

# Algebra lineare e Geometria Analitica

## Spazi e sottospazi vettoriali

1. Dire quali dei seguenti insiemi sono sottospazi vettoriali di  $\mathbb{R}^2$ :

$$V_1 = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \leq 0 \}$$

$$V_2 = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - y)(x + y) = 0 \}$$

$$V_3 = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = xy \}.$$

2. Stabilire quali dei seguenti insiemi sono sottospazi di  $\mathbb{R}[x]$ :

$$V_1 = \{ p(x) \in \mathbb{R}[x] : p(1) = 1 \}$$

$$V_2 = \{ p(x) \in \mathbb{R}[x] : p'(0) = 0 \}$$

$$V_3 = \{ p(x) \in \mathbb{R}[x] : p(0) = p'(1) = 0 \}.$$

3. Data una matrice  $A \in M_n(\mathbb{R})$ , dimostrare che l'insieme  $V = \{ X \in M_n(\mathbb{R}) : AX = XA \}$  è un sottospazio di  $M_n(\mathbb{R})$ .

4. Determinare il parametro reale  $k$  in modo che il vettore  $\mathbf{x} = (0, 1, 1, k)$  appartenga al sottospazio generato dai vettori  $\mathbf{u} = (1, 1, 0, 1)$ ,  $\mathbf{v} = (1, 2, 1, 0)$ .

5. Determinare gli eventuali valori del parametro reale  $k$  in corrispondenza dei quali il vettore  $\mathbf{v} = (1, 0, -1, k)$  appartiene al sottospazio  $V = \langle (1, 1, 0, 1), (0, 1, 1, -1) \rangle$ .

6. Determinare il sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^3$  generato dai vettori  $\mathbf{u} = (1, 1, 0)$  e  $\mathbf{v} = (0, 1, 1)$ .

7. Determinare il sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^4$  generato dai vettori  $\mathbf{u} = (1, 0, 1, 0)$ ,  $\mathbf{v} = (1, 1, 0, 0)$ ,  $\mathbf{w} = (0, 0, 1, 1)$ .

8. Determinare il sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}_3[x]$  generato dai polinomi  $p(x) = x^2 + x$  e  $q(x) = x^3 + x^2$ .

9. Mostrare che  $\langle (2, -1, 2) \rangle \subseteq \langle (1, 1, 1), (2, 1, 1) \rangle$ .

10. Mostrare che  $\langle (1, 0, 1), (1, 1, -1) \rangle \subseteq \langle (3, 1, 1), (2, 1, 0), (4, 1, 2) \rangle$ .

11. Determinare la dimensione ed una base del sottospazio vettoriale

$$V = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + 2z = 0, x - y = 0 \}.$$

12. Determinare gli eventuali valori del parametro  $k$  per i quali il sottospazio  $V$  di  $\mathbb{R}^4$  generato dai vettori  $\mathbf{v}_1 = (0, 1, -2, 2)$ ,  $\mathbf{v}_2 = (k, 0, 1, -k)$  e  $\mathbf{v}_3 = (3, 0, 1, 2)$  ha dimensione 2.

13. Determinare, al variare del parametro reale  $k$ , la dimensione del sottospazio di  $\mathbb{R}^4$  generato dai vettori  $\mathbf{u} = (1, 1, 0, k)$ ,  $\mathbf{v} = (1, 0, 0, 1)$ ,  $\mathbf{w} = (k, 1, 1, 1)$ .

14. Determinare la dimensione ed una base dei seguenti sottospazi

$$V_1 = \{ p(x) \in \mathbb{R}_3[x] : p(1) = 0, p'(1) = 0 \}$$

$$V_2 = \{ p(x) \in \mathbb{R}_3[x] : p(1) = p'(1) \}$$

$$V_3 = \left\{ p(x) \in \mathbb{R}_2[x] : \int_0^1 p(x) dx = 0 \right\}.$$

15. Dati i sottospazi  $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$  e  $W = \langle (1, 2, 3), (3, 2, 1) \rangle$ , determinare  $V \cap W$ .

16. Dati i sottospazi  $V = \langle (1, 1, 1), (1, -1, 0) \rangle$  e  $W = \langle (2, 1, 1), (1, 1, 2) \rangle$ , determinare  $V \cap W$ .

17. Dati i sottospazi di  $\mathbb{R}^4$

$$V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y = z + t = 0\}$$

$$W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y + 2z + 2t = x - y + z = 0\}$$

determinare la dimensione di  $V + W$  ed una sua base.

18. Si considerino i seguenti sottospazi di  $\mathbb{R}^4$

$$U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y = y - t = 0\}$$

$$V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + t = y + z = 0\}.$$

Determinare la dimensione dello spazio  $U + V$  ed una sua base.

19. Dati i sottospazi di  $\mathbb{R}^4$

$$V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z = z + t = 0\}$$

$$W = \langle (1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 1) \rangle$$

determinare la dimensione di  $V + W$  ed una sua base.

20. Sia  $V$  il sottospazio di  $\mathbb{R}^4$  generato dai vettori  $\mathbf{v}_1 = (0, 1, 1, 0)$  e  $\mathbf{v}_2 = (2, -1, 0, 1)$ . Sia  $W$  il sottospazio generato dai vettori  $\mathbf{w}_1 = (0, 0, 1, 0)$  e  $\mathbf{w}_2 = (4, 1, 4, 2)$ . Determinare una base di  $V + W$  e la dimensione di  $V \cap W$ .

21. Dati i sottospazi di  $\mathbb{R}^4$

$$U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y = y - t = 0\}$$

$$V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - t = t = 0\}.$$

si determini la dimensione di  $U + V$  e di  $U \cap V$ .

22. Dati i sottospazi

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = x + y + 2z = 0\}$$

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y - z = 0\}$$

si dimostri che  $V \oplus W = \mathbb{R}^3$ .

23. Dati i sottospazi  $V = \langle (1, 1, 0), (0, 1, -1) \rangle$  e  $W = \langle (1, 1, 2) \rangle$  si dimostri che  $V \oplus W = \mathbb{R}^3$ .

24. Dati i sottospazi

$$V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - y + z + t = x + y + z - t = 0\}$$

$$W = \langle (1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1) \rangle$$

si dimostri che la somma di  $V$  e di  $W$  è diretta.

25. Si considerino i seguenti sottospazi vettoriali

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + y - z = 0\}$$

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + z = 0, x + 2y - 3z = 0\}.$$

Mostrare che la somma di  $V$  con  $W$  è diretta e che  $V \oplus W = \mathbb{R}^3$ .

26. Dati i sottospazi di  $\mathbb{R}^4$

$$V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + z = 0, y - t = 0\}$$

$$W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - y = 0, z + t = 0\},$$

determinare la dimensione ed una base per ciascuno dei seguenti sottospazi:  $V$ ,  $W$ ,  $V \cap W$  e  $V + W$ .

27. Si considerino i seguenti sottospazi di  $\mathbb{R}^4$

$$U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - y = 0, y - z = 0\}$$

$$V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + t = 0, z - t = 0\}.$$

Mostrare che la somma di  $U$  con  $V$  è diretta e che coincide con tutto  $\mathbb{R}^4$ . Scrivere poi il vettore  $\mathbf{x} = (1, 2, 1, 3)$  come somma di due vettori  $u \in U$  e  $v \in V$ .

28. Per quali valori del parametro reale  $k$  la somma dei seguenti sottospazi

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y - 3z = 0, 2x - y - z = 0\}$$

$$W_k = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - ky + z = 0\}$$

è diretta e  $V \oplus W_k = \mathbb{R}^3$ ?

29. Si considerino i seguenti sottospazi di  $\mathbb{R}^4$ ,

$$U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : z - kt = x = 0\}$$

$$V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : y + t = kz + x = 0\}.$$

Determinare i valori del parametro reale  $k$  per i quali  $\dim(U + V) = 4$ .

30. Dati i sottospazi di  $\mathbb{R}^4$

$$V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z + t = 0, z - t = 0\}$$

$$W_k = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y + (1 + k)z + (1 - k)t = 0\}$$

determinare  $\dim(V \cap W_k)$  al variare del parametro  $k \in \mathbb{R}$ .

31. Dati i sottospazi di  $\mathbb{R}^4$

$$V_k = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - kt = 0, z = 0\}$$

$$W_k = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : y + t = 0, kx + z = 0\}$$

determinare i valori del parametro reale  $k$  per i quali  $\dim(V_k + W_k) = 3$ .

32. Mostrare che  $V_1 = \{P \in \mathbb{R}_1[x] : P(1) = 0\}$  e  $V_2 = \{P \in \mathbb{R}_1[x] : P(2) = 0\}$  sono sottospazi vettoriali monodimensionali di  $\mathbb{R}_1[x]$  e che  $V_1 \oplus V_2 = \mathbb{R}_1[x]$ .

33. Dati i vettori  $\mathbf{v}_1 = (1, k, k)$ ,  $\mathbf{v}_2 = (k, k, 1)$  e  $\mathbf{v}_3 = (1, 0, 1)$ , con  $k \in \mathbb{R}$ , si considerino i sottospazi  $V_1 = \langle \mathbf{v}_1 \rangle$ ,  $V_2 = \langle \mathbf{v}_2 \rangle$  e  $V_3 = \langle \mathbf{v}_3 \rangle$ . Determinare gli eventuali valori del parametro  $k$  in corrispondenza dei quali la somma dei sottospazi  $V_1, V_2$  e  $V_3$  è diretta.

34. Sia  $\mathcal{S}_n$  l'insieme delle matrici simmetriche di ordine  $n$  e sia  $\mathcal{E}_n$  l'insieme delle matrici emisimmetriche di ordine  $n$ .

(a) Mostrare che  $\mathcal{S}_n$  e  $\mathcal{E}_n$  sono due sottospazi di  $M_n(\mathbb{R})$ .

(b) Determinare  $\dim(\mathcal{S}_n)$  e  $\dim(\mathcal{E}_n)$ .

(c) Mostrare che la somma di  $\mathcal{S}_n$  con  $\mathcal{E}_n$  è diretta e che  $\mathcal{S}_n \oplus \mathcal{E}_n = M_n(\mathbb{R})$ .

35. Siano

$$P = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R} f(-x) = f(x)\}$$

$$D = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R} f(-x) = -f(x)\}$$

rispettivamente l'insieme delle funzioni pari e l'insieme delle funzioni dispari. Mostrare che  $P$  e  $D$  sono sottospazi dello spazio vettoriale  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$  delle funzioni reali di variabile reale e mostrare che  $P \oplus D = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ .

36. Siano  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$  tre vettori di uno spazio vettoriale  $V$ . Dimostrare che  $\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{v} + \mathbf{w}, \mathbf{u} + \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$ .

37. Siano  $X$  ed  $Y$  due sottospazi di  $\mathbb{R}^5$  entrambi di dimensione 3. Dire se la somma di  $X$  e di  $Y$  può essere diretta.