

UNIVERSITÀ DI TORINO – FACOLTÀ DI SCIENZE M.F.N.

CORSO DI LAUREA IN SCIENZA DEI MATERIALI

ESAME DI GEOMETRIA III

PROVE SCRITTE

Prof. P. GANDINI – S. GARBIERO

A.A. 2003 – 2004

Prova scritta del 7/2/2002

1) Indicata con \mathbb{R} la retta reale, si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che, per $x \in \mathbb{R}$, $f(x)$ è il più grande intero minore o uguale ad x . Dotato \mathbb{R} , come dominio e codominio, delle seguenti topologie:

- (i) topologia ordinaria,
- (ii) topologia degli intervalli chiusi a sinistra ed aperti a destra,
- (iii) topologia degli intervalli illimitati a sinistra,
- (iv) topologia di Frèchet,

dire per quali di esse f è o meno una funzione continua, giustificando le risposte. Nel caso (iv), precisare quali aperti hanno controimmagine aperta e quali no.

2) Dotata la retta reale della topologia ordinaria, si consideri il sottoinsieme $A = [0, 2] - \{1\}$. Provare che, applicando ad A gli operatori di chiusura ed interno, si trovano al più quattro insiemi differenti (incluso A).

3) Data la curva nello spazio

$$\alpha(t) = (at - t^3, 3t^2, 3t + t^3),$$

- a) stabilire per quale valore di $a \in \mathbb{R}$ la curva è piana. Assegnato ad a tale valore, trovare i punti singolari di α e l'equazione del piano che la contiene.
- b) Posto $a = 3$, determinare la curvatura, la torsione e il triedro di Frenet in un generico punto di α . Di quale curva si tratta?

4) Sia M la superficie descritta dalla parametrizzazione locale

$$\varphi(u, v) = (v \cos u, v \sin u, u^2), \quad (u, v) \in D$$

- a) determinare D in modo tale che M sia regolare;
- b) trovare la curvatura Gaussiana e media in un punto qualsiasi di M ;
- c) calcolare la curvatura della sezione normale determinata dal punto $P_0 = \varphi(\pi, 0)$ e dal versore $\mathbf{u} = \frac{1}{5}(3\mathbf{i} + 4\mathbf{k})$.

Prova scritta del 21/2/2002

1) Data la curva nello spazio

$$\alpha(t) = (3t^2, 1 + 3t, at^3), \quad t \in \mathbb{R},$$

a) stabilire per quale valore di $a \in \mathbb{R}$ la curva α è, rispettivamente:

i) piana, ii) un'elica cilindrica.

b) Posto $a = 2$, determinare la curvatura, la torsione e il triedro di Frenet in un generico punto di α .

c) Calcolare la lunghezza dell'arco di curva compreso fra i punti $A(0, 1, 0)$ e $B(3, -2, -2)$.

2) a) Costruire una parametrizzazione locale (D, φ) della superficie M generata dalla rotazione della curva $\alpha(u) = (u, 0, \ln u)$ attorno all'asse z .

b) Trovare la curvatura Gaussiana e media in un punto qualsiasi di M .

c) Calcolare la curvatura normale nel punto $P_0(1, 0, 0)$ e nella direzione del vettore tangente alla curva $\gamma(t) = \varphi(t, 1 - t^2)$.

3) Sia $f : X \rightarrow Y$ una funzione continua non costante fra due spazi topologici X e Y . Si supponga che Y sia dotato della topologia discreta e che contenga almeno due punti. Provare che lo spazio X è sconnesso.

4) Si consideri il piano ordinario dotato della topologia standard. Trovare infiniti sottoinsiemi del piano, tutti fra loro differenti, che abbiano lo stesso insieme di punti interni, lo stesso insieme di punti di frontiera e lo stesso insieme di punti esterni.

Prova scritta del 25/6/2002

1) Data la curva nello spazio

$$\alpha(t) = (t - a \operatorname{sen} t, 1 - \cos t, t), \quad t \in \mathbb{R},$$

- a) stabilire per quale valore di $a \in \mathbf{R}$ la curva α è piana e trovare il piano che la contiene.
- b) Posto $a = 1$, determinare la curvatura, la torsione e il triedro di Frenet in un generico punto di α .

2) Sia M la superficie descritta dalla parametrizzazione locale

$$\varphi(u, v) = (\cos u - v \operatorname{sen} u, \operatorname{sen} u + v \cos u, v), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2$$

- a) trovare la curvatura Gaussiana e media in un punto qualsiasi di M e stabilire se la superficie è minimale;
- b) determinare le curvature principali e le direzioni principali di curvatura nel punto $P_0 = \varphi(0, 0)$;
- c) calcolare la curvatura della sezione normale determinata dal punto P_0 e dal versore $\mathbf{u} = \frac{1}{2}(-\mathbf{j} + \sqrt{3}\mathbf{k})$.

3) Studiare il comportamento rispetto alla compattezza ed alla connessione delle seguenti topologie della retta reale:

- a) topologia ordinaria;
- b) topologia degli intervalli chiusi a sinistra ed aperti a destra;
- c) topologia degli intervalli illimitati a sinistra;
- d) topologia di Fréchet;
- e) topologia discreta.

(facoltativo) Studiare il comportamento di queste topologie rispetto agli assiomi T_0 , T_1 e T_2 .

4) Introdotta sulla retta reale la topologia ordinaria, si trovi:

- a) un sottoinsieme che è compatto e connesso;
- b) un sottoinsieme che è compatto ma non connesso;
- c) un sottoinsieme che è connesso ma non compatto;
- d) un sottoinsieme che non è nè compatto nè connesso.

Prova scritta del 19/9/2002

1) Data la curva nello spazio

$$\alpha(t) = (\sqrt{3}t^2, 2t^3, at),$$

a) stabilire per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la curva è, rispettivamente:

i) una curva piana, ii) un'elica cilindrica.

b) Posto $a = -1$, determinare la curvatura, la torsione e il triedro di Frenet della curva α nel punto $P_0(\sqrt{3}, -2, 1)$.

c) Calcolare la lunghezza dell'arco di curva compreso fra i punti P_0 e $P_1(4\sqrt{3}, 16, -2)$.

2) Sia M la superficie descritta dalla parametrizzazione locale

$$\varphi(u, v) = (u \cos v, u^2, u \sin v), \quad (u, v) \in D.$$

a) Dopo aver determinato D in modo tale che M sia regolare, trovare la curvatura Gaussiana e media in un punto qualsiasi di M . Di che superficie si tratta?

b) Calcolare la curvatura della sezione normale di M individuata dal punto $P_0 =$

$$\varphi(-1, 0) \text{ e dal versore } \mathbf{u} = \frac{\sqrt{6}}{6}(-\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}).$$

3) Delle seguenti topologie della retta reale:

a) topologia ordinaria,

b) topologia degli intervalli chiusi a sinistra ed aperti a destra,

c) topologia di Fréchet,

dire (giustificando le risposte):

i) quale è compatta, connessa ma non T_2 ;

ii) quale è connessa e T_2 ma non compatta;

iii) quale è T_2 , ma non compatta nè connessa.

4) Si considerino i seguenti sottospazi della retta reale con la topologia indotta dalla topologia ordinaria:

$$A = (0, 1), \quad B = [0, 1] \cup [2, 3], \quad \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3 \dots\}.$$

Dire, giustificando le risposte, quale è compatto ma non connesso, quale è connesso ma non compatto e, infine, quale non è nè compatto nè connesso.

Prova scritta del 6/5/2003

1) Data la curva nello spazio

$$\alpha(t) = \left(at - \frac{1}{3}t^3, t^2, t + \frac{1}{3}t^3 \right), \quad t \in \mathbb{R},$$

a) stabilire per quale valore di $a \in \mathbb{R}$ la curva è, rispettivamente:

i) una curva piana; ii) un'elica.

b) Posto $a = 1$, determinare la curvatura e la torsione in un generico punto di α . Calcolare inoltre la lunghezza dell'arco di curva compreso fra l'origine e il punto $P\left(\frac{2}{3}, 1, \frac{4}{3}\right)$.

c) Assegnato ad a il valore per cui α è piana, trovare il piano che la contiene.

2) Sia M la superficie descritta dalla parametrizzazione locale

$$\varphi(u, v) = (u, e^u \cos v, e^u \sin v), \quad (u, v) \in (-\infty, +\infty) \times (0, 2\pi).$$

a) Trovare la curvatura Gaussiana in un punto qualsiasi di M e stabilire se la superficie è minimale. Di che superficie si tratta?

b) Calcolare la curvatura della sezione normale determinata dal punto $P_0 = \varphi(0, 0)$ e dal vettore $\mathbf{u} = \frac{\sqrt{3}}{3}(\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k})$.

c) Calcolare l'area della parte di superficie descritta dai punti $\varphi(u, v)$ con $(u, v) \in D_a = (a, 0) \times (0, 2\pi)$, dove $a < 0$. Stabilire se l'area della parte di superficie descritta dai punti $\varphi(u, v)$ con $u < 0$ è limitata.

3) a) Provare che una curva è piana se e solo se la sua torsione è nulla.

b) Definire l'operatore forma di una superficie in un suo punto P_0 (spiegare perchè la definizione non dipende dalla curva usata per la costruzione) e dire quali sono le sue proprietà principali.

Prova scritta del 23/6/2003

1) Data la curva nello spazio

$$\alpha(t) = (\cos t, \sin t, \cos at), \quad t \in \mathbb{R},$$

- a) Stabilire per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la curva è piana. Quali curve si trovano in questo caso?
- b) Posto $a = 2$, determinare la curvatura e la torsione di α in un punto generico.
- c) Trovare il triedro di Frenet nel punto corrispondente a $t = \frac{\pi}{2}$ (posto $a = 2$).

2) Sia M la superficie descritta dalla parametrizzazione locale

$$\varphi(u, v) = (v \cos u, v \sin u, u + cv), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

- a) Stabilire per quale valore del parametro $c \in \mathbb{R}$ la superficie è minimale. Di che superficie si tratta?
- b) Posto $c = 1$, classificare i punti di M e trovare le curvature principali nel punto $P_0 = \varphi(\pi, 0)$.
- c) Calcolare la curvatura della sezione normale determinata dal punto P_0 e dal versore $\mathbf{u} = -\mathbf{i}$

- 3) a) Definire un'elica cilindrica. Provare che una curva non piana è un'elica cilindrica se e solo se il rapporto tra torsione e curvatura è costante.
- b) Dare la definizione di superficie parametrizzata di \mathbb{R}^3 . Cosa si intende per parametrizzazione regolare? Costruire esplicitamente la parametrizzazione locale della sfera S^2 data dalle proiezioni stereografiche.

Prova scritta del 16/7/2003

1) Data la curva nello spazio

$$\alpha(t) = (t(a - t^2), 3t^2, t(3 + t^2)), \quad t \in \mathbb{R},$$

- a) stabilire per quale valore di $a \in \mathbb{R}$ la curva è piana e trovare il piano che la contiene.
- b) Posto $a = 3$, determinare la curvatura e la torsione di α in un punto generico. Di che curva si tratta?
- c) Calcolare la lunghezza della arco di curva che unisce l'origine al punto $P_0(-2, 12, 14)$ (posto $a = 3$).

2) Sia M la superficie descritta dalla parametrizzazione locale

$$\varphi(u, v) = (u + v, u - v, uv), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

- a) Trovare la curvatura Gaussiana e media in un generico punto di M .
- b) Calcolare la curvatura della sezione normale determinata dall'origine e dal versore $\mathbf{u} = \frac{1}{5}(-3\mathbf{i} + 4\mathbf{j})$.
- c) Determinare l'area della porzione di superficie descritta dai punti $\varphi(u, v)$ con $(u, v) \in D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 / u^2 + v^2 \leq 1\}$ (si consiglia l'uso di coordinate polari).

- 3) a) Definire il triedro di Frenet in un generico punto di una curva parametrizzata mediante l'ascissa curvilinea e giustificare le relative formule di Frenet.
- b) Dare la definizione di curvatura normale in un punto di una superficie regolare, spiegando perchè tale nozione è indipendente dalla curva usata per il calcolo. Dimostrare la formula di Eulero e illustrare il suo significato geometrico.

Prova scritta del 11/9/2003

1) Data la curva nello spazio

$$\alpha(t) = (\cos 2t, \sin 2t, 2 \cos t), \quad t \in \mathbb{R},$$

- a) determinare la curvatura e la torsione di α in un punto generico;
- b) trovare il triedro di Frenet nel punto $P_0(0, -1, \sqrt{2})$;
- c) verificare che la curva α è contenuta in una sfera di centro $C(1, 0, 0)$ ed in un cilindro di cui si chiedono le equazioni. Cosa si può dire sulla curvatura di α ? (Motivare la risposta)

2) Sia M la superficie descritta dalla parametrizzazione locale

$$\varphi(u, v) = (e^u \cos v, e^u \sin v, e^{-u}), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

- a) Trovare le curvatures Gaussiana e media in un generico punto di M .
- b) Spiegare, motivando la risposta, di che superficie si tratta e disegnarla approssimativamente.
- c) Calcolare la curvatura della sezione normale determinata dal punto $P_0(1, 0, 1)$ e dal vettore tangente alla curva $\gamma(t) = \varphi(t, -t)$ in P_0 .

3) a) Provare che la lunghezza di un arco di curva non dipende dalla parametrizzazione (regolare) della curva. Dedurre che ogni curva regolare può essere parametrizzata mediante l'ascissa curvilinea.

- b) Dare la definizione di superficie parametrizzata regolare di \mathbb{R}^3 . Quando e perchè le superfici di livello di una funzione di tre variabili sono superfici regolari? Dare un esempio.

Prova scritta del 24/9/2003

1) Data la curva nello spazio

$$\alpha(t) = (at^3, 2t + 1, 3t^2), \quad t \in \mathbb{R},$$

a) stabilire per quale valore di $a \in \mathbb{R}$ la curva è, rispettivamente:

- i) una curva piana; ii) un'elica.

Nel caso in cui la curva è piana, scrivere l'equazione cartesiana di α e dire di che curva si tratta.

- b) Posto $a = -3$, trovare la curvatura, la torsione e triedro di Frenet di α nel punto $P_0(3, -1, 3)$.
c) Calcolare la lunghezza dell'arco di curva compreso tra i punti P_0 e $P_1(-3, 3, 3)$ (sempre per $a = -3$).

2) Sia M la superficie descritta dalla parametrizzazione locale

$$\varphi(u, v) = (\cos v, \sin v, \frac{1}{2}uv^2), \quad (u, v) \in D.$$

- a) Dopo aver determinato D in modo tale che la superficie sia regolare, calcolare le curvature Gaussiana, media e principali in un generico punto di M . Stabilire se M è parte di un piano o di una sfera (motivare sia le risposte affermative che quelle negative).
b) Trovare la curvatura della sezione normale determinata dal punto $P_0(0, 1, 0)$ e dal vettore $\mathbf{u} = \frac{\sqrt{5}}{5}(2\mathbf{i} - \mathbf{k})$.
c) Calcolare l'area della parte di superficie descritta dai punti $\varphi(u, v)$ tali che $(u, v) \in [1, 4] \times [1, 2]$.

3) a) Provare che una curva è piana se e solo se la sua torsione è nulla.

- b) Dare la definizione di curvatura normale in un punto di una superficie regolare e spiegare perchè tale nozione è indipendente dalla curva usata per il calcolo. Quali informazioni si possono dedurre dal segno della curvatura normale? (motivare le risposte)

Prova scritta del 6/2/2004

1) Data la curva nello spazio

$$\alpha(t) = (\sin(at), \cos t, \sin t), \quad t \in \mathbb{R},$$

- a) stabilire per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la curva è piana. Quali curve si trovano in questo caso?
- b) Posto $a = -2$, determinare la curvatura e la torsione di α in un punto generico.
- c) Trovare il triedro di Frenet nel punto corrispondente a $t = \frac{\pi}{2}$ (posto $a = -2$).

2) Sia M la superficie descritta dalla parametrizzazione locale

$$\varphi(u, v) = \left(u, \frac{v^2}{2}, \frac{u^2}{2} - \frac{v^3}{3}\right), \quad (u, v) \in D.$$

- a) Dopo aver determinato D in modo tale che la superficie sia regolare, calcolare le curvatures Gaussiana e media in un generico punto di M . Classificare i punti di M .
- b) Trovare la curvatura della sezione normale determinata dal punto $P_0 = \varphi(1, 1)$ e dal versore $\mathbf{u} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\mathbf{i} + \mathbf{j})$.

- 3) a) Definire un'elica cilindrica. Provare che una curva non piana è un'elica cilindrica se e solo se il rapporto tra torsione e curvatura è costante.
- b) Definire l'operatore forma di una superficie in un suo punto P_0 (spiegare perchè la definizione non dipende dalla curva usata per la costruzione) e dire quali sono le sue proprietà principali.

Prova scritta del 17/6/2004

- 1) a) Dare la definizione di spazio topologico sconnesso e introdurre sulla retta reale \mathbb{R} due topologie che siano sconnesse e due topologie (diverse da quella standard) che siano connesse
- b) Il prodotto di una topologia sconnessa per una topologia connessa è una topologia sconnessa o connessa? Giustificare la risposta.
- c) Provare che se un sottospazio è connesso anche la sua chiusura è un sottospazio connesso.
- d) Introdotta in \mathbb{R} la topologia standard dare un esempio di un sottospazio sconnesso la cui chiusura è connessa.

- 2) Considerata la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, ove \mathbb{R} la retta reale, definita ponendo:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{per } x < 1 \\ x + 2, & \text{per } x \geq 1 \end{cases}$$

provare che tale funzione è continua se in \mathbb{R} (come dominio e come codominio) si pone la topologia di Fréchet.

- 3) Data la curva nello spazio

$$\alpha(t) = (e^{at}, e^{-t}, \sqrt{2}t), \quad t \in \mathbb{R},$$

- a) stabilire per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la curva è piana.
 - b) Posto $a = 1$, determinare la curvatura e la torsione di α in un punto generico. Di che curva si tratta?
 - c) Definire il triedro di Frenet in un generico punto di una curva parametrizzata mediante l'*ascissa curvilinea* e giustificare le formule di Frenet.
- 4) Sia M la superficie descritta dalla parametrizzazione locale

$$\varphi(u, v) = (\cos u, \sin u - \cos v, \sin v), \quad (u, v) \in (0, 2\pi) \times (0, 2\pi).$$

- a) Dopo aver determinato i punti singolari di M , calcolare le curvatures Gaussiana e media in un generico punto regolare della superficie.
- b) Trovare le curvatures principali nel punto $P_0 = \varphi\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ e determinare una base ortonormale di autovettori dell'operatore forma in P_0 .
- c) Provare che l'operatore forma in un punto di una superficie è un endomorfismo simmetrico. Dire quali sono le conseguenze principali di questa proprietà.

Prova scritta del 29/6/2004 – Versione 1

- 1) a) Dare la definizione di spazio topologico compatto.
b) Dire delle seguenti topologie introdotte sulla retta reale \mathbb{R} quali sono compatte e quali no, giustificando le risposte:
– topologia standard;
– topologia degli intervalli chiusi a sinistra ed aperti a destra;
– topologia degli intervalli illimitati a sinistra;
– topologia di Fréchet;
– topologia discreta.
c) Provare che un sottospazio compatto di uno spazio T_2 è un chiuso.
d) Provare che \mathbb{N} (insieme dei numeri naturali) come sottospazio di \mathbb{R} (dotato della topologia standard) non è compatto.

2) Provare che se X è un sottoinsieme di uno spazio topologico S , allora $\text{int } X$ è aperto.

3) Data la curva nello spazio

$$\alpha(t) = (1 + at, -t^2, 1 + t^3), \quad t \in \mathbb{R},$$

- a) stabilire per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la curva è un'elica.
b) Assegnato ad a il **massimo** tra i valori trovati nel punto precedente, calcolare la lunghezza dell'arco di curva compresa tra i punti $P_0(1, 0, 1)$ e $P_1(3, -9, 28)$.
c) Provare che la lunghezza di un arco di curva non dipende dalla parametrizzazione (regolare) della curva. Dedurre che ogni curva regolare può essere parametrizzata mediante l'ascissa curvilinea.

4) Sia M la superficie descritta dalla parametrizzazione locale

$$\varphi(u, v) = (u \cos v, u \sin v, \cos v), \quad (u, v) \in \mathbb{R} \times (0, 2\pi).$$

- a) Dopo aver determinato i punti singolari di M , calcolare la curvatura Gaussiana in un generico punto regolare della superficie e classificare i punti di M .
b) Trovare le curvatures principali e le direzioni principali di curvatura nel punto $P_0 = \varphi(1, \frac{\pi}{2})$.
c) Definire l'operatore forma in un punto P_0 di una superficie e spiegare perchè la definizione non dipende dalla curva usata per la costruzione. Dare l'esempio di due superfici diverse il cui operatore forma è, in ogni punto, un multiplo dell'endomorfismo identico.

Prova scritta del 29/6/2004 – Versione 2

- 1) a) Enunciare le due definizioni di sottospazio compatto.
b) Provare che un sottospazio chiuso di uno spazio compatto è compatto.
c) Dare un esempio, giustificando le affermazioni, di uno spazio **non compatto** contenente almeno un sottospazio compatto ed un sottospazio non compatto.
d) Dare un esempio, giustificando le affermazioni, di uno spazio **compatto** contenente almeno un sottospazio compatto ed un sottospazio non compatto.
- 2) Calcolare l'interno, la frontiera, l'esterno e la chiusura dell'intervallo $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\}$ nelle seguenti topologie di \mathbb{R} :
a) topologia standard;
b) topologia degli intervalli chiusi a sinistra ed aperti a destra;
c) topologia degli intervalli illimitati a sinistra;
b) topologia di Fréchet.

- 3) Data la curva nello spazio

$$\alpha(t) = (t^2, t^3 - 1, 1 + at), \quad t \in \mathbb{R},$$

- a) stabilire per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la curva è un'**elica**.
 - b) Assegnato ad a il **mimimo** tra i valori trovati nel punto precedente, calcolare la lunghezza dell'arco di curva compresa tra i punti $P_0(0, -1, 1)$ e $P_1(9, 26, -1)$.
 - c) Provare che la lunghezza di un arco di curva non dipende dalla parametrizzazione (regolare) della curva. Dedurre che ogni curva regolare può essere parametrizzata mediante l'ascissa curvilinea.
- 4) Sia M la superficie descritta dalla parametrizzazione locale

$$\varphi(u, v) = (u \cos v, u \sin v, \sin v), \quad (u, v) \in \mathbb{R} \times (0, 2\pi).$$

- a) Dopo aver determinato i punti singolari di M , calcolare la curvatura Gaussiana in un generico punto regolare della superficie e classificare i punti di M .
- b) Trovare le curvatures principali e le direzioni principali di curvatura nel punto $P_0 = \varphi(1, \pi)$.
- c) Definire l'operatore forma in un punto P_0 di una superficie e spiegare perchè la definizione non dipende dalla curva usata per la costruzione. Dare l'esempio di due superfici diverse il cui operatore forma è, in ogni punto, un multiplo dell'endomorfismo identico.

Prova scritta del 13/7/2004 – Versione 1

- 1) a) Enunciare gli assiomi di separazione e provare che, se uno spazio soddisfa agli assiomi T_3 e T_0 , soddisfa anche all'assioma T_2 .
b) Provare che se uno spazio topologico soddisfa all'assioma T_1 ogni suo punto è un chiuso.
c) Dare un esempio di uno spazio che soddisfa all'assioma T_0 , ma non all'assioma T_1 e di uno spazio che soddisfa T_1 , ma non all'assioma T_2 .
d) Provare che ogni spazio metrico soddisfa all'assioma T_1 .
- 2) Introdurre nella retta reale due differenti topologie per le quali la successione $\{\frac{1}{n} : n = 1, 2, 3, \dots\}$ converga ad infiniti punti.
- 3) Data la curva nello spazio

$$\alpha(t) = (-\cos t, \sin(at), \sin t), \quad t \in \mathbb{R},$$

- a) stabilire per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la curva è **piana**. Quali curve si trovano in questo caso? (motivare le risposte)
 - b) Posto $a = 2$, trovare la curvatura e la torsione in un generico punto di α .
 - c) Provare che una curva regolare è piana se e solo se la sua torsione è nulla.
- 4) Sia M la superficie descritta dalla parametrizzazione locale

$$\varphi(u, v) = (\cos u - v \sin u, \sin u + v \cos u, u + v), \quad (u, v) \in (-\pi, \pi) \times \mathbb{R}.$$

- a) Dopo aver determinato i punti singolari di M , calcolare la curvatura Gaussiana in un generico punto regolare della superficie. Di che superficie si tratta?
- b) Trovare la curvatura della sezione normale determinata dal punto $P_0 = \varphi(0, 1)$ e dal versore $\mathbf{u} = \frac{1}{3}(-1, 2, 2)$.
- c) Dare la **definizione** di superficie parametrizzata regolare di \mathbb{R}^3 . Quando e perchè le superfici di livello di una funzione di tre variabili sono superfici regolari? Dare un esempio.

Prova scritta del 13/7/2004 – Versione 2

- 1) a) Enunciare gli assiomi di separazione e provare che, se uno spazio soddisfa agli assiomi T_4 e T_1 , soddisfa anche agli assiomi T_3 e T_0 .
b) Provare che se in uno spazio topologico ogni punto è un chiuso tale spazio soddisfa all'assioma T_1 .
c) Provare che lo spazio topologico $S = \{x, y, z, t\}$, ove sono aperti i sottoinsiemi $S, \emptyset, \{x, y\}, \{x, y, z\}, \{x, y, t\}$, non soddisfa ad alcun assioma di separazione.
d) Provare che, aggiungendo nell'esempio precedente come aperto il sottoinsieme $\{x\}$, si ottiene uno spazio che soddisfa solo all'assioma T_0 .
- 2) Provare che in uno spazio metrico l'insieme di tutti gli intorni rotondi è base di una topologia.
- 3) Data la curva nello spazio

$$\alpha(t) = (\cos(at), \sin t, -\cos t), \quad t \in \mathbb{R},$$

- a) stabilire per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la curva è **piana**. Quali curve si trovano in questo caso? (motivare le risposte)
 - b) Posto $a = 2$, trovare la curvatura e la torsione in un generico punto di α .
 - c) Provare che una curva regolare è piana se e solo se la sua torsione è nulla.
- 4) Sia M la superficie descritta dalla parametrizzazione locale

$$\varphi(u, v) = (\cos v - u \sin v, \sin v + u \cos v, u + v), \quad (u, v) \in \mathbb{R} \times (-\pi, \pi).$$

- a) Dopo aver determinato i punti singolari di M , calcolare la curvatura Gaussiana in un generico punto regolare della superficie. Di che superficie si tratta?
- b) Trovare la curvatura della sezione normale determinata dal punto $P_0 = \varphi(1, 0)$ e dal vettore $\mathbf{u} = \frac{1}{3}(1, -2, -2)$.
- c) Dare la **definizione** di superficie parametrizzata regolare di \mathbb{R}^3 . Quando e perchè le superfici di livello di una funzione di tre variabili sono superfici regolari? Dare un esempio.

Prova scritta del 20/9/2004

- 1) a) Dare la definizione di spazio connesso ed introdurre sulla retta reale \mathbb{R} due topologie (diverse da quella standard) che siano connesse e due topologie che siano sconnesse.
b) Introdotta in \mathbb{R} la topologia standard, provare che ogni intervallo chiuso è connesso.
c) Se in \mathbb{R} si introduce la topologia degli intervalli chiusi a sinistra ed aperti a destra, un intervallo $[a, b]$ con la topologia indotta è connesso o sconnesso? Giustificare la risposta.
d) Dare la definizione di proprietà topologica e provare che la connessione è una proprietà topologica.

2) Provare che, se sulla retta reale \mathbb{R} si introduce la topologia di Fréchet, la funzione $y = \sin x$ non è continua.

3) Data la curva nello spazio

$$\alpha(t) = \left(\frac{t}{2}, \frac{1}{2t}, \frac{\sqrt{2}}{2} \ln t \right), \quad t \in (0, +\infty),$$

- a) trovare la curvatura e la torsione in un generico punto di α . Di che curva si tratta?
- b) Calcolare la lunghezza dell'arco di curva compreso tra i punti $A\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$ e $B\left(1, \frac{1}{4}, \frac{\sqrt{2} \ln 2}{2}\right)$.
- c) Dare la definizione di elica cilindrica. Provare che una curva non piana è un'elica cilindrica se e solo se il rapporto tra curvatura e torsione è costante.

4) Sia M la superficie descritta dalla parametrizzazione locale:

$$\varphi(u, v) = (u + v, u - v, u^2 + v^2), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

- a) Calcolare la curvatura Gaussiana in un generico punto della superficie.
- b) Determinare le curvatures principali e le direzioni principali di curvatura nel punto $P_0 = \varphi(1, 1)$. Trovare la curvatura normale nella direzione del **versore** tangente alla curva $\alpha(t) = \varphi(2t + 3, -t)$ nel punto P_0 .
- c) Dare la **definizione** di curvatura normale in un punto di una superficie regolare e spiegare perché tale nozione è indipendente dalla curva usata per il calcolo. Quali informazioni si possono dedurre dal segno della curvatura Gaussiana? (motivare le risposte).

Prova scritta del 22/11/2004

- 1) a) Dare la definizione di spazio metrico.
b) Dare la definizione di intorno rotondo in uno spazio metrico e provare che la famiglia degli intorni rotondi è base di una topologia (topologia metrica).
- 2) a) Considerati due spazi topologici S_1 ed S_2 , provare che la famiglia

$$\mathcal{A} = \{A_1 \times A_2 \mid A_1 \text{ aperto di } S_1, A_2 \text{ aperto di } S_2\}$$

è base di una topologia (topologia prodotto).

- b) Introdotta sulla retta reale \mathbb{R} due diverse topologie, descrivere ciascuna delle quattro topologie da esse determinate in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
 - c) Introdotta sulla retta reale \mathbb{R} la topologia standard, provare che la corrispondente topologia prodotto in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ coincide con la topologia metrica di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
- 3) Data la curva nello spazio

$$\alpha(t) = \left(\frac{t^5}{5}, \frac{2t^3}{3}, 2t \right), \quad t \in \mathbb{R},$$

- a) trovare la curvatura e la torsione in un generico punto di α . Di che curva si tratta?
 - b) Calcolare la lunghezza dell'arco di curva compreso tra il punto $A = \alpha(-1)$ e l'origine. Scrivere il triedro di Frenet nel punto A .
 - c) Definire il triedro di Frenet in un generico punto di una curva parametrizzata mediante l'*ascissa curvilinea* (spiegando perchè si ottiene una base ortonormale) e *giustificare* le formule di Frenet.
- 4) Sia M la superficie descritta dalla parametrizzazione locale:

$$\varphi(u, v) = \left(u \cos v, u \sin v, \frac{uv^2}{2} \right), \quad (u, v) \in D.$$

- a) Dopo aver determinato D in modo tale che la superficie sia regolare, calcolare la curvatura Gaussiana in un generico punto di M . Di che superficie si tratta?
- b) Determinare le curvatures principali e le direzioni principali di curvatura nel punto $P_0 = \varphi(1, 1)$.
- c) Dare la **definizione** di superficie parametrizzata di \mathbb{R}^3 . Cosa si intende per parametrizzazione regolare? Costruire esplicitamente la parametrizzazione locale della sfera S^2 data dalle *proiezioni stereografiche*.