x_{22} = 0 \\ -2x_{11} - x_{21} = 0 \\ -2x_{12} - x_{22} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x_{11} - x_{21} = 0 \\ -2x_{12} - x_{22} = 0 \end{cases}$$

e quindi $X \in W$ se e solo se è della forma $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ -2x_{11} & -2x_{12} \end{pmatrix}$ da cui segue che $X = x_{11}X_1 + x_{12}X_2$. Resta ora da mostrare che X_1, X_2 sono linearmente indipendenti che è evidente; dunque $\dim W = 2$.

2. Esercizi proposti

ESERCIZIO 2.1. Stabilire se $O(n)$ e $GL(n)$ sono o no sottospazi vettoriali di $M_n(\mathbb{K})$.

(Suggerimento. *Verificare subito se contengono o no il vettore nullo.*)

ESERCIZIO 2.2. Ripetere l'esercizio 1.16 con le matrici

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

(Suggerimento. *Procedere esattamente come nella soluzione di 1.16*)

ESERCIZIO 2.3. Calcolare il determinante della matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & x \\ a_1 & x & x \\ x & x & x \end{pmatrix}$$

(Suggerimento. *Operare in modo elementare sulle colonne della matrice e concludere applicando l'esercizio 1.6.*)

ESERCIZIO 2.4. Stabilire per quali valori $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ i vettori

$$(1, 0, \alpha), (i, \beta, -2i\beta), (1, i, 2)$$

sono una base per \mathbb{C}^3 .

ESERCIZIO 2.5. Stabilire per quali valori di k la seguente matrice è invertibile

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(Suggerimento. *Osservare che A è invertibile se e solo se $\det(A) \neq 0$. Quindi calcolare tale determinante.*)

ESERCIZIO 2.6. Sia $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = x + y + z = 0\}$. Stabilire se W è o no un sottospazio, in caso trovarne una base.

(Suggerimento. *Procedere con per l'esercizio 1.16.*)

ESERCIZIO 2.7. Si considerino le matrici

(i) Si determini il rango della matrice $A + \lambda B$ al variare di λ .

(ii) Si determinino i valori di u, v per i quali il sistema

$$(X, Y, Z)AB = (1 - u, v, v)$$

è compatibile. Si determinino le soluzioni per tali valori.

(iii) Si studi il sistema

$$\begin{cases} 5X + 4Y + 7Z = 3 \\ X + 2Y + 3Z = 1 \\ X - Y - Z = 0 \\ 3X + 3Y + 5Z = 2 \end{cases}$$

e si determinino le sue eventuali soluzioni.

ESERCIZIO 2.8. (i) Si determinino i valori di k per le quali il seguente sistema ammette soluzioni:

$$\begin{cases} kX + Y + Z = 0 \\ X + kY + Z = 0 \\ X + Y + Z = 0 \\ X - Y - Z = 1 \end{cases}$$

(ii) Si determinino le soluzioni per i precedenti valori di k .

(iii) Sia A la matrice dei coefficienti del precedente sistema. Si determini il rango della matrice prodotto $A^t A$ al variare di k .

ESERCIZIO 2.9. Risolvere se possibile i seguenti sistemi di equazioni utilizzando il metodo di eliminazione di Gauss-Jordan,

1. su \mathbb{Q}

$$\begin{cases} x - 3y + 5z = 0 \\ 2x - 4y + 2z = 0 \\ 5x - 11y + 9z = 0 \end{cases}$$

2. su \mathbb{R}

$$\begin{cases} x - y + 2z = 2 \\ -x + 2y + z = 7 \\ 2x + y - z = 3 \end{cases}$$

3. su \mathbb{R} al variare di $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} 2x - 2ty + tz = 1 \\ x - ty = 0 \\ -x + (t + 3)y - z = 1 \end{cases}$$

4. su \mathbb{R} al variare di $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x + ty = 0 \\ x + (t + 1)y + z = 1 \\ tx + 2y + (t + 2)z = \sin t - t^2 + 2 \end{cases}$$

ESERCIZIO 2.10. Determinare $a, b, c \in \mathbb{R}$ tali che il sistema

$$\begin{cases} x - 3y = a \\ 2y - z = b \\ x - 5y + z = c \end{cases}$$

ammetta soluzioni.

ESERCIZIO 2.11. Dimostrare che se

$$A = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & \dots & \dots & \dots & \dots & x_{1n} \\ 0 & x_{22} & x_{23} & \dots & \dots & \dots & \dots & x_{2n} \\ 0 & 0 & x_{33} & \dots & \dots & \dots & \dots & x_{3n} \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & x_{kk} & \dots & \dots & \dots & x_{kn} \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & x_{nn} \end{pmatrix}$$

allora $\det(A) = x_{11}x_{12}x_{13}\dots x_{nn}$

ESERCIZIO 2.12. Siano $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ e sia $A = A_1 - A_2$.

Sia $W = \{X \in M_{2,2}(\mathbb{R}) \mid A_1 X = A_2 X\}$.

- (i) Dimostrare che $W \equiv \{X \in M_{2,2}(\mathbb{R}) \mid AX = 0\}$;
- (ii) dimostrare che W è un sottospazio vettoriale di $M_{2,2}(\mathbb{R})$;
- (iii) provare che le matrici $X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ed $X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ sono un sistema digeneratori per W . Mostrare similmente che le matrici $\frac{1}{3}X_1$ ed X_2 costituiscono un sistema di generatori per W ;
- (iv) dimostrare che X_1, X_2 sono linearmente equivalenti;
- (v) calcolare $\dim(W)$.

ESERCIZIO 2.13. In \mathbb{R} , risolvere utilizzando il metodo di Gauss-Jordan il seguente sistema:

$$\begin{cases} x + 7z = 0 \\ 2x + 5y = 0 \end{cases}$$

ESERCIZIO 2.14. Sia $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 3y = 0\}$. W è un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^3 ? In caso affermativo trovare una base e la dimensione di W .

Applicazioni Lineari

1. Esercizi svolti

ESERCIZIO 1.1. Al variare dei parametri reali a, b, c si consideri la matrice

$$M_{a,b,c} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & a & b \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ b & -1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & c \end{pmatrix}$$

- (i) Si determini il rango di $M_{a,b,c}$ in funzione di a, b, c ;
 (ii) si consideri l'operatore lineare $F_{a,b,c} : \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^4$ che ha la matrice $M_{a,b,c}$ come matrice associata rispetto alla base di vettori $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4\}$ dove

$$\mathbf{b}_1 = (1, 0, 0, 0), \quad \mathbf{b}_2 = (1, 1, 0, 0), \quad \mathbf{b}_3 = (1, 1, 1, 0), \quad \mathbf{b}_4 = (1, 1, 1, 1)$$

Si determinino i valori a, b, c per i quali si ha: $F_{a,b,c}(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$, dove \mathbf{v} è il vettore $(3, 2, 2, 1)$ e \mathbf{w} è il vettore $(0, 1, 1, 0)$.

Soluzione.

- (i) Tra le sottomatrici 2×2 di $M_{a,b,c}$ c'è la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

quindi il rango di $M_{a,b,c}$ è sempre ≥ 2 . Tra le sottomatrici 3×3 c'è la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & c \end{pmatrix}$$

che ha determinante $-c$. Inoltre $\det M_{a,b,c} = (a+b)(a+b-c)$. Se ne deduce che si hanno i casi seguenti:

- (1) $(a+b)(a+b-c) \neq 0$: rango 4.
 (2) $(a+b)(a+b-c) = 0, c \neq 0$: rango 3.
 (3) $(a+b)(a+b-c) = c = 0$ (cioè $a = -b, c = 0$): si calcola che il rango è 2.

Scriviamo il vettore \mathbf{v} come combinazione lineare dei vettori della base \mathcal{B} :

$$\mathbf{v} = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_3 + \mathbf{b}_4.$$

Quindi calcoliamo la sua immagine mediante $F_{a,b,c}$:

$$F_{a,b,c}(\mathbf{v}) = (a+b)\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 + b\mathbf{b}_3 + (a+c)\mathbf{b}_4.$$

Poiché richiediamo $F_{a,b,c}(\mathbf{v}) = \mathbf{w} = (0, 1, 1, 0)$ ne segue

$$(a+b, 1, b, a+c) = (0, 1, 1, 0)$$

Quindi $a = -1, b = c = 1$.

ESERCIZIO 1.2. Sia V lo spazio vettoriale dei polinomi in una indeterminata T aventi grado minore o uguale a 2 e coefficienti reali. In V si considerino le basi

$$q = \{\bar{q}_1 = 1 + T - T^2, \quad \bar{q}_2 = 1 + T^2, \quad \bar{q}_3 = 1 - T\}$$

$$p = \{\bar{p}_1 = 1, \quad \bar{p}_2 = T, \quad \bar{p}_3 = T^2\}.$$

(i) Si determini la matrice del cambiamento di base $M_{q,p}(id_V)$.

(ii) Si determini la matrice $M_p(f)$ dell'operatore lineare $f : V \rightarrow V$ definito dalle condizioni seguenti:

$$f(\bar{q}_1) = \bar{0}, \quad f(\bar{q}_2) = 1 + 2T - 3T^2, \quad f(\bar{q}_3) = T - 1.$$

(iii) Si stabilisca se f è diagonalizzabile e, in caso affermativo, si determini una base di autovettori per f .

Soluzione.

Essendo

$$\bar{p}_1 = \frac{1}{3}(\bar{q}_1 + \bar{q}_2 + \bar{q}_3)$$

$$\bar{p}_2 = \frac{1}{3}(\bar{q}_1 + \bar{q}_2 - 2\bar{q}_3)$$

$$\bar{p}_3 = \frac{1}{3}(-\bar{q}_1 + 2\bar{q}_2 - \bar{q}_3)$$

si trova

$$M_{q,p}(id_V) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

La matrice $M_{p,q}(f)$ (vedi [1] pg.150) si calcola immediatamente:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Quindi $M_p(f) = M_{p,q}(f)M_{q,p}(id_V)$ è la seguente matrice:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Il polinomio caratteristico di f è $-T(-1-T)^2$ e gli autovalori sono 0, -1 di molteplicità algebrica 1 e 2 rispettivamente.

Gli autospazi relativi sono

$V_0 = \{(-1, -1, 1)t, \quad t \in \mathbf{R}\}$, una cui base è costituita dal vettore $(-1, -1, 1)$ e

$V_1 = \{u(-1, 1, 0) + v(-1, 0, 1), \quad u, v \in \mathbf{R}\}$, una cui base è $\{(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$.

Dunque una base di autovettori per V è $\{(-1, -1, 1), (-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$.

ESERCIZIO 1.3. Si considerino le applicazioni lineari $\alpha : \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^2$, $\beta_h : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^4$

definite rispettivamente dalle matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B_h = \begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \\ h & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(dove h è un parametro reale).

Sia poi $\gamma_h : \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^4$ l'operatore lineare $\beta_h \circ \alpha$.

(i) Si determinino i valori di h per i quali $\dim N(\gamma_h) \cap Im(\gamma_h) \geq 1$.

(ii) Motivando la risposta si dica se per tali valori γ_h è diagonalizzabile.

Soluzione.

(i) Poiché il rango di A è due α è suriettiva. Poiché il rango di B_h è due β_h è iniettiva. Ciò implica $N(\gamma_h) = N(\alpha)$. Una base di $N(\gamma_h)$ è dunque $\{(1, 1, 1, 0), (1, 0, 0, 1)\}$. Poiché $Im(\gamma_h) = Im(\beta_h)$, e quest'ultimo ha dimensione due, una base di $Im(\gamma_h)$ è costituita dalle due colonne (scritte come righe) della matrice B_h : $(1, 0, h, 0), (h, 1, 1, 1)$. Per la formula di Grassmann $\dim Im(\gamma_h) \cap N(\gamma_h) \geq 1$ se e solo se $\dim Im(\gamma_h) + N(\gamma_h) \leq 3$. Quest'ultima condizione si verifica se e solo se i vettori $(1, 1, 1, 0), (1, 0, 0, 1), (1, 0, h, 0), (h, 1, 1, 1)$ sono linearmente dipendenti cioè se e solo se $h(h-2) = 0$. Le soluzioni si ottengono per $h = 0$ e $h = 2$.

(ii) γ_h non è diagonalizzabile se $h = 0, 2$. Lo si prova con un calcolo diretto oppure applicando l'esercizio 2.1.

ESERCIZIO 1.4. Sia V uno spazio vettoriale reale e sia $B = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{v}_4\}$ una sua base.

Si considerino tutti gli operatori lineari $F_c : V \rightarrow V$, $c \in \mathbf{R}$, che soddisfano alle condizioni seguenti:

- (1) $\bar{v}_1 + \bar{v}_2, \bar{v}_3 + \bar{v}_4$ sono autovettori di F_c di autovalore c ,
- (2) $F_c(\bar{v}_1) = \bar{v}_4$,
- (3) $F_c(\bar{v}_4) = -c(\bar{v}_2 + \bar{v}_3) + \bar{v}_1$.

Si determinino:

- (i) una base b di V contenente i vettori $\bar{v}_1 + \bar{v}_2, \bar{v}_3 + \bar{v}_4, \bar{v}_1$
- (ii) la matrice $M_b(F_c)$ associata a F_c rispetto a b ,
- (iii) i valori di c per i quali F_c non è diagonalizzabile,
- (iv) per uno dei valori di c trovati svolgendo il punto (iii) si calcolino gli eventuali autospazi di F_c .

Soluzione.

- (i) $b = \{\bar{v}_1 + \bar{v}_2, \bar{v}_3 + \bar{v}_4, \bar{v}_1, \bar{v}_4\}$, è una base come richiesto ma anche $\{\bar{v}_1 + \bar{v}_2, \bar{v}_3 + \bar{v}_4, \bar{v}_1, \bar{v}_3\}$ lo è.
- (ii) Poniamo

$$b = \{\bar{v}_1 + \bar{v}_2, \bar{v}_3 + \bar{v}_4, \bar{v}_1, \bar{v}_4\} := \{\bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3, \bar{w}_4\}$$

Per scrivere la matrice che rappresenta F_c rispetto alla base b serve conoscere l'immagine $F_c(\bar{w}_i)$ al variare di $i = 1, \dots, 4$. Dalle ipotesi segue che

$$\begin{aligned} F_c(\bar{v}_1 + \bar{v}_2) &= F_c(\bar{w}_1) = c(\bar{v}_1 + \bar{v}_2) = c(\bar{w}_1) \\ F_c(\bar{v}_3 + \bar{v}_4) &= F_c(\bar{w}_2) = c(\bar{w}_2) \\ F_c(\bar{v}_1) &= F_c(\bar{w}_3) = \bar{v}_4 = \bar{w}_4 \\ F_c(\bar{v}_4) &= F_c(\bar{w}_4) = -c(\bar{w}_1 + \bar{w}_2 - \bar{w}_3 - \bar{w}_4) + \bar{w}_3 \end{aligned}$$

da cui, la matrice cercata

$$M_b(F_c) = \begin{pmatrix} c & 0 & 0 & -c \\ 0 & c & 0 & -c \\ 0 & 0 & 0 & c+1 \\ 0 & 0 & 1 & c \end{pmatrix}$$

Il polinomio caratteristico di F_c è dato dal polinomio $p(T) = \det(M_b(F_c) - TI_4)$ ovvero

$$(c - T)^2(T^2 - cT - c - 1)$$

le sue radici (quindi gli autovalori di F_c) sono:

$$\lambda_1 = c, \quad \lambda_2 = c + 1, \quad \lambda_3 = -1$$

di molteplicità 2, 1, 1 rispettivamente. Se questi tre valori sono tutti distinti si calcola che le dimensioni dei corrispondenti autospazi sono rispettivamente 2, 1, 1. Quindi F_c è diagonalizzabile (dal teorema 13.13 di [1]).

Sono rimasti da considerare i seguenti casi:

$\lambda_1 = \lambda_2$ impossibile,

$\lambda_1 = \lambda_3$ cioè $c = -1$. L'autovalore -1 ha molteplicità algebrica 3 e il corrispondente autospazio ha dimensione 2 quindi F_c non è diagonalizzabile (sempre per il teorema citato).

$\lambda_2 = \lambda_3$ cioè $c = -2$. L'autovalore -1 si comporta esattamente come sopra. F_c non è diagonalizzabile per $c = -2$ (per teorema citato).

(iv) Per $c = -2$ gli autovalori sono $-2, -1$: l'autospazio V_{-2} è per definizione costituito dai vettori $\bar{v} \in V$ tali che $F_{-2}(\bar{v}) = -2\bar{v}$ ed ha come base l'insieme $\{\bar{v}_1 + \bar{v}_2, \bar{v}_3 + \bar{v}_4\}$; l'autospazio V_{-1} ha come base il vettore $v_1 + v_2$. Per $c = -1$ gli autovalori sono $-1, 0$ e V_{-1} ha come base $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2\}$.

ESERCIZIO 1.5. Sia $f : \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^4$ l'operatore lineare definito dalle condizioni

$$\begin{aligned} f(\bar{e}_1) &= \bar{0} & f(\bar{e}_2) &= -\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + 2\bar{e}_3 + 4\bar{e}_4 \\ f(\bar{e}_3) &= -\bar{e}_1 - \bar{e}_2 - 2\bar{e}_3 - 4\bar{e}_4 & f(\bar{e}_4) &= \bar{e}_1 + \bar{e}_2 + 2\bar{e}_3 + 4\bar{e}_4, \end{aligned}$$

dove $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \bar{e}_4\}$ è la base canonica di \mathbf{R}^4 .

(i) Si determini la matrice che rappresenta f rispetto alla base canonica;

(ii) si determini il sottospazio $N(f) \cap Im(f)$ e si dica, motivando la risposta, se f è diagonalizzabile.

Soluzione.

(i)

La matrice che rappresenta f rispetto alla base canonica è la matrice

$$M_{\mathbf{e}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

che ha evidentemente rango 2.

(ii) Essendo $rg(M_{\mathbf{e}}(f)) = 2$ si ha che $\dim N(f) = \dim Im(f) = 2$. Una base di $N(f)$ è $\{\bar{e}_1, \bar{e}_3 + \bar{e}_4\}$. Infatti ricordiamo che

$$N(f) = \{v \in \mathbf{R}^4 \mid f(v) = 0\}$$

e se $v \in \mathbf{R}^4$ ha coordinate (x_1, x_2, x_3, x_4) allora

$$\begin{aligned} v \in N(f) &\Leftrightarrow f(v) = 0 \Leftrightarrow x_1 f(\mathbf{e}_1) + x_2 f(\mathbf{e}_2) + x_3 f(\mathbf{e}_3) + x_4 f(\mathbf{e}_4) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x_2(-\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3 + 4\mathbf{e}_4) + x_3(-\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3 - 4\mathbf{e}_4) + \\ &x_4(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3 + 4\mathbf{e}_4) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ 4x_2 - 4x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Quest'ultimo è un sistema di due equazioni indipendenti nelle variabili x_1, x_2, x_3, x_4 , le soluzioni sono allora del tipo $(k, 0, s, s)$ al variare di $k, s \in \mathbf{R}$. Dunque $v \in N(f)$ se e solo se $v = k\mathbf{e}_1 + s\mathbf{e}_3 + s\mathbf{e}_4 = k\mathbf{e}_1 + s(\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4)$ e l'insieme $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4\}$ risulta essere una base di $N(f)$.

Due vettori linearmente indipendenti di $Im(f)$ (che quindi sono una base) sono ad esempio $f(\bar{e}_2)$, $f(\bar{e}_3)$. Segue allora che $v \in N(f) \cap Im(f)$ se e solo se

$$\alpha \bar{e}_1 + \beta(\bar{e}_3 + \bar{e}_4) = \gamma f(\bar{e}_2) + \delta f(\bar{e}_3)$$

con $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$. Le soluzioni si ottengono per $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (-2t, 0, t, t)$, $t \in \mathbb{R}$. Quindi $\beta = 0$ e

$$N(f) \cap Im(f) = \{t\bar{e}_1, t \in \mathbb{R}\}.$$

Infine il polinomio caratteristico di f è dato dal polinomio $P_f(T) = T^3(T - 3)$. Gli zeri di questo polinomio sono $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 3$ che sono gli autovalori di f . Poiché $\dim N(f) = 2$ la molteplicità geometrica (che è 2) dell'autovalore $\lambda = 0$ non coincide con quella algebrica (che è 3) e quindi f non è diagonalizzabile.

ESERCIZIO 1.6. Al variare del parametro reale c si consideri l'operatore lineare

$$f_c : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$$

definito nel modo seguente:

$$f_c(\mathbf{e}_1) = -\mathbf{e}_2, f_c(\mathbf{e}_2) = -2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3, f_c(\mathbf{e}_3) = -\mathbf{e}_4, f_c(\mathbf{e}_4) = (c - 1)\mathbf{e}_1$$

dove $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$ è la base canonica.

(i) Si consideri l'operatore f_1 ottenuto ponendo $c = 1$: si dica, motivando la risposta, quali tra gli operatori f_1 e $f_1 \circ f_1$ sono diagonalizzabili. Per quelli che lo sono si determini una base di autovettori.

(ii)* Si determinino i valori di c per i quali f_c è diagonalizzabile.

Soluzione.

(i) Gli autovalori di f_1 sono le radici del polinomi caratteristico $T^4 - 2T^2$. L'autovalore $T = 0$ ha molteplicità algebrica due e geometrica 1 (poiché la dimensione del nucleo di f_1 è 1, infatti si verifica subito che $\ker f = \{(0, 0, 0, t) | t \in \mathbb{R}\}$). Quindi f_1 non è diagonalizzabile.

$f_1 \circ f_1$ è invece diagonalizzabile. $f_1 \circ f_1$ è definito come segue

$$(f_1 \circ f_1)(\mathbf{e}_1) = 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3, (f_1 \circ f_1)(\mathbf{e}_2) = 2\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_4, (f_1 \circ f_1)(\mathbf{e}_3) = (f_1 \circ f_1)(\mathbf{e}_4) = 0$$

e la matrice che rappresenta $f_1 \circ f_1$ rispetto alla base canonica è data dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il suo polinomio caratteristico è $(T - 2)^2 T^2$. Gli autovalori sono $T = 2$, $T = 0$ ed hanno entrambi molteplicità algebrica 2. I corrispondenti autospazi hanno dimensione due. Infatti per definizione l'autospazio relativo all'autovalore 2 è

$$V_2 = \{\bar{v} \in \mathbb{R}^4 | (f_1 \circ f_1)(\bar{v}) = 2\bar{v}\}$$

e quindi $\bar{v} \in V_2$ se e solo se $(f_1 \circ f_1)(\bar{v}) = 2\bar{v}$ ovvero se e solo se $(f_1 \circ f_1)(\bar{v}) - 2\bar{v} = 0$ ovvero se e solo se $(f_1 \circ f_1 - 2id_V)(\bar{v}) = 0$. Si trova che $V_2 = \{(-2s, -2t, s, t) | s, t \in \mathbb{R}\}$. Dunque un vettore $\bar{v} \in V_2$ si scriverà come

$$v = -2se_1 - 2te_2 + se_3 + te_4 = s(e_3 - 2e_1) + t(e_4 - 2e_2).$$

Dunque una base di V_2 è costituita dai vettori $\mathbf{e}_3 - 2\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_4 - 2\mathbf{e}_2$ e $\dim V_2 = 2$. Similmente si prova che $\dim V_0 = 2$ ed una sua base è costituita dai vettori $\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$. Una base di autovettori per \mathbb{R}^4 è quindi $2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3, 2\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$

(ii) Il polinomio caratteristico di f_c è $P_c(T) = T^4 - 2T^2 - (c - 1)$. Ponendo $Z = T^2$ e risolvendo l'equazione $Z^2 - 2Z - (c - 1) = 0$ si ottengono le radici

$$\zeta_1 = 1 + c^{\frac{1}{2}}, \quad \zeta_2 = 1 - c^{\frac{1}{2}}$$

Le radici complesse del polinomio caratteristico sono quindi

$$\zeta_1^{\frac{1}{2}}, \quad -\zeta_1^{\frac{1}{2}}, \quad \zeta_2^{\frac{1}{2}}, \quad -\zeta_2^{\frac{1}{2}}$$

Al variare di c le radici reali sono:

(1) $c < 0$: nessuna delle radici è reale. (2) $c > 1$: due sole delle quattro radici sono reali. (3) $0 < c < 1$: tutte le quattro radici sono reali. (4) $c = 1$: tre radici, tutte reali, una doppia ($T = 0$). (5) $c = 0$: due radici, entrambe reali, entrambe doppie ($T = 1, -1$).

Dal teorema fondamentale sugli operatori diagonalizzabili e dalla precedente analisi delle radici segue che f_c non è certamente diagonalizzabile nei casi (1), (2). Mentre f_c è certamente diagonalizzabile nel caso (3). Nel caso (4) sappiamo che f_1 non è diagonalizzabile dalla prima parte dell'esercizio. Nel caso (5) si calcola che gli autovalori $1, -1$ hanno molteplicità algebrica (= 2) diversa da quella geometrica (= 1). Quindi f_0 non si diagonalizza.

Conclusione: f_c è diagonalizzabile se e solo se c appartiene all'intervallo aperto $(0, 1)$.

ESERCIZIO 1.7. Sia $\alpha : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^4$ l'operatore lineare la cui matrice associata rispetto alle basi canoniche è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

e sia $\beta : \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^3$ l'operatore lineare la cui matrice associata, sempre rispetto alle basi canoniche, è

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

(i) Si determini una base dello spazio vettoriale

$$Im(\alpha) \cap N(\beta).$$

(ii) Si determini una base dello spazio vettoriale

$$Im(\beta \circ \alpha).$$

Soluzione.

(i) La matrice A ha rango due, quindi due sue colonne indipendenti sono una base di $Im(\alpha)$. Tali sono ad esempio le prime due: $(1, 2, 0, 2)$, $(3, 5, 1, 3)$ (scritte come righe). Quindi un vettore di $Im(\alpha)$ è una riga del tipo

$$X(1, 2, 0, 2) + Y(3, 5, 1, 3) = (X + 3Y, 2X + 5Y, Y, 2X + 3Y)$$

(con X, Y variabili reali). D'altra parte, si calcola che i vettori del nucleo $N(\beta)$ sono del tipo

$$(Z + T, 3T, Z, T)$$

(Z, T variabili reali). I vettori dell'intersezione $Im(\alpha) \cap N(\beta)$ sono quindi tutte e sole le righe che si possono scrivere come sopra e che soddisfano alla condizione

$$(X + 3Y, 2X + 5Y, Y, 2X + 3Y) = (Z + T, 3T, Z, T).$$

Questa condizione equivale al sistema di quattro equazioni in quattro incognite

$$X + 3Y = Z + T, \quad 2X + 5Y = 3T, \quad Y = Z, \quad 2X + 3Y = T,$$

risolvendo il sistema si ottengono le ∞^1 soluzioni

$$X = -c, Y = c, Z = c, T = c \quad \forall c \in \mathbf{R}.$$

Sostituendo vediamo che i vettori di $Im(\alpha) \cap N(\beta)$ sono le righe del tipo

$$(2c, 3c, c, c), \quad \forall c \in \mathbf{R}$$

Ponendo ad esempio $c = 1$ si ottiene una base per $Im(\alpha) \cap N(\beta)$, cioè il vettore $(2, 3, 1, 1)$.

(ii) La matrice associata a $\beta \circ \alpha$ (rispetto alle basi canoniche) è BA . Le colonne di BA sono un sistema di generatori per $Im(\beta \circ \alpha)$. La dimensione di $Im(\beta \circ \alpha)$ è il rango di BA cioè 1. Quindi una qualsiasi colonna non nulla di BA è una base di $Im(\beta \circ \alpha)$. Ogni vettore del tipo $c(4, 3, 1)$, ($c \neq 0$), è una base di tale spazio.

ESERCIZIO 1.8. Siano $a : V \rightarrow W$, $b : W \rightarrow U$ due applicazioni lineari. Si dimostri che

$$\dim Im(b \circ a) = \dim Im(a) - \dim(Im(a) \cap N(b)).$$

Soluzione.

$Im(a)$ è uno spazio vettoriale. Sia $h : Im(a) \rightarrow U$ la funzione b ristretta a $Im(a)$, (cioè $h(\bar{w}) = b(\bar{w})$, $\forall \bar{w} \in Im(a)$). h è una applicazione lineare. Inoltre si può dimostrare facilmente che $N(h) = Im(a) \cap N(b)$ e $Im(h) = Im(b \circ a)$.

L'uguaglianza richiesta segue allora dall'uguaglianza:

$$\dim Im(h) - \dim N(h) = \dim Im(h),$$

(teorema 11.6 del testo).

ESERCIZIO 1.9. Sia $F_{u,v} : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ l'operatore lineare la cui matrice associata rispetto alla base canonica è

$$M_{u,v} = \begin{pmatrix} u+1 & 2u & u \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & v & 1 \end{pmatrix}$$

(dove (u, v) sono parametri reali).

(i) Si determinino i valori di u, v per i quali almeno un autospazio di $F_{u,v}$ ha dimensione ≥ 2 .

(ii) Si dimostri che, per tali valori, $F_{u,v}$ è sempre diagonalizzabile se $u \neq -2$.

Soluzione.

(i) Un autospazio ha dimensione ≥ 2 se e solo se il rango della matrice

$$M_{u,v} - TI_3$$

è ≤ 1 . Equivalentemente le tre righe della matrice devono essere proporzionali. Le ultime due righe sono proporzionali se e solo se l'ultima è nulla, ovvero se e solo se $v = 0$ e $T = 1$. Ponendo $T = 1$ la prima e la seconda riga sono proporzionali. Quindi $F_{u,v}$ ha un autospazio di dimensione ≥ 2 per $v = 0$, u qualsiasi. (L'autovalore corrispondente a questo autospazio è sempre $T = 1$).

(ii) Ponendo $v = 0$ e calcolando il polinomio caratteristico di $F_{u,0}$ si ottiene il polinomio

$$P_u(T) = (u + 3 - T)(1 - T)^2$$

Gli autovalori di $F_{u,0}$ sono 1 e $(u + 3)$. Se $u \neq -2$ questi autovalori sono distinti. Sempre per $u \neq -2$ si verifica (o si dimostra in vari modi) che gli autospazi corrispondenti V_1 ,

V_{u+3} hanno rispettivamente dimensione 2 e 1. Quindi $\dim V_1 + \dim V_{u+3} = 3$ e $F_{u,0}$ è diagonalizzabile.

ESERCIZIO 1.10. (i) Sia

$$f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$$

l'operatore lineare definito, rispetto alla base canonica, dalla matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Si determini una base $\mathcal{B} = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$ di autovettori di f .

(ii) Si determinino, scrivendone la matrice rispetto a una base, gli operatori lineari

$$g: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$$

soddisfacenti alle condizioni seguenti:

- $g(\bar{v}_1) = \bar{v}_1$,
- $g(\bar{v}_2) = \bar{v}_3$,
- $g(\bar{v}_3)$ è combinazione lineare di \bar{v}_1, \bar{v}_2 ,
- g è diagonalizzabile.

Soluzione.

Base di autovettori per f :

$$\bar{v}_1 = (0, 1, -1), \bar{v}_2 = (1, 1, 1), \bar{v}_3 = (-2, 1, 1)$$

(gli autovalori sono: $-1, 3, -3$), il polinomio caratteristico $(1 + T)((T^2 - 9)$.

Rispetto alla base $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3$ una g soddisfacente alle prime tre condizioni ha come matrice associata la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Il polinomio caratteristico è $(1 - T)(T^2 - b)$. Condizione necessaria per avere g diagonalizzabile è dunque $b \geq 0$. Se $b > 0, b \neq 1$ il polinomio ha tre radici distinte dunque g è diagonalizzabile. Ci rimane da considerare i casi $b = 0$ e $b = 1$.

$b = 0$: 0 è autovalore di molteplicità algebrica 2, il corrispondente autospazio (nucleo di g) ha dimensione uno qualunque sia a perché il rango della matrice è sempre uguale a due. Quindi g non è diagonalizzabile.

$b = 1$: 1 è autovalore di molteplicità algebrica due, il corrispondente autospazio ha dimensione due se e solo se $a = 0$.

Conclusione: g è diagonalizzabile nei casi seguenti: $b > 0$ e $b \neq 1$ oppure $b = 1$ e $a = 0$.

ESERCIZIO 1.11. Si determinino tutte le matrici triangolari superiori

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$$

che sono diagonalizzabili ed hanno polinomio caratteristico $P_M(T) = -T(1 - T)^2$.

Soluzione.

$P_M(T) = (a-T)(d-T)(f-T)$. Per essere uguale a $T(1-T)^2$ si deve avere $(a, d, f) = (0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0)$.

M è diagonalizzabile se solo se la somma delle dimensioni dei suoi autospazi V_λ è tre. Gli autovalori λ di M sono 0, 1. Inoltre $\dim V_\lambda = 3 - \text{rango di } (M - \lambda I_3)$.

Poiché $\lambda = 0$ è una radice semplice del polinomio caratteristico avremo sempre $\dim V_0 = 1$. Quindi M è diagonalizzabile se e solo se $\dim V_1 = 2$. Esaminiamo i tre casi separatamente:

Primo caso: poniamo $(a, d, f) = (0, 1, 1)$.

Il rango di $M - I_3$ è due se $e \neq 0$ ed è uno se $e = 0$. Quindi $\dim V_1 = 2$ se e solo se $e = 0$. Sono diagonalizzabili le matrici

$$M = \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Secondo caso: poniamo $(a, d, f) = (1, 0, 1)$. Il rango di $M - I_3$ è due se $be + c \neq 0$ ed è uno se $be + c = 0$. Quindi $\dim V_1 = 2$ se e solo se $be + c = 0$. Sono diagonalizzabili le matrici

$$M = \begin{pmatrix} 1 & b & -be \\ 0 & 0 & e \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Terzo caso: poniamo $(a, d, f) = (1, 1, 0)$. Il rango di $M - I_3$ è due se $b \neq 0$ ed è uno se $b = 0$. Quindi $\dim V_1 = 2$ se e solo se $b = 0$. Sono diagonalizzabili le matrici

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & c \\ 0 & 1 & e \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Esercizi proposti

ESERCIZIO 2.1. Per ogni operatore lineare f si ha: f diagonalizzabile implica $N(f) \cap \text{Im}(f) = \{\bar{0}\}$.

(Suggerimento. Se $N(f) = \{\bar{0}\}$ allora $N(f) \cap \text{Im}(f) = \{\bar{0}\}$ e non c'è altro da dimostrare. Supponiamo invece $N(f) \neq \{\bar{0}\}$: poiché f è diagonalizzabile esiste una base di autovettori $\{\bar{a}_1 \dots \bar{a}_n\}$. Possiamo supporre che i primi t siano una base di $N(f)$. I rimanenti autovettori $\{\bar{a}_{t+1} \dots \bar{a}_n\}$ sono allora associati ad autovalori diversi da zero e costituiscono una base di $\text{Im}(f)$.

Sia $\bar{x} \in N(f) \cap \text{Im}(f)$, allora

$$\lambda_1 \bar{a}_1 + \dots + \lambda_t \bar{a}_t = \bar{x} = \mu_1 \bar{a}_{t+1} + \dots + \mu_{n-t} \bar{a}_n$$

Quindi $\lambda_1 \bar{a}_1 + \dots + \lambda_t \bar{a}_t - \mu_1 \bar{a}_{t+1} - \dots - \mu_{n-t} \bar{a}_n = \bar{0}$.

Poiché $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n$ sono linearmente indipendenti ne segue $\lambda_1 = \dots = \lambda_t = \mu_1 = \dots = \mu_{n-t} = 0$. Quindi $\bar{x} = \bar{0}$ e $N(f) \cap \text{Im}(f) = \{\bar{0}\}$.

ESERCIZIO 2.2. Si consideri la matrice

$$M_c = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -c & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ c & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dove $c \in \mathbf{R}$. Sia

$$F_c : \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^4$$

l'operatore lineare la cui matrice associata, rispetto alla base canonica, è M_c .

- (i) Determinare i valori $c \in \mathbf{R}$ tali che $\dim N(F_c) > 0$; per tali valori determinare $Im(F_c)$;
 (ii) Si discuta la diagonalizzabilità di tali operatori.
 (iii) Sia $G : \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^4$ l'operatore così definito rispetto alla base canonica: $G(\bar{e}_1) = \bar{e}_3$, $G(\bar{e}_2) = \bar{e}_4$, $G(\bar{e}_3) = \bar{e}_3$, $G(\bar{e}_4) = \bar{e}_4$. Si determinino i valori di c per i quali $G \circ F_c$ non è diagonalizzabile.

(Suggerimento.

(i) Se $v = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in N(F_c)$, allora le coordinate x_i sono soluzioni del seguente sistema

$$\begin{cases} -cx_3 - x_4 = 0 \\ x_3 + 2x_4 = 0 \\ cx_1 - x_2 = 0 \\ -x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

al variare di $c \in \mathbf{R}$. Verificare allora che esistono ∞^1 soluzioni se e solo se $c = \pm \frac{1}{2}$. Dunque per questi valori di c si ha $\dim N(F_c) = 1$.

ESERCIZIO 2.3. Siano $f : \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^4$ e $g : \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^4$ le applicazioni lineari cosidefinite:

$$f(\bar{e}_1) = \bar{e}_1 + \bar{e}_2, f(\bar{e}_2) = \bar{e}_2 + \bar{e}_3, f(\bar{e}_3) = \bar{e}_1 - \bar{e}_2 + \bar{e}_3, f(\bar{e}_4) = 0$$

$$g(\bar{e}_1) = \bar{e}_2 + \bar{e}_3, g(\bar{e}_2) = \bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3, g(\bar{e}_3) = \bar{e}_3 + \bar{e}_4, g(\bar{e}_4) = -\bar{e}_1 + \bar{e}_2$$

- (i) Si verifichi che l'intersezione dei sottospazi $Im(f)$ e $\ker(g)$ è costituita dal solo vettore nullo.
 (ii) Si verifichi che gli operatori composti $g \circ f$ e $f \circ g$ sono entrambi diagonalizzabili.
 (iii) Si determini la matrice del cambiamento di base da una base di autovettori di $f \circ g$ a una base di autovettori di $g \circ f$.

ESERCIZIO 2.4. Siano V, W due spazi vettoriali reali e siano $v = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$ una base di V e $\{\bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3, \bar{w}_4\}$ una base di W .

Si considerino le seguenti applicazioni lineari:

$$\alpha_c : V \rightarrow W$$

definita dalle condizioni

$$\alpha_c(\bar{v}_1) = \bar{w}_1, \quad \alpha_c(\bar{v}_2) = c\bar{w}_1 + 3\bar{w}_2 + c\bar{w}_4, \quad \alpha_c(\bar{v}_3) = 2\bar{w}_1 + c\bar{w}_2 + \bar{w}_3 + \bar{w}_4$$

dove $c \in \mathbf{R}$, e

$$\beta : W \rightarrow V$$

definita dalle condizioni

$$\beta(\bar{w}_1) = \bar{v}_1 + \bar{v}_2, \quad \beta(\bar{w}_2) = -\bar{v}_1, \quad \beta(\bar{w}_3) = \bar{v}_1 + \bar{v}_2 - 6\bar{v}_3, \quad \beta(\bar{w}_4) = \bar{v}_1 + \bar{v}_2 + 3\bar{v}_3$$

Sia $F_c = \beta \circ \alpha_c$ l'applicazione lineare composta. Si determinino:

- (i) la matrice $M_v(F_c)$ di F rispetto alla base v ,
 (ii) i valori di c per i quali $N(\beta) \subseteq Im(\alpha_c)$,
 (iii) una base di $Im(F_c)$ per uno dei valori di c determinati al punto (ii).

ESERCIZIO 2.5. Sia $F_c : \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^4$ l'operatore lineare così definito:

$$F_c(\bar{e}_1) = \bar{e}_1, F_c(\bar{e}_2) = \bar{e}_1 + c\bar{e}_2, F_c(\bar{e}_3) = 2\bar{e}_3 + \bar{e}_4, F_c(\bar{e}_4) = \bar{e}_3 + \bar{e}_4$$

(dove $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \bar{e}_4\}$ è la base canonica e c è un parametro reale.

- (i) Si determini una base di autovettori di F_c per ogni c per il quale F_c è diagonalizzabile.
 (ii) Sia $G : \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare definita, rispetto alle basi canoniche, dalla matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Si determinino i valori di c per i quali il nucleo di $G \circ F_c$ contiene un autovettore di F_c .

- (iii) Sia $H : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^4$ l'applicazione lineare definita dalla trasposta della matrice M . Si determinino i valori di c per i quali $G \circ F_c \circ H$ è diagonalizzabile.

(Suggerimento. *Procedere come nell'Esercizio 1.4*)

ESERCIZIO 2.6. Siano F e G i due operatori lineari su \mathbf{R}^4 così definiti:

$$F(\bar{e}_1) = F(\bar{e}_2), F(\bar{e}_1) = -F(\bar{e}_2), F(\bar{e}_3) = \bar{e}_3 + \bar{e}_4, F(\bar{e}_4) = \bar{e}_3 + \bar{e}_4$$

$$G(\bar{e}_1) = G(\bar{e}_2), G(\bar{e}_1) = -G(\bar{e}_2), G(\bar{e}_3) = \bar{e}_3 - \bar{e}_4, G(\bar{e}_4) = 2\bar{e}_3 + \bar{e}_4$$

- (i) Si determinino autovalori ed autovettori di F e di G .
 (ii) Si determinino i valori di k per i quali $F + kG$ non è diagonalizzabile ed ha polinomio caratteristico con tutte le radici reali.

ESERCIZIO 2.7. (i) Si determinino, scrivendone la matrice rispetto alla base canonica $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$, tutti gli operatori $F : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ tali che:

$\bar{e}_1 + \bar{e}_2$ è un autovettore di autovalore 1, $\bar{e}_3 - \bar{e}_3$ è un autovettore di autovalore -1 , il polinomio caratteristico di F ha una radice multipla.

- (ii) Tra tali operatori si determinino quelli dotati di un autospazio di dimensione due.
 (iii) Tra gli operatori determinati al punto (ii) se ne scelgano due F_1 e F_2 non proporzionali¹. Si discuta la diagonalizzabilità di $F_1 \circ F_2$.

¹cioè non si ha l'uguaglianza $F_1 = cF_2$ per una costante c

Bibliografia

- [1] E. Sernesi, Geometria 1, Bollati Boringhieri, 2000.