Istituto di Istruzione Superiore ‘G.Veronese’ – Chioggia

Progetto ‘Olimpiadi della Matematica’

Lezione del 30/01/2006

La lezione è centrata sull’analisi delle conoscenze disciplinari e delle tecniche risolutive necessarie per affrontare i problemi proposti ai Giochi di Febbraio delle Olimpiadi della Matematica per il biennio e il triennio.
In fase di progettazione sono stati analizzati i problemi degli anni 2002, 2003 e 2004 al fine di individuare le tipologie di esercizi, i temi ricorrenti e le principali strategie di soluzione utilizzate. Sono stati inoltre selezionati alcuni esercizi significativi presentati agli studenti durante la lezione.
Infine sono state riepilogate le principali conoscenze richieste, relative al programma del biennio ma indispensabili anche per affrontare gli esercizi proposti nella gara riservata al triennio.

Introduzione

Consigli, suggerimenti, idee..

‘Risolvere problemi è un’arte pratica, come nuotare, sciare o suonare il piano: potete impararlo solo con l’imitazione e la pratica. […] Se desiderate imparare a nuotare dovete gettarvi in acqua e se desiderate diventare un risolutore di problemi, dovete risolvere problemi. […] Se desiderate ricavare il massimo profitto dal vostro sforzo, state attenti a quei lineamenti del problema che possono diventare utili nel trattare i problemi futuri. Una soluzione che sia stata ottenuta col vostro sforzo ovvero una che avete letto o della quale avete sentito parlare, ma che avete seguito con reale interesse e buona penetrazione, può diventare per voi uno schema, un modello che potrete imitare vantaggiosamente nel risolvere problemi simili.’ G. Polya.

- Risolvere i problemi proposti nelle edizioni degli anni precedenti
- Leggere le soluzioni solo dopo essersi sforzati di risolvere gli esercizi da soli
- Capire che errori sono stati commessi (calcolo, interpretazione, procedimento, idee di fondo,…)
- Tenere traccia delle conoscenze richieste dal problema, rivederle, approfondirle.

Tipologie di esercizi – Biennio e Triennio

Alcuni problemi, delle prime due tipologie, sono proposti ad entrambe le categorie (Biennio e Triennio); gli altri differiscono leggermente per complessità, ma quasi tutti richiedono conoscenze che si acquisiscono al biennio.

- 10 **esercizi a scelta multipla** (5 punti se risposta corretta, 1 punto se risposta non data, 0 punti se risposta errata)

Per affrontare questi problemi sono richieste spesso conoscenze elementari e una buona dose di intuizione. Tali problemi sono analoghi a quelli proposti ai Giochi di Archimede. Vedere lezione del 7/11/2005.

- 4 (5 Triennio) **esercizi numerici** (8 punti se risposta corretta, 1 punto se risposta non data, 0 punti se risposta errata).

Questi quesiti non sono diversi dai precedenti, solo che non sono offerte alternative di soluzione. In tali esercizi è dunque fondamentale prestare attenzione ai calcoli, alle rappresentazioni grafiche, all’interpretazione del testo, perché in questi esercizi la sola cosa che conta è il risultato (contrariamente agli esercizi di natura dimostrativa).
Esempio n 14, 2004 (esercizio interessante anche per la scomposizione dei polinomi). Evitare superficialità nella lettura del testo (numeri positivi significa non nulli e non negativi).
Esempio n 11, 2004 (esercizio di geometria piana): attenzione al disegno.

- 1 (2 Triennio) **esercizio dimostrativo.** (da 0 a 12 punti)

In questi esercizi bisogna eseguire una dimostrazione corretta e argomentata; vengono valutate anche dimostrazioni parziali o incomplete. Si consiglia di:

- Stabilire le caratteristiche degli oggetti con cui si lavora: gli insiemi di appartenenza (interi, positivi,…), numeri pari (2n) dispari (2n-1), multipli (km), potenze (m^n)…(vedi es 15 2002)
- Eseguire dimostrazione nei casi base (n = 0, 1, 2…)
- Tentare, se possibile, di ridurre il numero di parametri
- Utilizzare euristiche

- Metodo di induzione (verifico il caso base, n=0 o n=1, mostro che se la tesi vale per n allora essa vale per n+1, concludo che è vera ∀ n)

Esercizi dimostrativi

I passi fondamentali per risolvere un problema

1. *L'identificazione del problema.*
2. *La definizione e la rappresentazione del problema.*
3. *La formulazione di una strategia.* Una volta che il problema è stato rappresentato in modo tale da consentire delle operazioni, il passaggio successivo consiste nella pianificazione di una strategia di soluzione. Tale strategia implica un'analisi, ossia la scomposizione del problema complesso in più parti, e una sintesi, strategia complementare alla precedente che ricompone in modo utile i diversi elementi. In associazione a queste strategie, un'altra coppia di azioni cognitive è rappresentata dal pensiero divergente, che tenta di generare il maggior numero di alternative possibili al problema, e dal pensiero convergente, che dovrebbe orientare verso la strategia più adeguata e che permette una verifica.
4. *L'organizzazione delle informazioni.* Una volta definite le strategie di soluzione, è necessario organizzare e riorganizzare le informazioni allo scopo di costruire un quadro su cui applicare le strategie formulate.
5. *L'allocazione delle risorse.* Impiegare un po' di tempo per decidere come risolvere un problema consente di evitare di partire con il piede sbagliato, evitando di entrare in vicolo ciechi.
6. *Il monitoraggio dell'attività in corso.* I buoni solutori di problemi non aspettano di arrivare alla fine del proprio lavoro per controllare dove ha portato, ma lo fanno cammin facendo, con verifiche frequenti per decidere se effettivamente si stanno avvicinando all'obiettivo.
7. *La valutazione.* E' la fase finale necessaria per stabilire se la soluzione trovata ha centrato l'obiettivo.

Euristiche

A differenza dei computer la mente umana non riesce a eseguire tutte le possibili computazioni e alla stessa velocità. I limiti della nostra memoria di lavoro impongono strategie che utilizzino 'scorciatoie' per risolvere i problemi. Queste **scorciatoie** mentali sono state definite 'euristiche' e sono, essenzialmente, strategie di ricerca di natura speculativa, **intuitive e informali,** di combinazioni di elementi del problema. Sono utilizzate quando la soluzione del problema non è immediatamente visibile.

Esempio di esercizio dimostrativo. (n 15, 2004)

'Dimostrare che ogni numero intero n può essere scritto nella forma $n= a^2+b^2-c^2$, dove a,b,c sono opportuni numeri interi'.

Per risolvere il problema ho seguito questi passi ed ho utilizzato il seguente metodo 'euristico':

- Definire il dominio di a,b,c: sono interi (positivi, negativi, nulli), non necessariamente distinti. Anche n è intero, positivo, negativo o nullo.
- Analisi dei casi più semplici: $0 = a^2+b^2-c^2$ se a,b,c costituiscono una terna pitagorica o se a=b=c=0; 1 = 1+0-0, 2 = 1+1-0, -1= 0+0-1…(Attenzione: ai fini del punteggio viene valutata anche l'analisi di questi semplici casi)
- E poi? Eseguire la dimostrazione per induzione non è così semplice, quindi scelgo un'altra strada. Provo a scrivermi l'elenco di tutti i quadrati dei primi k interi:0,1,4,9,16,25,36,49,64,81,100,121,….Provo a effettuare osservazioni di vario tipo su questa serie di numeri (costruisco somme, differenza tra i successivi o a 'salti',…): mi accorgo che la differenza tra un quadrato e quello che lo precede è sempre un numero dispari, e che ogni numero dispari si può scrivere come la differenza tra due quadrati successivi: 1 = 1-0, 3 = 4-1, 5 = 9-4, ecc. Mi chiedo se ha validità generale: verifico in effetti che: $k^2-(k-1)^2 = 2k-1 = n$; allora

se n è dispari basta scriverlo nella forma 2k-1 e considerare a = k, b = 0, c=k-1. E se n è pari? In tal caso sarà $n = 2k = k^2-(k-1)^2 +1$, ovvero a = k, b = 1, c=k-1.

Conoscenze fondamentali
(tratto in parte da Syllabus UMI)

Algebra elementare, equazioni, disequazioni

- Proprietà delle potenze
- Criteri di divisibilità (per 2, 3, 5, 9), pag 86 [3]
- Scomposizione di numeri interi, multipli, sottomultipli, divisibilità, divisione intera: *ex 16 2004 Triennio*
- Numeri primi (quali sono, che proprietà hanno…), mcm, MCD
- Rappresentazione dei numeri come allineamenti (pag 131 [3]), con virgola, finiti e infiniti (pag 93 [3])
- Prodotti notevoli
- *Scomposizione di polinomi – Trinomio particolare – Ruffini: esercizi 14 2004 biennio (=11 tri) – 10 2004 trennio*
- Equazioni e sistemi di primo grado (vari metodi risolutivi)

- Disuguaglianze, disequazioni e relative regole di calcolo; valore assoluto
- Proprietà dei radicali; operazioni, riduzioni allo stesso indice, razionalizzazione (*es 4 2004 triennio*)
- Equazioni di secondo grado: esistenza delle radici, radici coincidenti (segno del discriminante)
- Relazioni tra radici e coefficienti di un'equazione *(ex 16 2004 Triennio)* $x^2-sx+p=0$
- Legge di annullamento del prodotto (per risoluzione equazioni grado >1)
- Equazione della retta nel piano

Calcolo delle Probabilità e calcolo combinatorio

- **Disposizioni semplici**: dati n oggetti distinti, sono i raggruppamenti che si possono formare con gli elementi dati, in modo ogni raggruppamento ne contenga soltanto k tutti fra loro **distinti** e che due qualunque gruppi differiscano tra loro per qualche elemento o per l'**ordine** in cui sono disposti. (*es 3 2004 triennio*)

  $$D_{n,k}= n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+2)(n-k+1)$$

  Esempio: quante disposizioni di tre palline si possono formare avendone a disposizione 5? (Modellizza il fenomeno di estrazione da un'urna senza reimmissione, in cui sia importante l'ordine di estrazione)
- **Disposizioni con ripetizione**: se i raggruppamenti contengono k elementi non necessariamente distinti allora le disposizioni sono n^k. Esempio: se l'estrazione prevede reimmissione allora, nel caso precedente, ho 5^3 disposizioni con ripetizione (per ogni estrazione ho 5 scelte)
- **Permutazioni semplici** di n oggetti distinti, sono tutti i raggruppamenti che si possono formare in modo che ognuno contenga tutti gli n oggetti e differisca dagli altri solo per l'ordine in cui sono disposti gli oggetti.

  $$P_n= D_{n,n}= n!=n(n-1)\ldots 3\ 2\ 1$$

  Esempio: quanti numeri di tre cifre si possono formare con le cifre 1, 3, 5?
- **Combinazioni semplici** di n oggetti semplici presi k a k tutti i gruppi che si possono formare con k degli n oggetti in modo che i gruppi differiscano tra loro per almeno un oggetto. Non vi sono ripetizioni e **non conta l'ordine**.

  $$C_{n,k}= P_n/D_{n,k}$$

  $C_{n,k}$ è il coefficiente binomiale 'n su k'. (*esercizio 5 triennio 2004)*,rappresentano il numero di sottoinsiemi di k elementi scelti in un insieme di n elementi.

- Definizione classica di **probabilità:** la probabilità di un evento è data dal rapporto tra casi favorevoli e casi possibili
- **Probabilità totale:** Se un fenomeno si può verificare in tanti modi diversi ma tali che il verificarsi di uno qualunque di essi escluda tutti gli altri la sua probabilità si dice totale ed è uguale alla somma delle probabilità dei singoli eventi in cui esso si può presentare (purché gli eventi parziali siano incompatibili): esempio . *esercizio 5 triennio 2004*
- **Probabilità composta** : se un fenomeno è tale che si considera accaduto solo quando sono accaduti simultaneamente o successivamente due o più eventi esso si dice composto e così pure la sua probabilità, che è uguale al prodotto delle probabilità degli eventi semplici (purché essi siano indipendenti)

Geometria euclidea

1. Angoli opposti al vertice sono congruenti.
2. Triangoli:
   - 3 criteri di congruenza
   - Proprietà del triangolo isoscele e equilatero.
   - Proprietà dei triangoli:
     - la somma di due angoli interni è minore di un angolo piatto

    - ogni lato è minore della somma degli altri due e maggiore della loro differenza (in ogni poligono ogni lato è minore della somma di tutti gli altri)
3. Proprietà delle parallele tagliate da trasversale (due rette sono parallele se e solo se tagliate da trasversale formano angoli alterni (interni o esterni) o corrispondenti congruenti o coniugati supplementari).
    - Applicazioni ai triangoli: la somma degli angoli interni è 180° (quadrilatero 360°, poligono convesso di n lati 180(n-2); se il poligono è regolare ogni angolo misura 180(n-2)/n)
    - Congruenza dei triangoli rettangoli
4. Parallelogramma: proprietà caratteristiche (lati paralleli, lati opposti congruenti, angoli opposti congruenti, angoli adiacenti a ciascun lato supplementari, diagonali con lo stesso punto medio; una coppia di lati opposti paralleli e congruenti)
    - Rettangolo (4 angoli retti ⇔ diagonali congruenti)
    - Rombo (4 lati congruenti ⇔ diagonali ortogonali ⇔ bisettrici degli angoli)
    - Quadrato (quadrilatero equilatero e equiangolo)
    - Trapezio (2 lati opposti paralleli)

5. Circonferenza
    - Per tre punti passa una e una sola circonferenza
    - Corde congruenti sono equidistanti dal centro
    - Posizioni reciproche retta-circonferenza, circonferenza-circonferenza
    - Ogni angolo al centro è doppio del corrispondente angolo alla circonferenza.
    - Ogni angolo (triangolo) inscritto in una semicirconferenza è retto (rettangolo)
    - Teorema delle tangenti
    - Punti notevoli di un triangolo e loro proprietà
    - Il baricentro divide ogni mediana in due segmenti di cui quello contenente il vertice è doppio dell'altro.
6. Poligoni inscritti e circoscritti
    - CNS affinché un quadrilatero convesso sia inscrivibile in una circonferenza è che esso abbia 2 angoli opposti supplementari. Il centro della circonferenza è il punto di incontro degli assi dei lati.
    - CNS affinché un quadrilatero sia circoscrittibile ad una circonferenza è che le somme dei lati opposti siano congruenti. Il centro della circonferenza è il punto di incontro delle bisettrici
7. Teoremi di Euclide (1° e 2°)
   Teorema di Pitagora
8. Teorema di Talete: un fascio di rette parallele determina su due trasversali due insiemi di segmenti direttamente proporzionali (i due triangoli sono simili)
    - Conseguenza: la parallela ad un lato di un triangolo divide gli altri due lati in parti proporzionali.
9. Triangoli simili; Criteri di similitudine dei triangoli(due angoli, congruenti; un angolo congruente e due lati proporzionali; 3 lati proporzionali); proporzionalità tra lati omologhi e perimetri, lati omologhi e altezze; aree proporzionali ai quadrati di due lati omologhi qualsiasi
10. Aree, perimetri, volumi
    - Area e perimetro delle principali figure piane (triangolo, rettangolo, trapezio, parallelogrammo, rombo)
    - Formula di Erone: $S=\sqrt{[p(p-a)(p-b)(p-c)]}$
    - Cerchio e circonferenza; lunghezza dell'arco di circonferenza; area del settore circolare; area del segmento circolare.
    - Superficie e volume dei principali solidi

Materiali utilizzati e suggeriti

- Testi e soluzioni delle Gare di Febbraio – Olimpiadi della Matematica, gara Biennio e Triennio, anni 2002, 2003, 2004.
- Syllabus di Matematica – Conoscenze e capacità – Unione Matematica Italiana
- Uso di riga e compasso

Bibliografia

[1] George Polya 'La scoperta matematica' – Ed Feltrinelli
[2] R.De Beni, F.Pazzaglia 'Psicologia cognitiva e dell'apprendimento' – Ed. Erickson
[3] Dodero, Baroncini, Manfredi 'Lineamenti di matematica - Biennio', Ghisetti e Corvi, vol 1 e 2.

Sitografia

http://olimpiadi.ing.unipi.it