

Algebra Lineare e Geometria Analitica

Seconda prova di autovalutazione

30 Ottobre 2003

1. Date le matrici

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

dimostrare che l'insieme

$$V = \{ X \in M_2(\mathbb{R}) : AX + BX^T = O \}$$

è un sottospazio vettoriale di $M_2(\mathbb{R})$. Determinare poi la dimensione ed una base di V .

2. Stabilire, al variare del parametro reale k , la dimensione del sottospazio di \mathbb{R}^4 generato dai vettori $(1, 0, k, 1)$, $(0, 1, k+3, k+1)$ e $(1, 1, k+1, 1)$.

3. Dati i sottospazi di \mathbb{R}^4

$$V = \{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + 2y = z - 3t = 0 \}$$

$$W = \{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - 2t = y + t = 0 \}$$

stabilire per quali valori di k si ha

- (a) $\mathbf{x} = (1, k, 0, 1) \in V + W$;
(b) $\mathbf{y} = (k + 2, -k, 2k + 2, 2) \in V \cap W$.

4. Si considerino i sottospazi di \mathbb{R}^4

$$V = \{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z = y + z + 2t = 0 \}$$

$$W = \{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + ky + kt = x - z = 0 \}.$$

- (a) Determinare una base di V ed estenderla ad una base di \mathbb{R}^4 .
(b) Determinare, al variare del parametro reale k , la dimensione di $V + W$ e di $V \cap W$.

5. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 7. Siano X ed Y due sottospazi di V tali che X abbia dimensione 3, $X \cap Y$ abbia dimensione 1 e $X + Y = V$. Determinare la dimensione di Y .

Tempo: 2 ore

Punteggio: 6 punti per ciascun esercizio