

Esercizi di algebra lineare

1. Determinare un vettore $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ parallelo ad $\mathbf{a} = (1, 0, 1)$ e di lunghezza uguale a quella di $\mathbf{b} = (0, -1, 2)$.
2. Determinare i vettori $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ la cui proiezione sul piano xy è $\mathbf{w} = (1, 0, 2)$ e tali che $\|\mathbf{v}\| = 3$.
3. Determinare il vettore \mathbf{w} dato dalla proiezione ortogonale di $\mathbf{v} = (1, 0, 2)$ sul vettore $\mathbf{u} = (0, 1, 1)$.
4. Dati i vettori $\mathbf{a} = (1, 1, 2)$ e $\mathbf{b} = (0, 1, -1)$ di \mathbb{R}^3 determinare un vettore $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ di lunghezza unitaria ortogonale sia ad \mathbf{a} sia a \mathbf{b} .
5. Determinare tutti i vettori $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ tali che $\mathbf{a} \wedge \mathbf{x} = \mathbf{b}$, dove $\mathbf{a} = (1, 0, -1)$ e $\mathbf{b} = (1, -2, 1)$.
6. Calcolare il volume del parallelepipedo determinato dai vettori $\mathbf{u} = (1, -1, 1)$, $\mathbf{v} = (-1, 0, 1)$ e $\mathbf{w} = (0, 1, 2)$.
7. Dire se i vettori $\mathbf{v}_1 = (1, -1, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (0, 1, -1)$ e $\mathbf{v}_3 = (2, 3, -1)$ sono linearmente dipendenti o indipendenti.
8. Dire se i vettori $\mathbf{v}_1 = (1, -1, 2, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (-1, 2, -1, 0)$, $\mathbf{v}_3 = (3, -1, 1, 0)$ e $\mathbf{v}_4 = (1, 0, 0, 1)$ sono linearmente dipendenti o indipendenti.
9. Scrivere il vettore $\mathbf{x} = (1, 1, 1)$ come combinazione lineare dei vettori $\mathbf{a} = (1, 0, 1)$, $\mathbf{b} = (0, -1, 1)$ e $\mathbf{c} = (2, 0, -1)$. sono linearmente dipendenti o indipendenti.
10. Tre vettori a due a due linearmente indipendenti sono necessariamente linearmente indipendenti?
11. Siano \mathbf{a} , \mathbf{b} e \mathbf{c} tre vettori linearmente indipendenti. Stabilire se i vettori $\mathbf{u} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$, $\mathbf{v} = \mathbf{a} + \mathbf{c}$ e $\mathbf{w} = \mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c}$ sono anch'essi linearmente indipendenti.
12. Dimostrare che per ogni vettore $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ si ha

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = 2\|\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{y}\|^2.$$

Interpretare geometricamente la precedente identità.

13. Dire se il prodotto vettoriale in \mathbb{R}^3 è associativo.
14. Dimostrare che per ogni vettore $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^3$ si ha $\mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} \wedge \mathbf{z}) = \mathbf{y} \cdot (\mathbf{z} \wedge \mathbf{x})$.
15. Sia $A \in M_3(\mathbb{R})$ emisimmetrica. Dimostrare che esiste un vettore $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ tale che per ogni vettore $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ si ha $A\mathbf{x} = \mathbf{v} \wedge \mathbf{x}$.
16. Sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$. Dimostrare che esistono due vettori non nulli \mathbf{x} e \mathbf{y} tali che $A = \mathbf{x}\mathbf{y}_T$ se e solo se $r(A) = 1$.

17. Stabilire se le seguenti matrici sono linearmente indipendenti:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

18. Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$ una matrice con $|A| \neq 0$. Siano $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$ k vettori linearmente indipendenti. Dimostrare che anche $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ sono linearmente indipendenti.

19. Si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \bar{\alpha} \\ \bar{\alpha} & \alpha \end{bmatrix}$$

dove $\alpha \in \mathbb{C}$. Mostrare che A^2 è una matrice a coefficienti reali.

20. Determinare tutte le matrici $X \in M_2(\mathbb{R})$ tali che $AXB = X$, dove

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

21. Determinare tutte le matrici A non singolari tali che $AA^T A^{-1} = I$.

22. Siano A e B due matrici invertibili. Calcolare l'inversa di $C = 3AB$.

23. Siano $A, B, C \in M_n(\mathbb{K})$ con A e C non singolari. Determinare le matrici $X, Y \in M_n(\mathbb{K})$ tali che

$$\begin{cases} AX = B \\ XB = YC \end{cases}$$

24. Siano $A, B, C \in M_n(\mathbb{K})$ tre matrici invertibili. Determinare le matrici $X, Y \in M_n(\mathbb{K})$ tali che

$$\begin{cases} AXB = C \\ BXAYC = A \end{cases}$$

25. Se $AA^T = BA$ cosa si può dire di $|A|$?

26. Siano $A, B \in M_n(\mathbb{K})$. Dimostrare che se A è simmetrica allora anche BAB^T lo è.

27. Il prodotto di due matrici simmetriche è ancora una matrice simmetrica?

28. Dimostrare che se A , B e C sono matrici simmetriche allora anche $AB + BA$ e $ABC + ACB + BAC + BCA + CAB + CBA$ sono matrici simmetriche.

29. Determinare x , y e z in modo che la matrice $A = BC$ sia emisimmetrica (ossia $A_T = -A$), dove

$$B = \begin{bmatrix} 1 & x & y \\ y & z & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

30. Determinare tutti gli eventuali scalari $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tali che $|\lambda A + \mu B| = \lambda|A| + \mu|B|$, dove

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

31. Calcolare i seguenti determinanti

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & \mathbf{i} & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \mathbf{i} \\ \mathbf{i} & 1 & 0 & 1 \\ 1 & \mathbf{i} & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

32. Determinare $x \in \mathbb{R}$ in modo che

$$\begin{vmatrix} 1 & x & 1 \\ x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix} = 1.$$

33. Sia α un numero complesso con $\Re\alpha = 1$ e $|\alpha| = 2$. Calcolare il determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \bar{\alpha} \\ \bar{\alpha} & 1 & \alpha \\ \alpha & \bar{\alpha} & 1 \end{vmatrix}$$

34. Calcolare il seguente determinante sapendo che r ed s sono le radici del polinomio $x^2 - 5x + 8$:

$$\begin{vmatrix} r & 1 & s \\ 1 & s & r \\ s & r & 1 \end{vmatrix}$$

35. Scrivere la matrice aggiunta della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

36. Determinare le matrici inverse delle matrici

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{i} & 1 \\ \mathbf{i} & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3\mathbf{i} & 5 & 6 + 7\mathbf{i} \\ 4 + 2\mathbf{i} & 1 + \mathbf{i} & 3 - 5\mathbf{i} \\ 3 & 2 - \mathbf{i} & 6 + \mathbf{i} \end{bmatrix}$$

37. Determinare tutte le matrici $A \in M_n(\mathbb{K})$ tali che $A^{-1} = A^*$.

38. Calcolare il rango delle seguenti matrici al variare del parametro reale k .

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & k & 1 \\ k & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & k \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3-k \\ k & 0 & 2k-1 \\ 1+k & k & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1+k & 2k-1 \\ 1 & 1 & 1 \\ k+1 & 3k-2 & 2-k \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & k & 1 \\ k & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & k & 1 \\ 0 & k & k+1 & 1 \\ 0 & 2 & k+1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{bmatrix}$$

39. Determinare il polinomio $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tale che $f(1) = 1$, $f(-1) = 0$, $f'(0) = 1$ e $f'(1) = 0$.

40. Determinare i polinomi $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tali che $xf'(x) - f(x) = 2x^3 - x^2 + 1$ e $f(1) = 1$.

41. Determinare tre numeri reali A , B e C tali che

$$\frac{1}{(x-1)^2(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-2}.$$

42. Discutere, e dove possibile risolvere, i seguenti sistemi al variare del parametro reale k .

$$\begin{cases} x+y = k \\ x-y = 3 \\ x+ky = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x+y-z = 2+k \\ x-ky+kz = 1 \end{cases}$$

43. Discutere i seguenti sistemi al variare del parametro (reale o complesso) k .

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & k \\ 1 & 2 & k & 1 \\ 1 & k & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1+k & 1-k & 1 \\ 1-k & 1 & 1+k & 1+k \\ 1+k & 1-k & 1 & 1-k \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} k & -1 & 3i-1 & 0 \\ 0 & k-i & k-i & 9 \\ 1 & i & 3+i & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & k & k & 1 \\ 1 & k & 1 & k & 1 \\ k & 1 & k & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

44. Determinare i parametri $a, b \in \mathbb{R}$ in modo che il seguente sistema abbia infinite soluzioni:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 7 \\ 3 & 1 & -5 & b \\ -1 & a & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

45. Si consideri un sistema lineare di m equazioni in n incognite che possiede esattamente ∞^1 soluzioni. Dire se è possibile che $m \leq n - 2$.

46. Sia $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ un sistema lineare di m equazioni in n incognite con $r(A) = m$. Cosa si può dire del numero delle soluzioni?