Carlo Demichelis

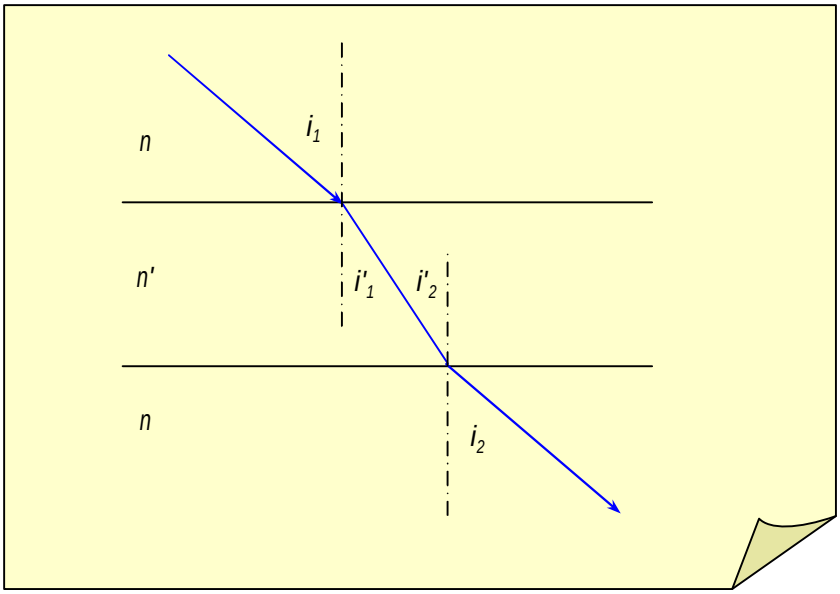
Nòte ‘d n’arsercador an pension, da pijé coma material diletantistich sòcià al pòst “web” amatorial

http://digilander.libero.it/dotor43

Fìsica Sperimental

Acùstica - Òtica geométrica

Quarta session



Pàgina lassà veuida apòsta

Presentassion e avertense për la letura

Coma për la prima la sconda e la tersa session, andova i l'oma vist la mecànica dij còrp sòlid, cola dij flùid e la termodinàmica, ëdcò për costa session ëd Fìsica Sperimental a valo le avertense che i l'oma fàit ambelelà. I arpetoma che, beleché l'autor a sia un fìsich e a l'abia fàit l'arsercador tuta soa vita ëd travaj, vist che a l'é mai stàit sò mesté ël mostré a l'Università, tut ël material arportà ambelessì a venta che a sia pijà coma **diletantistich**.

An efét ste nòte a son sempe sòcià al pòst "web" (an italian a-j diso "sito") amatorial, e pròpi mach amatorial, *http://digilander.libero.it/dotor43* ëd l'autor (vis-a-di: mi).

Sì i vardoma doe costion, Acùstica e Òtica geométrica, sempe con ël sòlit but.

Ëdcò për costa part i foma donca 'l sòlit travaj.

TÀULA GENERAL DLE PART

- **Part 1: Acùstica - Prinsìpi fisich. -** An costa part as pàrla dle studi dle vibrassion, dle onde e relatìva propagassion, second un modél matemàtich ch'i l'oma già vist ant la prima e ant la sconda session. I parloma d'equassion d'Eulero, d'onde pian-e e d'onde sfériche.
- **Part 2: Acùstica - Propagassion dël son. -** An costa part i comensoma a vardé le misure an sël son e a definì l'unità 'd misura "décibel". Peui i passoma a vardé la trasmission dël son, an particolar cand l'onda ch'as propaga a traversa na surfassa d'interfacia fra doi mojen diferent (arbatiment e rifrassion dël son). Peui as varda lòn ch'a càpita cand ël son a treuva d'ostàcoj (diffrassion e dispersion). Dòp i parloma d'interferensa 'd doi son, batiment e onde stassionarie (dont i l'oma già dit quaicòs). A la fin i disoma quaicòs an sla scomposission dël son e la série 'd Fourier.
- **Part 3: Acustica - Generassion e ricession dël son. -** An costa part i doma n'uciada a com ël son a ven generà, sensa andé tròp an question elétriche (che i vëddroma ant na session apòsta). Sòn a lassa parlé 'd vos e 'd mùsica, timber dla vos e timber djë strument musicaj, le nòte, com a fonsion-e l'orìja, l'audiograma, e via fòrt. I giontoma quaicòs an sla diressionalità d'un generator e d'un ricevitor..
- **Part 1: Òtica geométrica - Le lèj. -** An costa part i doma n'uciada a còs a l'é la lus, quaj ch'a son ij parameter ch'a la carateriso (unità 'd misura) e quale ch'a son le lèj fondamentàj che a régolo la propagassion dla lus. I vardoma 'd nen dovré tròp ij concét dl'òtica ondulatòria, che i tratroma da n'àutra part. Arbariment e arfrassion a son ij fenòmeno che pì an anterésso. I parloma 'dcò dël prinsìpi 'd Fermat e i foma n'acénn al prinsìpi ëd Huygens, che i arpijroma peui a la fin ëd costa session d'òtica.. Peui i parloma 'ncora dj'element òtich (vis-a-dì ij prisma, e ij diòtr arbatent e arfrangent). An fin i foma na cita ciaciarada an sla difusion dla lus e ij color..
- **Part 2: Òtica geométrica - Ji sistema òtich. -** An costa part i comensoma a parlé 'd lent, e an particolar dl'aprossimassion dla "lent sutila". I vardoma peui cos a l'é un sistema òtich e sò model geométrich. I vardoma j'angrandiment e la formassion dj'imàgin an cola che as dis "aprossimassion ëd Gauss". Dòp avèj vist ij sistema con feu, i vardoma ij sistema afocaj ò telescòpich. Peui i tratoma d'aberassion dij sistema òtich reaj. A la fin i disoma quaicòs an sle fìbre òtiche.
- **Part 3: Òtica geométrica - Jë srtument òtich, le matriss. -** An costa part is ocupoma prima 'd com a fonsion-a l'euj e peui i vardoma 'l fonsionament da na mira dl'òrica geométrica, dle lent, ij microscòpi, ij canuciaj, ij telescòpi, j'obietiv fotogràfich e ij projetor. Tut sòn, coma sempe, sensa andé tròp ant l'ancreus. I disoma peui quaicòs an sla arpresentassion dle proprietà dij sistema òtich dovrand le "matris ëd trasferiment" dij ragg, che dle vire a arzulto esse motobi còmode. Coma esempi 'd matris i comensoma a acené a l'arsonador òtich che i artrovroma ant la part "eletrònica" a propòsit dij laser.
- **Part 4: Introdussion a l'òtica fisica -** An costa part i parloma d'onde eletromagnétiche e an particolar ëd cole luminose. I vardoma la polarisassion dj'onde e cos i voroma d' con coerensa arferìa a j'onde luminose. Peui i vardoma l'prinsipi 'd Huygens-Fresnel, l'interferensa dj'onde luminose e la difrassion, andova i vëddroma ij lìmit d'aplicassion dl'òtica geométrica. Tuta sta part a l'è giusta n'introdussion. I androma pì ant l'ancreus ant la session dedicà a j'onde eletromagnériche, che i vëddroma dòp la session d'eletricità e magnetism. A la fin i giontoma quaicòs an sl'arpresentassion dj'onde e an sle aprossimassion che a ven-o fàite. Si a ven bin parlé un pòch dla trasmission dj'onde travers element òtich.
- **Part 5: Òtica dij fass -** An costa part i parloma dij fass ëd lus fàit da ragg parassiaj. I doma giusta quàich idèja che a vnirà a taj cand i parleroma 'd laser. Is limitoma a parlé dël fass gaussian, e sòn an nòstr but a basta.

Part un - Acùstica - Prinsìpi fìsich

An costa part as pàrla dle studi dle vibrassion, dle onde e relatìva propagassion, second un modél matemàtich ch'i l'oma già vist ant la prima e ant la sconda session. I parloma d'equassion d'Eulero, d'onde pian-e e d'onde sfériche.

TÀULA DLA PRIMA PART

Le vibrassion 3
Moviment armònich e vibrassion 3
Ossilassion nen smortà 3
Ossilassion smortà 4
Ossilassion forsà 5
Arsonansa 6
Vibrassion ëd còrde 7
Vibrassion longitudinal d'àste 9
Le onde dël son 13
Equassion general dj'onde dël son 13
Equassion d'Eulero 13
Equassion ëd continuità 14
Equassion dë stat 15
Equassion ëd l'onda 16
Onde pian-e 16
Arsonansa 'd colòne d'ària. 19
Tubo sarà ai doi estrem 19
Tubo duvert ai doi estrem 20
Tubo duvert a n'estrem e sarà a l'àutr 21
Element dl'onda dël son pian-a 21
Intensità dël son 22
Densità d'energìa 23
Potensa dël son 24
Impedensa 24
Onde sfériche 25
Element dl'onda dël son sférica 28
Intensità dël son 29
Densità d'energìa 29
Impedensa 30

TÀULA DLE FIGURE DLA PRIMA PART

Figura 1 - Ossilator armònich 3
Figura 2 - Ossilassion smortà 4
Figura 3 - Arsonansa 7
Figura 4 - Vibrassion ëd na còrda 8
Figura 5 - Vibrassion longitudinaj ant na bara elàstica 9
Figura 6 - Vibrassion longitudinaj ëd na bara lìbera 11
Figura 7 - Equassion d'Eulero 13
Figura 8 - Onda pian-a ant na colòna d'ària 17
Figura 9 - Arsonansa ant un tubo sarà ai doi estrem 19
Figura 10 - Arsonansa ant un tubo duvert ai doi estrem 20
Figura 11 - Arsonansa ant un tubo duvert a n'estrem e sarà a l'àutr 21
Figura 12 - Coordinà sféricheh 26

LE VIBRASSION

L'Acùstica a trata dla generassion, la propagassion e la ricession dël son. An general ël son a l'é fàit da onde elàstiche mecàniche che a peulo esse ant l'interval ëd frequense andova l'orìja dl'òm a l'é sensìbil, ma che a peulo 'dcò avèj frequense pì basse, òpura frequense pì àute (ant l'órdin, infrason e ultrason).

Ëdcò 'l mojen andova 'l son as propaga a peul esse diferent da l'ària, coma pr'esempi aqua, lìquid an general e sòlid. A propòsit ëd propagassion për onde i l'oma già vist quaicòs an mecànica dij sòlid e an cola dij flùid. Sì i arpijoma 'l discors an manera orientà, an particolar, al son ch'as propaga ant l'ària, al produve e sente 'l son.

A l'é sens'àutr da ten-e present lòn ch'i l'oma dit a propòsit dle vibrassion. Tut sòn as treuva ant la part ses dla prima session ëd coste nòte. Quaicòs i l'oma dit ëdcò a propòsit d'elastissità ant la part doi dla session doi, e peui ant la part set dl'istéssa session. A venta 'dcò ten-e present j'equassion dël moviment d'un flùid. Sì i vardoma la còsa da na mira un pòch diferenta. I arciamoma, macassìa, e i arpetoma ij concét ëd base.

Moviment armònich e vibrassion

Ël modél ël pì sempi 'd moviment armònich a l'é col ëd na massa an echilìbri fra sò pèis e la reassion ëd n'arsòrt ch'a lo ten sù. Sto sistema a l'ha na posission d'echilìbri andova la tension dl'arsort a compensa 'l pèis dla massa. Se la massa a ven spostà da costa posission e peui lassà 'ndé, a comensa a ossilé antorna a costa posission d'echilìbri, dal moment che l'arsòrt a svilupa na fòrsa adissional che a tira a arporté la massa ant la posission d'echilìbri. An general a venta 'dcò ten-e cont ëd na resistensa che as opon al moviment e che i podoma supon-e proporsional a la velocità dël moviment midem. Sto tìpo d'ossilator a l'é ilustrà an figura 1.

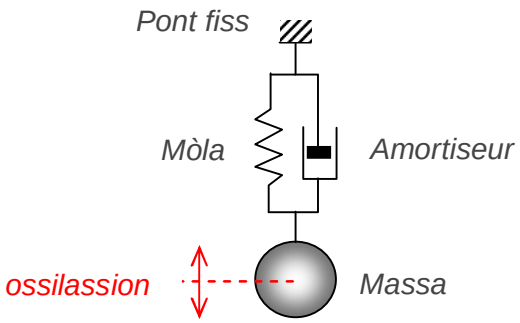


Figura 1 - Ossilator armònich

Se i voroma scrive l'equassion dël moviment dël barissenter dla massa m, i consideroma che a l'echilìbri la posission dël barissenter a peul esse pijà coma zero ëd n'ass vertical y, e che an costa posission la tension dl'arsòrt a compensa 'l pèis $m \cdot g$ ëd nòstra massa m. Se la massa a ven spostà an vertical, e i suponoma che a sia sbassà, l'arsòrt a aumenta soa tension : a l'ha na deformassion y e a svilùpa na reassion $\boldsymbol{f_a}$ che as opn a lë spostament, che a l'é proporsional a lë spostament midem: $\boldsymbol{f_a} = -k \cdot y$.

Ossilassion nen smortà

Për adéss i podoma nen consideré le resistense passìve e dì che ant ògni moment la derivà dla quantità 'd moviment dla massa rispét al temp a venta ch'a sia ugual a costa fòrsa. Donca:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\cdot m = -k\cdot y \quad \text{opura} \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{-k}{m}\cdot y \quad \text{opura 'ncora} \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{k}{m}\cdot y = 0$$

Costa a l'é l'equassion diferensial dël moviment ch'i l'oma suponù. Se i butoma che $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ (le dimension ëd ω a son [rad/sec] vis-a-dì na velocità angolar) st'equassion a l'ha coma solussion la forma : $y(t) = A\,sen\,\omega t + B\cos\omega t$

St'arzultà a peul ëdcò esse butà ant la forma :

$$y(t) = \sqrt{A^2 + B^2}\; sen\left(\omega t + \theta\right) \quad \text{opura} \quad y(t) = \sqrt{A^2 + B^2}\; cos\left(\omega t - \phi\right)$$

andova A, B a son costant d'integrassion coma θ e ϕ che a son j'angoj ëd fase inissiaj.

Com i l'avìo già vist ant la prima session, i arpetoma, giusta për nen dësmentiélo, che un moviment periòdich a l'é caraterisà da na frequensa f (ossilassion ant un second), dàita da $f = \omega / 2\pi$. L'unità 'd misura për la ferquensa a l'é ël *Hertz* (*Hz*).

Ossilassion smortà

Sensa fòrse 'd dissipassion ste ossilassion periòdiche a contìnuo a l'anfinì. Le fòrse 'd dissipassion, che a-i son sempe, an figura a son arpresentà da l'amortiseur, che a antroduv un termo proporsional a la velocità e ch'as opon a costa.

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\cdot m = -r\frac{\partial y}{\partial t} - k\cdot y \quad \text{opura} \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{h}{m}\cdot\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{r}{m}\cdot y = 0$$

e se i butoma $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ e $2\delta = \frac{r}{m}$ i otnoma

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 2\cdot\delta\cdot\frac{\partial y}{\partial t} + \omega^2\cdot y = 0$$

Ël risultà dl'integrassion dë st'equassion diferensial a dipend dal valor dle costant ω^2, δ, che a son sempe positive, (δ a ven ciamà coeficent dë smortament) e a-i son ij tre cas:

Për $\delta < \omega$ $\quad x = e^{-\delta\cdot t}\cdot A\cdot\cos\left(\alpha\cdot t + \vartheta\right)$ andova $\alpha = \sqrt{\omega^2 - \delta^2}$

Për $\delta = \omega$ $\quad x = e^{-\delta\cdot t}\cdot\left(A + B\cdot t\right)$

Për $\delta > \omega$ $\quad x = e^{-\delta\cdot t}\cdot\left(A\cdot e^{\beta\cdot t} + B\cdot e^{-\beta\cdot t}\right)$ andova $\beta = \sqrt{\delta^2 - \omega^2}$

Introma nen ant la tecnica ëd solussion dl'equassion (ch'as varda la session dj'utiss matemàtich), ma i arportoma an figura 2 ij tipo ëd grafich che as oten-o ant ij tre cas.

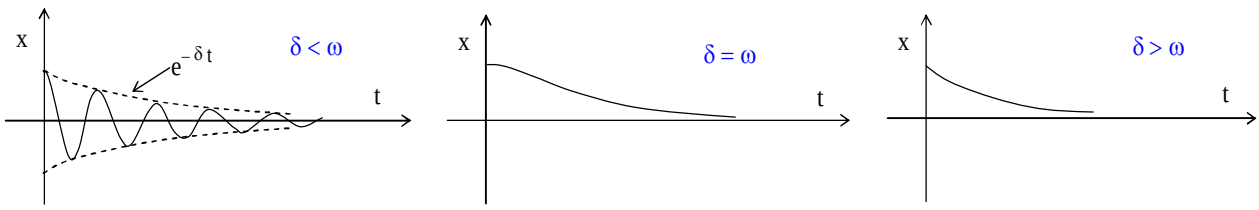


Figura 2 - Ossilassion smortà

Mach ant ël prim cas a-i é ancora n'ossilassion, ma as peul nen disse che a sia periòdica. A-i è un interval ëd temp *T* costant për ël passagi dal pont d'echilibri ant la stessa diression, ma a sto pont la velocità a diminuiss vira për vira. L'interval *T* a l'é pì long ëd col che a sarìa stabilì mach da massa e coeficent elàstich. Ël massim dl'ossilssion a diminuiss, a ògni ciclo, an manera esponensial con ël temp.

As vëdd che l'ampiëssa a cala coma $e^{-\delta t}$ e ël temp fra un passagi e l'àutr da la posission d'echilibri a l'é:

$$T = \frac{2 \cdot \pi}{\sqrt{\omega^2 - \delta^2}} \quad \text{anvece che} \quad T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega}$$

Sto temp a ven ancora ciamà "***period***" e a l'é pì longh ëd col che i l'avrìo sensa smortament. Cand $\delta = \omega$ as vëdd che T a perd so significà e donca 'l moviment a l'é pì nen periòdich.

Ossilassion forsà

Suponoma adess un sistema elàstich real che daspërchiél a sarìa un sistema ossilant smortà, coma col che i l'oma già vist prima. A sto sistema aplicoma na fòrsa, për adéss generica, ***f(t)***. An costa manera l'equassion che a dëscriv ël moviment dël sistema a dventa:

$$m \cdot \ddot{x} + r \cdot \dot{x} + k \cdot x = f(t)$$

che a peul esse scrivùa, con le posission viste fin-a sì, coma:

$$\ddot{x} + 2 \cdot \delta \cdot \dot{x} + \omega^2 \cdot x = f(t)$$

La solussion ëd costa equassion diferensial, che a l'é nen omogenia, a l'é dël tipo $x = x_0 + x_1$ andova x_0 a l'é l'integral general dl'equassion omogenia (cola che as oten butand $f(t) = 0$), e x_1 al'è n'integral particolar qualonque dl'equassion completa (vardé le nòte 'd matemàtica). Ël termo x_0 a arpresenta l'ossilassion lìbera smortà dël sistema. I l'oma già vistla e notoma che sto termo, dòp un period inissial, a va a zero e a anfluiss pì nen.

Për ël termo x_1 i notoma che a l'é d'anteresse cand la fòrsa *f(t)* aplicà a l'é armònica, vis-a-dì dël tipo $f(t) = F \cdot \cos(\Omega \cdot t)$. Se i butoma $\Phi = \frac{F}{m}$, l'equassion a dventa:

$$\ddot{x} + 2 \cdot \delta \cdot \dot{x} + k \cdot x = \Phi \cdot \cos(\Omega \cdot t)$$

La solussion general ëd costa equassion a l'é dël tipo:

$$x = x_0 + x_1 = A_0 \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \cos(a \cdot t + \delta) + A \cdot \cos(\Omega \cdot t - \vartheta)$$

$$\text{i notoma an ciàir che } x_1 = A \cdot \cos(\Omega \cdot t - \vartheta)$$

Se i consideroma l'equassion a regim, vis-a-dì dòp un temp a basta long da podèj consideré ël prim termo dlë scond member bastansa davzin a zero da pì nen anfluì, a basta stabilì ël valor d'*A* e ëd θ për arzolve nòstr problema.

Për trové sti valor i consideroma che x_1 a venta che a sia solussion dl'equassion $x = x_0 + x_1$ e, dal moment che:

$$\dot{x}_1 = -\Omega \cdot A \cdot \sin(\Omega \cdot t - \vartheta) \quad \text{e} \quad \ddot{x}_1 = -\Omega^2 \cdot A \cdot \cos(\Omega \cdot t - \vartheta)$$

i podoma scrive che:

$$-\Omega^2 A\cdot\cos(\Omega\cdot t-\vartheta)-2\cdot\delta\cdot\Omega\cdot A\cdot\sin(\Omega\cdot t-\vartheta)+\omega^2\cdot A\cdot\cos(\Omega\cdot t-\vartheta)=\Phi\cdot\cos(\Omega\cdot t)$$

e cheuijend a fator comun:

$$\left(\omega^2-\Omega^2\right)\cdot A\cdot\cos(\Omega\cdot t-\vartheta)-2\cdot\delta\cdot\Omega\cdot A\cdot\sin(\Omega\cdot t-\vartheta)=\Phi\cdot\cos(\Omega\cdot t)$$

Costa espression a venta che a sia sodisfàita për ògni valor ëd *t*, e an particolar: për $\Omega\cdot t-\vartheta=0$ a dventa:

$$\left(\omega^2-\Omega^2\right)\cdot A=\Phi\cdot\cos\vartheta$$

për $\Omega\cdot t-\vartheta=\frac{\pi}{2}$ a dventa:

$$-2\cdot\delta\cdot\Omega\cdot A=-\Phi\cdot\sin\vartheta$$

Da coste espression as arcava, sensa fé tuti ij passagi:

$$A^2=\frac{\Phi^2}{\left(\omega^2-\Omega^2\right)^2+4\cdot\delta^2\cdot\Omega^2}\quad;\quad\tan\vartheta=\frac{2\cdot\delta\cdot\Omega}{\omega^2-\Omega^2}$$

A sta mira arcordoma che $\delta=\frac{r}{m}$ andova *r* a l'é ël coeficent dël termo ëd resistensa passiva. Arcordoma ëdcò che ω a l'é la pulsassion natural dël sistema e Ω a l'é la pulsassion dla fòrsa esterna.

Arsonansa

As vëdd da l'espression dl'ampiëssa dl'ossilassion a regim, che se Ω a dventa istess a ω, ël denominator a l'ha un valor minim, e donca l'ampiëssa a l'é massima. A stabilì st'ampiëssa però, a concor ëdcò ël fator d'ësmortament δ.

Vardoma da na mira analìtica còs a suced. Pijand l'espression dl'ampiëssa, i podoma prima divide numerator e donominator për ω^4. As oten:

$$A^2=\frac{\frac{\Phi^2}{\omega^4}}{\frac{\omega^4}{\omega^4}-\frac{2\cdot\omega^2\cdot\Omega^2}{\omega^4}+\frac{\Omega^4}{\omega^4}+\frac{4\cdot\delta^2\cdot\Omega^2}{\omega^4}}$$

Se adess i butoma $q=\frac{\Omega^2}{\omega^2}$ e $\psi=\frac{\delta}{\omega}$ as oten:

$$A^2=\frac{\Phi^2/\omega^4}{1-2\cdot q+q^4+4\cdot\psi^2\cdot q^2}=\frac{\Phi^2/\omega^4}{\left(1-q^2\right)^2+4\cdot\psi^2\cdot q^2}$$

Tnima cont che nòstra variabil a l'é Ω, e për trové ël massim d'*A* i sercoma ël minim dël denominator. Derivand rispét a *q* e ugualiand a zero as oten un minim për:

$$q=\sqrt{1-2\cdot\psi^2}$$

Sòn a dis che nen sempe un massim a-i é. An efet, përchè a-i sia un massim ant ël camp real, a venta che l'espression sota radis a sia nen negativa. A venta donca che a sia $\psi^2 < 0{,}5$. Sòn a veul dì che le resistense passive a venta nen che a sio tròp grosse.

Se $\psi^2 > 0{,}5$, l'ampiëssa a diminuiss an manera costanta con ël chërse dla frequensa dla fòrsa esterna (dàit sperimental) mentre se $\psi^2 = 0{,}5$ antlora l'ampiëssa as manten motobin costanta fin-a a $\Omega = \omega$, e peui a comensa a calé.

Pì cit a l'é lë smortament, pì àuta a l'é l'ampiëssa massima. An teorìa, se a-i fussa nen d'autut dë smortament, për qualonque intensità ëd fòrsa, l'ampiëssa massima a tirerìa a andé a l'anfinì.

La condission ëd frequensa che a pòrta a l'ampiëssa massima a ven dita ***arsonansa***.

Se i vardoma cos a fa la fase dl'ossilassion rispét a cola dla fòrsa esterna, i vëddoma che, an condission d'arsonansa le doe ossilassion a son sempe an quadratura, vis-a-dì che a l'han na diferensa ëd fase ugual a π/2. Për frequense forsà pì basse ëd cola d'arsonansa la fase a tira vers zero, për frequense pì àute a tira a vnì ugual a π. Pì la resistensa a l'é cita, pì la fase a varia ampressa ant l'antorn dl'arsonansa, coma as peul vëdde an figura 3, andova a ven mostrà, an fonsion dla frequensa "*d'ecitassion*", ampiëssa e fase con ψ pijà coma parameter. La figura a l'é mach andicativa.

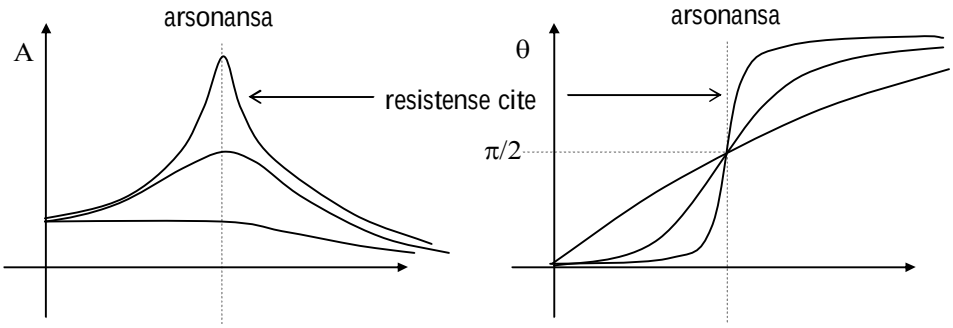


Figura 3 - Arsonansa

Vibrassion ëd còrde

I arpijoma sto sogét da na mira un pòch diferenta rispét a lòn ch'i l'oma vist ant la prima session. I suponoma d'avèj na còrda fissà ai doi cavion, con na dàita longhëssa L, na dàita tension $\boldsymbol{\tau}$ e na dàita massa për unità 'd longhëssa ρ. I suponoma che la tension $\boldsymbol{\tau}$ a resta costanta durant ël moviment (che i suponoma sempe cit). La corda a ven portà fòra da soa posission d'echilìbri e peui lassà vibré sensa fòrse da fòra. Is arferima a figura 4.

An figura a l'é arpresentà un segment anfinitésim dx dla còrda, ant la genérica posission x, che a l'avrà na massa $dm = \rho \cdot dx$. I suponoma che 'l moviment a sia mach arlongh la diression dl'ass y vertical, e i scrivoma cola ch'a deuv esse l'equassion për ël moviment ëd cost segment. La tangent a la curva fàita da nòstra còrda an x a fà l'angol β, mentre an $x + dx$ l'angol formà da la tangent a l'é α. Le fòrse verticaj dàite da la tension $\boldsymbol{\tau}$ (fòrsa për unità 'd surfassa [N / m^2]) dla còrda a saran antlora $-sen\,\beta \cdot \boldsymbol{\tau}$ e $sen\,\alpha \cdot \boldsymbol{\tau}$.

L'equassion diferensial dël moviment a ven da la lèj ëd Newton $\boldsymbol{F} = m \cdot \boldsymbol{a}$, che an nòstr cas a dventa:

$$-\tau \cdot \sin\beta + \tau \cdot \sin\alpha = \rho \cdot dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

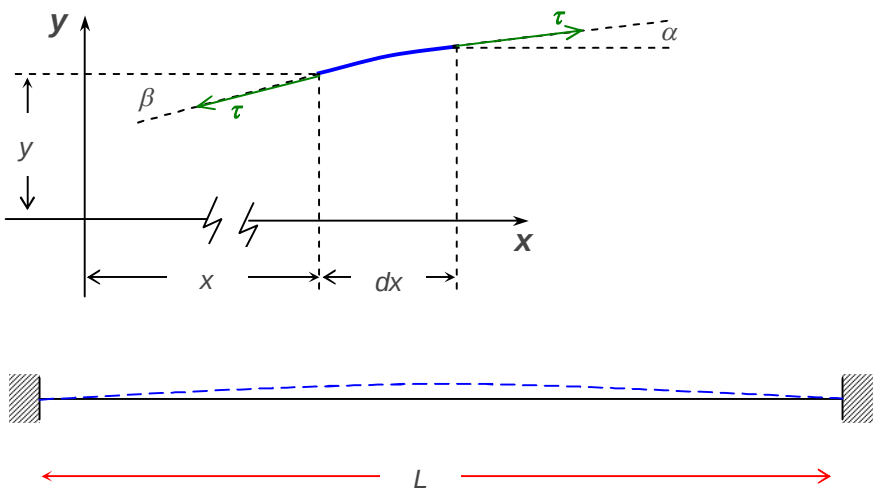


Figura 4 - Vibrassion ëd na còrda

Adéss i consideroma che jë spostament a son supòst cit, e donca i l'oma che $\sin\alpha \cong tg\,\alpha$ e 'dcò che $\sin\beta \cong tg\,\beta$. Peui i notoma che : $\left[\frac{\partial y}{\partial x}\right]_{x=x} = tg\,\beta$ e che $\left[\frac{\partial y}{\partial x}\right]_{x=x+dx} = tg\,\alpha$.

A sta mira nòstra equassion a dventa :

$$\rho \cdot dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\tau}{\rho} \frac{\left[\frac{\partial y}{\partial x}\right]_{x+dx} - \left[\frac{\partial y}{\partial x}\right]_{x}}{dx}$$

L'espression a lë scond member, gavà 'l fator τ/ρ, a l'é nen d'àutr che 'l raport incremental ëd $\frac{\partial y}{\partial x}$ e donca, për dx che a tend a zero, a l'é la derivà sconda $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$. L'equassion a dventa:

$$\rho \cdot dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\tau}{\rho} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

che a l'é l'equassion dl'onda. St'equassion a peul esse arzolvùa con ël sistema dla separassion dle variàbij , dël tipo $y(x,t) = X(x) \cdot T(t)$. I podoma peui ciamé $a = \sqrt{\frac{\tau}{\rho}}$. I l'avroma donca:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = T \cdot \frac{d^2 X}{dx^2} \quad ; \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = X \cdot \frac{d^2 T}{dt^2}$$

e a sta mira nòstra equassion a dventa:

$$X \frac{d^2 T}{dt^2} = a^2 T \frac{d^2 X}{dx^2} \quad \text{e, separand le variàbij,} \quad \frac{\frac{d^2 T}{dt^2}}{T} = a^2 \frac{\frac{d^2 X}{dx^2}}{X}$$

Dal moment che X e T a son andipendente l'un-a da l'àutra e che l'espression a val për tute le x e tuti ij t, a venta che ij doi member a sio uguaj a l'istessa costant, che për comodità i ciamoma $-p^2$. i l'oma antlora le doe equassion:

$$\frac{d^2T}{dt^2} + p^2 T = 0 \quad ; \quad \frac{d^2X}{dx^2} + \frac{p^2}{a^2} X = 0$$

Da coste equassion i arcavoma (vardé le nòte 'd matamàtica) le fonsion *X(x)* e *T(t)* che i podoma dovré an nòstra equassion ëd partensa. I otnoma:

$$y(x,t) = \left(A \sin \frac{p\,x}{a} + B \cos \frac{p\,x}{a} \right) \cdot \left(C \sin pt + D \cos pt \right)$$

Se i consideroma le condission al contorn che a diso che la còrda a l'é fissà ai doi cavion, i l'avroma che $y(0, t) = 0$ e che $y(L, t) = 0$. Da coste condission i arcavoma :

$$0 = B \cdot \left(C \sin pt + D \cos pt \right) \quad ; \quad 0 = A \sin \frac{p\,L}{a} \left(C \sin pt + D \cos pt \right)$$

La costant *B* a l'é donca sens'àutr zero, la costant *A* a peul nen esse zero, dësnò la còrda a sarìa fërma, e donca a venta che a sia : $\sin \frac{p\,L}{a} = 0$.

Da cost'ùltima espression i arcavoma che a son solussion tute cole che a rendo sodisfàita costa espression, donca cole che a l'han $p = n \cdot \pi \frac{a}{L}$. An costa espression *a* e *L* a son paràmeter dla còrda e *n* a l'é un nùmer antrégn qualonque. I l'oma donca un nùmer anfinì 'd solussion che a corispondo ai valor $p_n = n \cdot \pi \frac{a}{L}$, con *n* che a và da *1* a l'anfinì. Për ël valor *1* i l'oma la frequensa ò nòta fondamental dla còrda, mentre j'àutri valor a dan j'armòniche che a stabilìsso 'l tìmber dla nòta (sòn i lo vëddroma dòp). L'equassion general a dventa:

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin \frac{n \pi x}{L} \right) \left(C_n \sin p_n t + D_n \cos p_n t \right)$$

con C_n e D_n costant che a dipendo da ampiëssa e fase inissiaj.

Vibrassion longitudinal d'àste

I suponoma adéss n'àsta con na dàita longhëssa *L*, na dàita session trasversal *A* e un dàit mòdul d'elastissità *E*. I suponoma che l'àsta a sia séde 'd na përturbassion longitudinal, antrodovùa, pr'esempi da na martlà a na dàita mira su un dij doi estrem. Is arferima a figura 5.

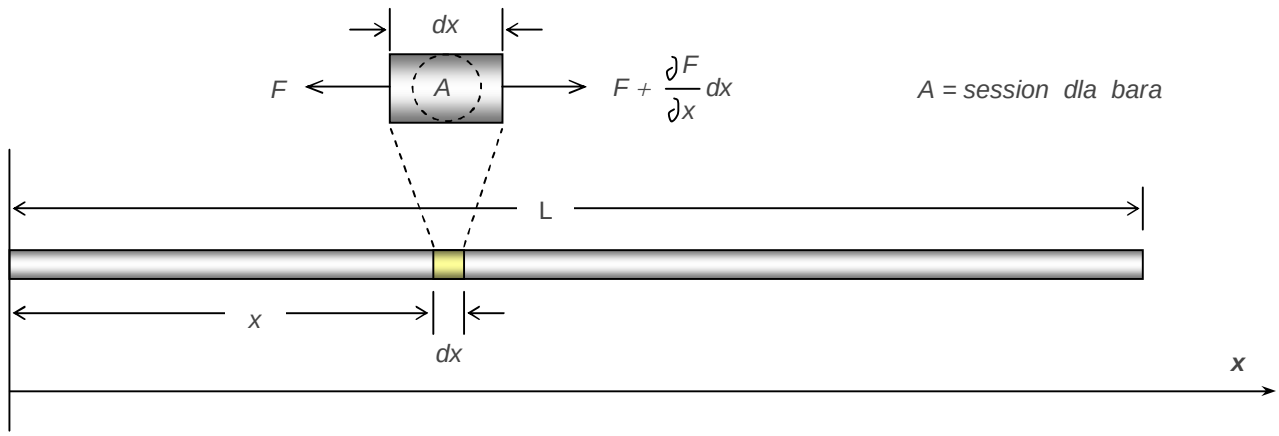


Figura 5 - Vibrassion longitudinaj ant na bara elàstica

I l'oma già vist ant la prima session, part set la propagassion ëd n'impuls longitudinal ant na bara e i l'oma vist cola ch'a l'é la velocità 'd propagassion ëd n'impuls. Sì i arportoma lòn ch'i l'avio dit ambelelà, giusta për avèjlo sotman.

Se i procuroma n'urt longitudinal a na ponta dla sbara, aplicand na fòrsa *F* (valor medi) për un temp *Δt* (motobin cit),sota l'assion dla fòrsa na cita porsion dla sbara a ven comprimùa. La pression provocà an sla surfassa da l'urt, a viagia ant la sbara a na dàita velocità, e, ant ël temp *Δt* che la fòrsa a agiss, a riva a anteressé na part *Δl* dla sbara. Ciamoma *c* la velocità ëd propagassion, për adéss nen conossùa. I voroma mach fé noté che sì i stoma ipotisand un comportament bin diferent da col ëd na sbara an teorìa rèida.

Donca i l'oma n'impuls $i = F \cdot \Delta t$ che ant ël temp *Δt* a anteressa la longhëssa $\Delta l = c \cdot \Delta t$. Sta part dla sbara a l'ha na massa $\Delta m = c \cdot \Delta t \cdot A \cdot \rho$

Sto tràit dë sbara, sota l'assion dla fòrsa *F* a patiss na deformassion (as ëscursa) ëd *Δx*. Second lòn che i l'oma vist a propòsit ëd deformassion elàstiche, *Δx* a val

$$\Delta x = \frac{1}{E} \cdot \Delta l \cdot \frac{F}{A} \quad \text{andova} \quad E = \text{mòdul d'elastissità a trassion (an } N/m^2\text{)}$$

Dòp ël temp *Δt* la porsion comprimùa a aplica l'istess impuls a la part dla sbara che a ven dòp. Sta part a patiss l'istess process. Donca l'impuls as propaga ant la sbara con na velocità *c*.

Da na mira dinàmica a suced che la massa $\Delta m = c \cdot \Delta t \cdot S \cdot \rho$ as ëspòsta ëd *Δx* sota l'assion dla fòrsa *F*, con na velocità dàita da $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ e donca la variassion ëd quantità ëd moviment a venta che a sia ugual a l'impuls arsevù, vis-a-dì:

$$\Delta m \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} = F \cdot \Delta t$$

e i consideroma ëdcò che la velocità ëd propagassion a l'é $c = \frac{\Delta l}{\Delta t}$

Se i foma tute le sostitussion i rivoma a la fin a scrive:

$$c \cdot \Delta t \cdot S \cdot \rho \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta l} \cdot E \cdot A \cdot \Delta t \quad ; \quad c \cdot \rho = \frac{\Delta t}{\Delta l} \cdot E \quad ; \quad c \cdot \rho = \frac{E}{c}$$

e donca $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$

La velocità ëd propagassion a dipend parèj mach da le carateristiche dël material, an particolar da soa densità e sò mòdul d'elastissità.

Sì i vardoma che, coma për la còrda ch'i l'oma vist prima, la bara a l'ha 'd soe frequense d'osilassion. I studioma donca che moviment a peulo stabillise ant la bara.

Ëdcò anbelessì i ciamoma *u* lë spostament ëd n'element anfinitésim *dx* dla bara ant na posission *x* qualonque. I ciamoma "***deformassion*** $\boldsymbol{\varepsilon_x}$" ant ël pont *x* ël rapòrt $\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$. La bara a l'é elàstica e i disoma *E* sò mòdul d'elastissità. Lë sfòrs σ_x ant ël pont *x* a sarà donca $\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x$, e la fòrsa 'd tension F_x dla bara ant la session an *x* (ëd surfassa *A*) a sarà : $F_x = \int_A \sigma_x \, dA = E\,A \frac{\partial u}{\partial x}$.

Se i consideroma l'element ëd bara anfinitésim longh *dx*, i podoma d' che an sla surfassa A_x an posission *x*, la fòrsa 'd tension che a agiss a l'é –*F*, mentre an sla surfassa A_{x+dx} an posission *x* + *dx*, la fòrsa che a agiss a l'é $F_{x+1} = F_x + \frac{\partial F}{\partial x} dx$. I scrivoma antlora che la fòrsa total a deuv esse ugual a la massa për l'acelerassion:

$$F_x + \frac{\partial F}{\partial x} dx - F_x = \rho A dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

andova $\rho A\, dx$ a l'é la massa dl'element ëd bara. Se i butoma che $a = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ (velocità 'd propagassion) e i foma la sostitussion, i otnoma :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

pròpi coma prima, ma adéss i l'oma che *u* a l'é lë spostament longitudinal dla session dla bara ant ël pont *x* e peui che $a = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$, con *E* mòdul d'elastissità dla bara e ρ soa densità.

Për arzolve st'equassion i dovroma un sistema dël tipo 'd col dovrà për la còrda 'd prima. I pijoma na solussion dël tipo : *u(x, t) = X(x) T(t)*. La forma a l'é l'istessa 'd cola 'd prima, e donca 'dcò la solussion general ëd costa equassiona l'é dël tipo :

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos p_n t + B_n \sin p_n t\right) \cdot \left(C_n \cos \frac{p_n}{a} x + D_n \sin \frac{p_n}{a} x\right)$$

An costa espression A_n e B_n a son costant che as determino second le condission al contorn, C_n e D_n as determino second le condission inissiaj e p_n a son le pulsassion ($\omega = 2\pi f$) pròprie dël sistema. Le condission al contorn a podrìo esse : Bara lìbera ai doi estrem, Bara fissà ai doi estrem, Bara fissà a n'estrem e lìbera a l'àutr.

I podoma fé n'esempi 'd na bara lìbera ai doi estrem, com a podrìa esse cola an figura 6, sospèisa a doi fij sutij, che a cambio gnente an nòstr problema.

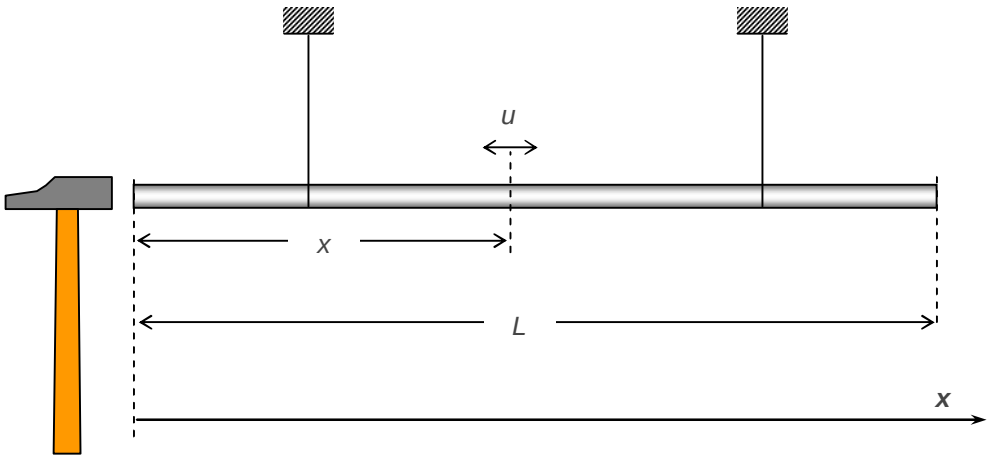


Figura 6 - Vibrassion longitudinaj ëd na bara lìbera

Gavà l'ùrt inissial che a pròvoca la përturbassion, an coste condission i l'oma che le fòrse ch'as esèrcito a j'estrem dla bara a son zero. I l'avroma donca che :

$$\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right]_{x=0} = 0 \quad ; \quad \left[\frac{\partial u}{\partial x}\right]_{x=L} = 0$$

Se i sostituima la prima condission ant la solussion general i podoma arcavé che për qualonque *n* a l'é :

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = 0 = \frac{D_n\, p_n}{a}\left(A_n \cos p_n t + B_n \sin p_n t\right) \quad \text{e da sì} \quad D_n = 0$$

La sconda condission a pòrta a:

$$\frac{\partial u(L,t)}{\partial x} = 0 = -\frac{C_n\, p_n}{a} \cdot \sin\frac{p_n\, L}{a}\left(A_n \cos p_n t + B_n \sin p_n t\right)$$

e dal moment che Cn a peul nen esse sempe zero (dësnò a-i sarìa nen moviment), antlora a venta ch'a sia $\sin\left(\frac{p_n\, L}{a}\right) = 0$ për qualonque p_n.

Da costa condission, coma prima, i podoma arcavé le frequense che la bara a-j vibra ansima. A son cole che a sodisfo a l'ugualiansa $p_n = \frac{n\pi a}{L}$. La vibrassion a l'ha donca coma lèj :

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos\frac{n\pi x}{L}\left(A_n \cos p_n t + B_n \sin p_n t\right)$$

I arcordoma che i l'oma fàit l'ipòtesi d'onde longitudinaj, ma ant ij sòlid (e ant ij flùid viscos), dal moment che a peulo essie fòrse 'd taj, a peulo essie 'dcò onde trasversaj che a fan lë studi motobin complicà. Sì jë vardoma nen.

LE ONDE DËL SON

I l'oma vist prima d'esempi 'd vibrassion ëd còrp sòlid. Adéss is ocupoma d'onde sonòre e vibrassion ant un gas coma l'ària e, an general, ant un flùid. Ëdcò për sòn i arpijroma quaicòs ëd lòn ch'i l'oma già dit ant la prima session, part set.

Adéss i partoma da na mira un pòch diferenta. I consideroma un procéss ëd propagassion andova la viscosità dël mojen a peussa esse trascura (flùid përfét) e i dovroma le equassion fondamentaj dij flùid (equassion d'Eulero, ëd continuità e l'equassion dë stat). Sensa la përturbassion sonora ël mojen (che da sì anans i ciamroma giusta "aria") a l'avrà d'element ëd volum $dV = dx\, dy\, dz$ (arferì a na trien-a cartesian-a) con na dàita densità ρ_0, na dàita pression p_0, na dàita temperatura T_0 e 'dcò na dàita velocità $\boldsymbol{v_0}$ (che a podrìa 'dcò esse ugual a zero). I consideroma che, andrinta al volumet dV, sti parameter a son j'istéss për ògni pont.

Sì i arpijoma lòn ch'i l'oma vist a propòsit d'elastissità e dël moviment dij flùid (sconda session ëd coste nòte).

Equassion general dj'onde dël son

I comensoma a arcavé st'equassion ant ël cas ël pì general, e peui i vardroma pì an particolar le onde pian-e e le onde sfériche. Për fé sòn, com i l'oma dit, is arfoma a j'equassion fondamentaj dij flùid (e, an general, dij materiaj elàstich).

Equassion d'Eulero

A esprimo, për ij flùid, la sconda lèj ëd Newton, che a dis che la fòrsa che a agiss an 's na massa a pròvoca n'acelerassion proporsional a la fòrsa midema e a la massa. ($\boldsymbol{F} = m \cdot \boldsymbol{a}$).

I consideroma 'l volumet ëd flùid ch'i l'oma anmaginà sì dzora, e che sì i ciamoma V_0, e i pensoma a soa massa $\rho \cdot V_0$. Con p i ciamoma la "***pression sonòra***", vis-a-dì la pression total p_t meno la pression d'arpòs p_0. I suponoma che costa pression a chërsa ant la diression dl'ass x, còsa che a lìmita gnente.

I suponoma donca che a-i sia, an costa diression, un gradient ëd pression $\frac{\partial p}{\partial x}$. Is arferima a figura 7.

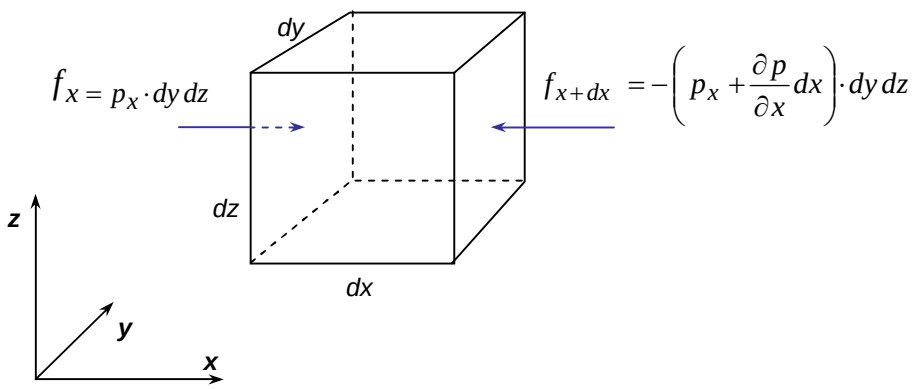


Figura 7 - Equassion d'Eulero

I consideroma le doe face dël volumet normaj a la diression ***x*** (le face *dy dz*) e i notoma che la diferensa 'd pression fra coste doe face a l'é nen d'àutr che $\frac{\partial p}{\partial x} dx$. D'àutra part la surfassa 'd coste face a l'é dàita da *dy · dz*, e donca la fòrsa che a agiss an sël volumet an diression *x* a sarà:

$$\varphi_x = f_x - f_{x+dx} = -\frac{\partial p}{\partial x} dx\,dy\,dz = -\frac{\partial p}{\partial x} V_0$$

Se adéss i ciamoma u_x la component dla velocità dla partìcola arlongh l'ass *x*, dal moment che ρ a l'é la densità (massa për unità 'd volum) dël flùid, i podoma scrive l'espression dla massa për l'acelerassion coma $\rho V_0 \frac{du_x}{dt}$ e, ugualiand le doe espression i l'oma :

$$-\frac{\partial p}{\partial x} V_0 = \rho \frac{du_x}{dt} V_0 \quad \text{vis - a - dì} \quad \frac{\partial p}{\partial x} = -\rho \frac{du_x}{dt}$$

Adéss a ventrìa ten-e cont che la velocità a l'é nen mach fonsion dël temp, ma a peul esse 'dcò fonsion dla coordinà *x*, e donca i l'avrìo che : $\frac{du_x}{dt} = \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x}$. A venta però ten-e cont che 'l termo $u_x \frac{\partial u_x}{\partial x}$ a l'é motobin cit e donca a peul esse trascurà (la variassion ant ël temp a l'é motobin pì gròssa dla variassion ant lë spassi). La derivà total a peul donca esse sustituìa da la derivà parsial.

Se i arfoma l'istéss rasonament për le diression ***y*** e ***z***, a la fin i otnoma le tre equassion scalar: $\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho_0 \frac{du_x}{dt}$; $\frac{\partial p}{\partial y} = -\rho_0 \frac{du_y}{dt}$; $\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho_0 \frac{du_z}{dt}$. I l'oma butà ρ_0 al pòst ëd ρ përchè i l'oma suponù 'd podèj consideré la densità costanta, còsa che a arzulta 'd sòlit giusta.

I podoma scrive ste tre equassion ant n'ùnica forma vetorial che a l'é:

$$-\,grad\ p = \rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$$

Equassion ëd continuità

La fòrsa che a agiss su nòstr volumet, (che sì i antendoma coma "partìcola") a pròvoca në spostament dle fàce dël volumèt midem. Se i consideroma la diression dl'ass *x* sto spostament a anteressa le doe face paraléle *dy dz*. Donca a-i sarà 'd massa che a intra ant ël volumet e 'd massa che a seurt. Ël prinsìpi 'd continuità a dis che la diferensa dla massa che a intra e che a seurt a venta che a corisponda a la variassion ëd massa andrinta al volumet.

I ciamoma donca s jë spostament dle face, che a l'é diferent fra le doe face paralele. A-i é donca un gradient $\frac{\partial s}{\partial x}$ dlë spostament arlongh l'ass x e për la massa che a intra e che a seurt i podoma scrive la diferensa:

$$\rho s_x\, dy\, dz - \rho\left(s_x + \frac{\partial s}{\partial x} dx\right) dy\, dz = \rho \frac{\partial s_x}{\partial x} dx\, dy\, dz$$

I notoma peui che l'istéss rasonament a peul esse fàit për j'àutre doe diression, e a la fin as oten col che a l'é 'l fluss total ëd massa Φ_x travers la surfassa 'd nòstr volumet.

$$\Phi_x = \rho \frac{\partial s_x}{\partial x} dx\,dy\,dz + \rho \frac{\partial s_y}{\partial y} dx\,dy\,dz + \rho \frac{\partial s_z}{\partial z} dx\,dy\,dz$$

Sto fluss a venta che a corisponda a na variassion ëd densità andrinta al volumet, e donca i l'avroma che

$$\rho \frac{\partial s_x}{\partial x} dx\,dy\,dz + \rho \frac{\partial s_y}{\partial y} dx\,dy\,dz + \rho \frac{\partial s_z}{\partial z} dx\,dy\,dz = -(\rho - \rho_0) dx\,dy\,dz$$

A sta mira i definìma un pàrameter che i ciamoma "***condensassion dël mojen*** ", δ an costa manera: $\delta = \frac{\rho - \rho_0}{\rho}$ sta relassion a l'é an pràtica ugual a $\delta = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0}$.

L'equassion ëd prima a dventa antlora : $\frac{\partial s_x}{\partial x} + \frac{\partial s_y}{\partial y} + \frac{\partial s_z}{\partial z} = -\delta$, che a peul esse scrivùa, coma vetor : $div\,\vec{s} = -\delta$.

Derivand costa espression rispét al temp (variassion da quantità 'd massa ant ël temp) :

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} = -div\,\vec{u}$$

Costa a l'é l'equassion ëd continuità.

Equassion dë stat

Se i consideroma che nòstr flùid a sia un flùid përfét, i savoma da la Termodinàmica che soe variàbij: pression P volum V e temperatura T , arferìe a na grama-molécola, a son anlià da l'equassion dë stat : $PV = RT$.

St'equassion a përmëtt ëd calcolé la variassion ëd volum provocà da na variassion ëd pression. A venta 'ncora fé d'ipòtesi su coma a càpita 'l process. L'ipòtesi che a apròssima 'd pì la realità a l'é cola 'd consideré sto procéss coma adiabàtich, suponend che as peussa trascuré jë scambi 'd calor che a peulo capité fra le zone comprimùe e pì càode rispét a cole pì ràire e frèide, dal moment che 'l procéss a l'é 'd cita entità e a càpita tròp ampréssa për avèj scambi 'd calor.

I arcordoma che i l'oma definì, an Termodinàmica, un γ coma rapòrt fra 'l calor spessìfich a pression costanta e 'l calor spessìfich a volum costant $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$, e che për na trasformassion adiabàtica fra doi stat *1* e *2* a val la relassion: $P_1 V_1^\gamma = P_2 V_2^\gamma$. Dàite donca condission nen përturbà con P_0 e V_0, për në stat P e V genèrich a valo le relassion :

$$P = P_0 \left(\frac{V_0}{V}\right)^\gamma = P_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^\gamma$$

dal moment che ρ e V a son proporsionaj invers. Ëd costa espression i pijoma 'l diferensial :

$$dP = \gamma P_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma - 1} \frac{d\rho}{\rho_0}$$

Con variassion ëd densità cite costa espression a peul esse (bin) aprossimà a costa espression sì : $dP = \gamma P_0 \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0}$.

A sta mira i consideroma che *dP* (variassion ëd pression) a l'é la pression sonora *p*, e donca i podoma scrive che : $p = \gamma\, p_0\, \delta$. Derivand costa espression rispét al temp i otnoma:

$$\frac{1}{p_0}\frac{\partial p}{\partial t} = \gamma \frac{\partial \delta}{\partial t}$$

che a l'é l'equassion dë stat ant la forma che i sercavo.

Equassion ëd l'onda

A sta mira a basta combiné j'equassion ch'i l'oma trovà sì dzora, e i rivoma a scrive l'equassion general dl'onda dël son.

L'equassion ëd continuità an dà 'l valor $\frac{\partial \delta}{\partial t}$ da sostituì ant l'equassion dë stat e parèj i otnoma: $\frac{\partial p}{\partial t} = -\gamma\, p_0\, div\, \vec{u}$. I derivoma rispét al temp e i otnoma:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = -\gamma\, p_0\, div \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}$$

Adéss i aplicoma l'operator divergensa a l'equassion d'Eulero e i ornoma:

$$-div(\, grad\ p\,) = \rho_0\, div \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}$$

che, arcordand ël significà dl'operator ëd Laplace, i podoma scrive : $-\nabla^2 p = \rho_0\, div \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}$

Combinand cost'ùltima equassion con cola 'd prima i podoma eliminé 'l fator $div \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}$. I l'oma, an efét: $div \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\frac{1}{\gamma\, p_0}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$ che, sostituì, a pòrta a $\nabla^2 p = \frac{\rho_0}{\gamma\, p_0}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$

An costa equassion i butoma : $c = \sqrt{\gamma \frac{p_0}{\rho_0}}$ i otnoma l'equassion dl'onda :

$$\nabla^2 p = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$$

Com i l'oma già vist, c a l'é la velocità 'd propagassion dël son.

Onde pian-e

I suponoma adéss che nòstra përturbassion as propaga për onde pian-e, vis-a-dì con surfasse d'onda che a sio tute paralele e pian-e.

Sto modél a arpresenta bin la propagassion dël son ant na colòna d'ària, com a podrìa esse l'ària contnùa ant un tubo.

La propagassion a càpita mach pì arlongh na dimension, mentre an sël pian normal a la diression ëd propagassion as supon che tuti ij pont a sio ant j'istesse condission (pression sonòra ugual an tuti ij pont). L'equassion ëd prima a dventa antlora :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$$

I podoma 'dcò arcavé l'equassion ëd n'onda pian-a con un procediment ch'a smija a col dovrà për la propagassion ant na bara, e për sòn is arferima a figura 8.

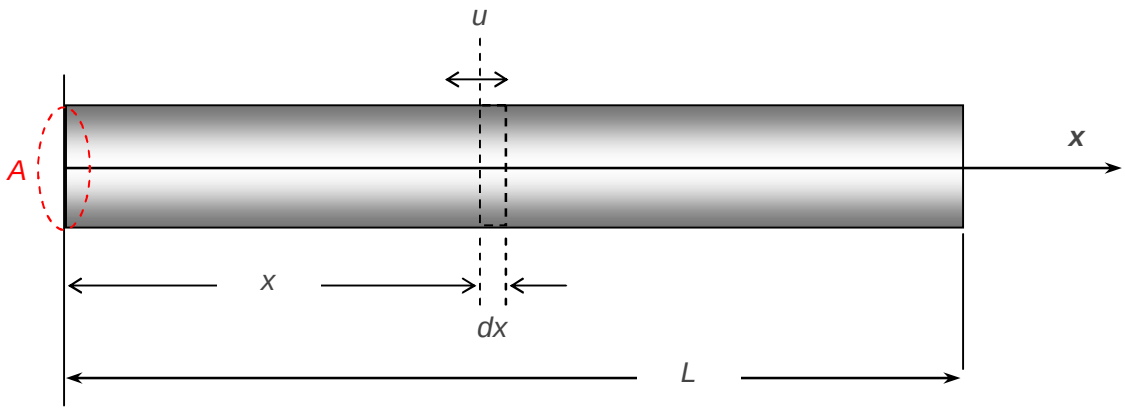


Figura 8 - Onda pian-a ant na colòna d'ària

I l'oma na colòna d'ària longa L, con na session A e na densità ρ, e arlongh la colòna, ant na posission x qualonque, i consideroma un cit segment ëd colòna, longh dx.

Durant la vibrassion ël segment inissial dx e 'l segment istantani $dx + du$ spostà da la vibrassion e deformà dal moviment, a contniran sempe l'istéssa massa d'ària $A\,\rho\,dx$. I podoma donca scrive :

$$A\rho\,dx = A(\rho + d\rho)(dx + du)$$

Da costa equassion i podoma arcavé $d\rho$:

$$\rho\,dx = (\rho + d\rho)(dx + du) \quad ; \quad \rho\,dx = \rho\,dx + \rho\,du + d\rho\,dx + d\rho\,du$$

ma $d\rho\,du$ a l'é anfinitésim d'ordin superior, e donca as trascura.

$$0 = \rho\,du + d\rho\,dx \quad ; \quad d\rho\,dx = -\rho\,du \quad ; \quad d\rho = -\rho\frac{du}{dx}$$

I notoma, a sta mira, che na variassion ëd pression dp a val: $dp = B\frac{d\rho}{\rho}$ andova B a l'é 'l mòdul d'elastissità a compression cùbica. Combinand sòn con lòn ch'i l'oma trovà as oten che

$$dp = -B\frac{du}{dx}$$

Adéss i pijoma l'equassion d'Eulero, aplicà a nòstr segment dx.

Tnisend cont che lë spostament u a l'é nen mach fonsion dla coordinà x ma 'dcò dël temp, l'espression sì dzora a val se i consideroma le derivà parsiaj. A la fin i l'oma che la forsa che a agiss an sla prima facia a l'é dàita da la pression p d'arpòs pì la pression dp dàita da la variassion ëd volum, e donca $f_1 = A\left(p - B\frac{\partial u}{\partial x}\right)$. Fra la prima e la sconda facia a-i é na variassion dla pression

dàita da la variassion ëd volum, che a sarà $\frac{\partial(d\,p)}{\partial x}d\,x$. I 'lavroma $f_2 = A\left(p - B\frac{\partial u}{\partial x} - B\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}d\,x\right)$. Donca i l'oma che la massa $A\,\rho\,dx$ a l'ha n'acelerassion $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ provocà da la fòrsa $f_1 - f_2$. Vis-a-dì:

$$A\rho\,d\,x\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial t} = A\left(p - B\frac{\partial u}{\partial x}\right) - A\left(p - B\frac{\partial u}{\partial x} - B\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}d\,x\right)$$

che, semplificà, a pòrta a 'equassion :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

andova, adéss, $c = \sqrt{\frac{B}{\rho}}$ a l'é la velocità 'd propagassion ant l'ària (a l'é ciàir che l'equassion a val ëdcò për j'àutri flùid).

Sì i podoma arzòlve st'equassion ant n'àutra manera rispét a prima. I foma na sostitussion ëd variàbij, definend $r = t - \frac{x}{c}$ e $s = t + \frac{x}{c}$. I l'avroma donca che :

$$\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{1}{c} \quad ; \quad \frac{\partial r}{\partial t} = 1 \quad ; \quad \frac{\partial s}{\partial x} = \frac{1}{c} \quad ; \quad \frac{\partial s}{\partial t} = 1$$

Antlora i l'avroma che :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x} = -\frac{1}{c}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{c}\frac{\partial u}{\partial s}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\frac{\partial r}{\partial x} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial r\,\partial s}\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}\frac{\partial s}{\partial x} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial r\,\partial s}\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{2}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial r\,\partial s} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial s}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \cdots\cdots\cdots = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial r\,\partial s} + \frac{\partial^2 u}{\partial s^2}$$

Se i andoma a sostituì ant l'equassion d'onda 'd partensa, i otnoma che :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{equassion d'onda 'd partensa}$$

$$\text{sostituend e semplificand} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial r\,\partial s} = -\frac{\partial^2 u}{\partial r\,\partial s}$$

$$\text{e donca a venta ch'a sia} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial r\,\partial s} = 0$$

I podoma integré costa equassion prima rispét a r e peui rispét a s i otnoma :

$$u(r,s) = f(r) + g(s)$$

andova f e g a son doe fonsion arbitràrie. La solussion general dl'equassion d'onda antlora, tornand a nòstre variàbij x e t, a sarà:

$$u(x,t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right) + g\left(t + \frac{x}{c}\right)$$

andova f e g a son sempe doe fonsion arbitràrie (vardé "Propagassion për onde" ant la prima session, part set). Ste fonsion a son spessificà dal tipo 'd përturbassion ch'as propaga.

Arsonansa 'd colòne d'ària.

I arpijoma 'l problema sì dzora, ma i lo arzolvoma com i l'avìo fàit për le vibrassion longitudinaj ant la bara. I consideroma na colòna d'aria ant un tubo (com a podrìa esse na cana d'òrgo) e i consideroma ij tre cas, andova la cana a l'é sarà ai doi estrem, a l'é duverta ai doi estrem, a l'é sarà a n'estrem e duverta a l'àutr.

I partoma sempe da la solussion general dl'equassion d'onda scrita coma:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos p_n t + B_n \sin p_n t\right)\left(C_n \cos \frac{p_n}{c} x + D_n \sin \frac{p_n}{c} x\right)$$

e an costa solussion i andoma a impon-e nòstre condission al contorn.

Tubo sarà ai doi estrem

La figura d'arferiment a l'é figura 9, andova i l'oma arportà un tubo parèj con le onde (giusta ij prim termo dla somatòria) che a peulo stabilisse. I foma nen d'ipòtesi su coma na përturbassion a peussa esse antrodòta ant ël tubo, e i disoma che costa a l'é nen na situassion ëd cana d'òrgo.

An costa situassion i l'avroma che jë spostament a j'estrem dël tubo a saran zero, përchè la parete rèida che a sara 'l tubo a lassa nen sposté 'l seul d'ària a contat. Donca, se 'l tubo a l'é longh L, i l'avroma :

$$u(0,t) = 0 \quad ; \quad u(L,t) = 0$$

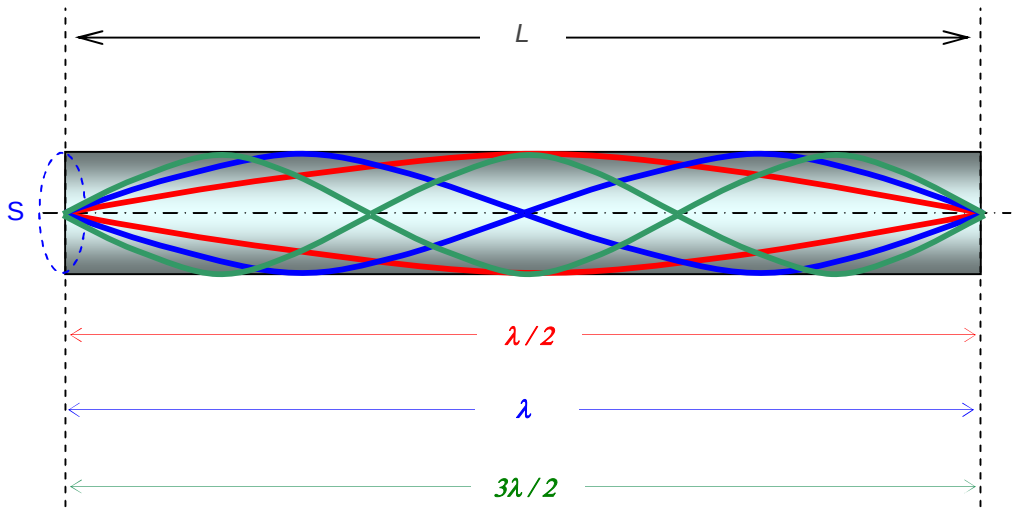


Figura 9 - Arsonansa ant un tubo sarà ai doi estrem

Da sì i arcavoma, coma prima, che C_n a venta che a sia zero, e che $sin\ \frac{p_n L}{c} = 0$. Donca ij valor p_n che a sodisfo a costa condission a son $p_n = \frac{n \pi c}{L}$ con n nùmer antregh qualonque. Arportand ste condission ant la solussion general i otnoma

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos p_n t + B_n \sin p_n t) D_n \sin \frac{n\pi}{L} x$$

Se i vardoma còs i otnoma për $n = 1$, i vëddoma che la longhëssa d'onda dla frequensa fondamental a val $\lambda = 2L$.Un tubo longh doi meter, pr'esempi, a l'ha na nòta fondamental con $\lambda = 4\ m$, che a echival a na frequensa $f = \frac{c}{\lambda} = \frac{343}{4} = 85{,}75\ Hz$ (i arcordoma che un piano a part da un *LA* a *27,5 Hz* e a riva a un *DO* a *4186 Hz*).

Tubo duvert ai doi estrem

Cost a peul esse na cana d'òrgo (cana duverta), andova la përturbassion a l'é prodovùa da un sofi d'ària che a riva an 's n'overtura fàita a "subiet".

An costa situassion le condission al contorn a son che ai doi estrem dël tubo la pression acùstica a val zero (pression dl'atmosfera nen përturbà). Sto fàit as esprim scrivend che :

$$\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right]_{x=0} = 0 \quad ; \quad \left[\frac{\partial u}{\partial x}\right]_{x=L} = 0$$

La solussion dl'equassion general as oten con un procediment ugual a col dël cas dla bara lìbera ai doi estrem, e a pòrta a l'istessa condission ëd prima a propòsit dij valor che a peulo pijé ij parameter p_n.

Rispét al cas dël tubo sarà ai doi estrem, ch'i l'oma vist prima, la diferensa as peul vëdde an figura 10, andova ij neu e le panse dl'ossilassion a son an posission scambià rispét a la figura 9. Sòn përchè a la fonsion "sen" as sostituiss la fonsion "cossen". An sto cas l'equassion dël moviment a dventa, an efét:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos p_n t + B_n \sin p_n t) C_n \cos \frac{n\pi}{L} x$$

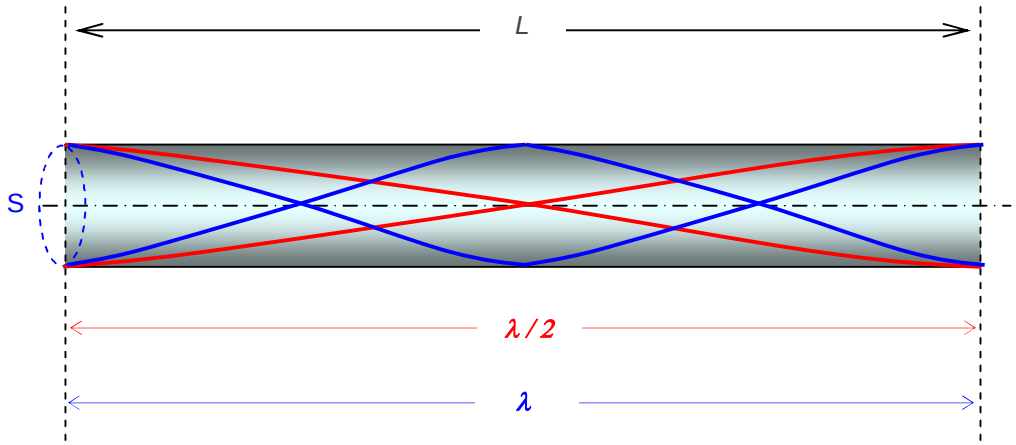


Figura 10 - Arsonansa ant un tubo duvert ai doi estrem

Le frequense d'ossilassion dla cana a son donca j'ìstesse, e la frequensa fondamental a l'avrà na longhëssa d'onda $\lambda = 2 \cdot L$. Na cana d'òrgo che a deubia soné un *LA* bass a *27,5 Hz* a ventrìa che a fussa longa *6,26 m*. ($L = c / [2 f]$).

Tubo duvert a n'estrem e sarà a l'àutr

La procedura a l'é sempe dl'istéss tipo. Sempe suponend ël tubo longh L, is arferima a figura 11, andova 'l tubo a l'é arpresentà con l'estrem an $x = 0$ sarà e l'estrem $x = L$ duvert.

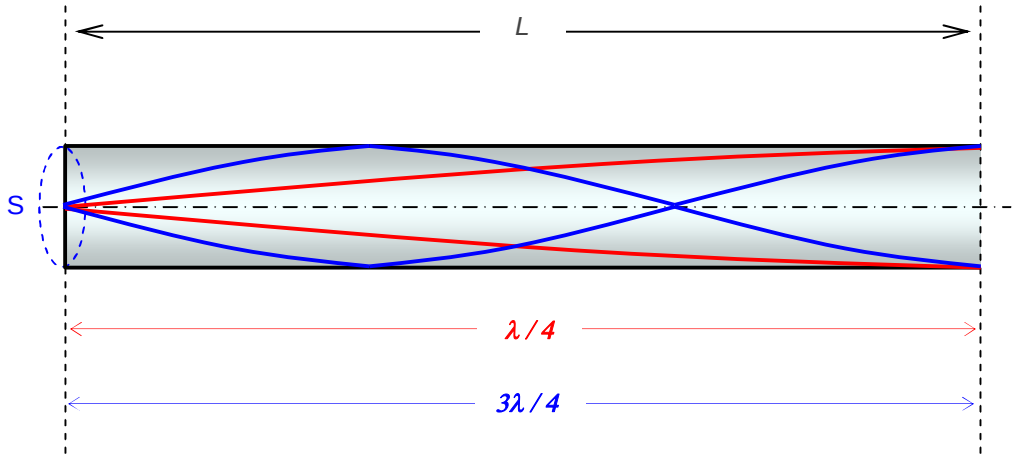


Figura 11 - Arsonansa ant un tubo duvert a n'estrem e sarà a l'àutr

An costa situassion la condission al contorn për $x = 0$ a l'é $u(0, t) = 0$, mentre a l'àutr estrem, për $x = L$, i l'oma che $\frac{du(L,t)}{dx} = 0$.

La prima condission a pòrta a avèj $C_n = 0$, mentre da la sconda condission as arcava che a venta ch'a sia $\cos \frac{p_n L}{c} = 0$, e donca che $p_n = \frac{n \pi c}{2 L}$

L'equassion dël moviment ëd l'ària a sarà donca dàita da:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin \frac{n \pi x}{2 L} \left(A_n \cos p_n t + B_n \sin p_n t \right)$$

As vëdd sùbit che la longhëssa d'onda dla frequensa fondamental a l'é 'l dobi rispét ai doi cas ch'i l'oma vist prima. Donca la frequensa fondamental, con l'istéssa longhëssa dël tubo, a l'é la metà rispét a prima. I l'avìo vist che la cana duverta d'òrgo për ël *LA* bass a *27,5 Hz* a ventrìa che a fussa longa *6,26 m*. La cana sarà an ponta a basta ch'a sia longa *3,13 m*.

Element dl'onda dël son pian-a

A-i son quatr element che a carateriso n'onda pian-a 'd cole ch'i l'oma vist. Contut che stì concét as àpico a qualonque onda, sì is arferima mach a n'onda armònica sempia.

I l'oma prima 'd tut jë "***spostament dle partìcole*** " dl'element che a propaga l'onda.

Peui i l'oma la "***pression acùstica*** " dont i l'oma già dit quaicòs.

I l'oma 'ncora na "***velocità dle partìcole*** "

An fin i l'oma la "***variassion ëd densità*** " che a corispond a la compression ant un pont.

Jë spostament dle partìcole a son coj da la posission d'echilìbri che a l'avrìo sensa la perturbassion acùstica. I l'oma vist che a peulo esse dëscrivù da l'equassion:

$$u(x,t) = A\cos(\omega t - k x)$$

andova i l'oma considerà mach ël vers positiv dla propagassion.

La pression acùstica *p* a l'é dàita da la pression istantània total meno la pression d'arferiment, che a-i sarìa se a-i fussa nen la përturbassion acùstica. As definiss ëdcò na *pression acùstica eficenta* ant un pont coma la média quadràtica dle pression acùstiche istantànie che a-i son an col pont ant un ciclo complét. La pression acùstica a l'é dàita da $p = \rho c^2 \frac{\partial u}{\partial x}$, vis-a-dì:

$$p = -\rho c \omega A \sin(\omega t - k x)$$

andova i l'oma considerà mach ël vers positiv dla propagassion.

La velocità dle partìcole *v* a l'e giusta dàita da la derivà rispét al temp dlë spostament, e donca i l'avroma che :

$$v = \frac{\partial u}{\partial t} = -\omega A \sin(\omega t - k x)$$

andova i l'oma considerà mach ël vers positiv dla propagassion.

La variassion ëd densità ant un dàit pont, che sì i ciamoma *s*, e che a l'é ciamà 'dcò "*compression*" a l'é cola ch'i l'oma già vist e che a l'é dàita coma variassion relativa da:

$$s = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} = -\frac{\partial u}{\partial x}$$

Intensità dël son

As definiss coma "intensità dël son ", la potensa média che a traversa l'unità 'd surfassa ant la diression ëd propagassion. As trata 'd na potensa dividùa për na surfassa e donca as misura an *[Watt / m²]*. As trata dël travaj ant l'unità 'd temp su l'unità 'd surfassa, e donca 'ncora la fòrsa për lë spostament ant l'unità 'd temp su l'unità 'd surfassa.

La pression a l'é na fòrsa për unità 'd surfassa e la velocità a l'é në spostament ant l'unità 'd temp. Donca se i anmaginoma un seul ëd partìcole 'd surfassa unitària che a un dàit moment a l'han na pression acustica *p* e na velocità *v*, ant ël temp *dt* a l'avran në spostament *dx* che a sarà dàit da $dx = v\,dt$. La fòrsa an sl'unità 'd surfassa a sarà giusta *p*, e donca $p\,dx$ a l'é 'l travaj elementar e $p\,v$ a l'é la potensa istantania.

Nòstra intensità a l'é definìa coma potensa media, e se i suponoma un son con andament sinusoidal, ò macassìa periòdich, i podoma calcolé sta média su un perìod *T* dl'onda. Ant ël cas d'onde sinusoidaj i savoma che, për na diression ëd propagassion, lë spostament *u* a l'é $u = A\cos(\omega t - k x)$, e antlora la velocità a l'é $v = \frac{\partial u}{\partial t} = -\omega A \sin(\omega t - k x)$, e la pression a l'é $p = \rho c^2 \frac{\partial u}{\partial x} = -\rho c \omega A \sin(\omega t - k x)$ e sòn dàit ël valor dla costant $k = \frac{\omega}{c}$. I podoma scrive che :

$$I = \frac{1}{T}\int_0^T p\,v\,dx = \int_0^T [-\rho c \omega A \sin(\omega t - k x)][-\omega A \sin(\omega t - k x)]dt$$

Calcoland l'integral, còsa che i foma nen sì, as oten che $I = \frac{1}{2}\rho c \omega^2 A^2$. I l'oma vist che $p = \rho c^2 \frac{\partial u}{\partial x} = -\rho c \omega A \sin(\omega t - k x)$ e donca $-\rho c \omega A$ a l'é 'l valor màssim dla pression sonòra.

I l'oma definì prima un valor eficent dla pression, coma la média quadràtica dij valor dla pression an sl'interval dla média. Për na fonsion sinusoidal as dimostra fàcil che sto valor eficent a l'é 'l valor màssim dividì për la costant $\sqrt{2}$. Se donca i ciamoma $\hat{p} = \frac{-\rho c \omega A}{\sqrt{2}}$ sto valor për la pression, i l'avroma che $I = \frac{\hat{p}^2}{\rho c}$

Densità d'energìa

As definiss coma "densità d'energìa " ant un mojen, l'energìa për unità 'd volum dàita da la propagassion dla përturbassion. L'energìa sonòra a l'é an part potensial (ò elàstica), dàita da lë spostament elàstich dle partìcole, e an part cinética, dàita da la velocità dle partìcole mideme. L'adission ëd coste doe energìe as conserva se a-i son nen dispersion. Ant në stat stassionari le pèrdite a son compensà da l'emission dla sorgent.

La part potensial dl'energìa a l'é dàita dal travaj che la pression acùstica a fà për cambié 'l volum. L'energìa *Ep* dë sto tipo a un dàit moment a corispond al travaj për porté 'l volum da le condission d'arpòs (con pression p_0) a le condission dël moment. Vis-a-dì $Ep = \int_{p_0}^{p'} p' \cdot dV'$ con p' pression istantània e V' volum istantani. I arcordoma che $dV' = -\frac{V\,dp'}{B}$, andova B a l'é 'l mòdul d'elastissità a compression cùbica. Antlora i podoma scrive che:

$$Ep = \frac{V}{B}\int_{p_0}^{p'} p'\,dp' = \frac{V}{2B}\left[(p')^2 - p_0^2\right]$$

e se i ciamoma $p = p' - p_0$ la pression acùstica, i l'avroma che $(p')^2 - p_0^2 = 2\,p\,p_0 + p^2$ com as verìfica sùbit. Donca nòstra energìa potensial a sarà $Ep = \frac{V\left(2\,p\,p_0 + p^2\right)}{2B}$.

Për n'onda pian-a armònica i l'oma che la pression p a val $p = \rho c \dot{x}$, andova $\dot{x}$ a l'é la velocità dlë spostament, mentre $B = c^2 \rho$. L'energìa cinética *Ec* a l'é sempe dàita da $Ec = \frac{1}{2} m v^2$, che an nòstr cas a l'é : $Ec = \frac{1}{2}\rho V \dot{x}^2$. L'energìa total a arzulta donca:

$$Et = \frac{1}{2}\rho V \dot{x}^2 + \frac{V\left(2\,p\,p_0 + p^2\right)}{2B} = V\left(\rho \dot{x}^2 + \frac{p_0 \dot{x}}{c}\right)$$

com a arzulta fasend le sostitussion e semplificand.

Nòstra densità istantania *De* a l'é për unità 'd volum, e donca a val : $De = \rho \dot{x}^2 + \frac{p_0 \dot{x}}{c}$. Se i voroma trové la media *Dem* arferìa a un perìod *T*, suponend che lë spostament *x* a sia la fonsion sinusoidal $x(t) = A \cos(\omega t - kx)$, e che donca $\dot{x}(t) = -\omega A \sin(\omega t - k x)$, i l'avroma (sensa sté a fé tuti ij càlcoj) :

$$Dem = \frac{1}{T}\int_0^T \left(\rho \dot{x}^2 + \frac{p_0 \dot{x}}{c}\right) dt = \frac{1}{2}\rho \omega^2 A^2$$

I podoma 'dcò consideré che l'energìa ant l'unità 'd volum a sarà cola che a traversa la surfassa unitària ant l'unità 'd temp, dividùa për la distansa përcorùa ant l'unità 'd temp. Ma 'l

dividend a l'é nen d'àutr che l'intensità média e 'l divisor a l'é nen d'àutr che la velocità dël son. Antlora a venta ch'a sia $Dem = \frac{I}{c}$ ma i l'oma che $I = \frac{\hat{p}^2}{\rho c}$ e i l'oma 'dcò che $\hat{p} = \frac{-\rho c \omega A}{\sqrt{2}}$. Se i foma le sostitussion i otnoma lòn ch'i l'oma vist sì dzora : $Dem = \frac{\hat{p}^2}{\rho c^2} = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2$

Potensa dël son

Se i suponoma na sors ëd son che a manda energìa ant ël mojen e i suponoma che a sia l'ùnica sors ant ël camp d'anterésse, i disoma che l'energìa che a ven emëttùa ant l'unità 'd temp a l'é la potensa P_s dla sors (an *Watt*). I podoma supon-e na surfassa *S* qualonque antorna a la sors che a la anviron-a al complét. Se i arpijoma 'l concét d'intensità I_s , i podoma dì che la potensa dla sors a sarà dàita da:

$$P_s = \int_S I_s \, dS \quad [W]$$

I suponoma che la radiassion d'energìa a sia uniform an tute le diression e che la surfassa antorna a la sors a sia giusta cola ëd na sféra con ragg *r*. I l'avorma che che la potensa P_s a sarà :

$$P_s = 4 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot I_s \quad [W]$$

andova I_s a l'é l'intensità an qualonque diression a la distansa *r* da la sors. A sta mira i podoma buté ant la relassion ël valor dl'intensità dël son ch'i l'oma arcavà prima, e i otnoma :

$$P_s = 4 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot \frac{\hat{p}^2}{\rho_0 \cdot c} \quad [W]$$

La potensa dla sors as treuva donca misurand l'intensità a na dàita distansa da la sors.

Impedensa

I consideroma un sens ëd propagassion (vers j'*x* positive) e i scrivoma la fonsion dla pression acùstica *p*, che a sarà $p = f\left(t - \frac{x}{c}\right)$. Da j'equassion d'Eulero (sì i consideroma mach la variàbil *x*), i podoma arcavé la velocità v_x dlë spostament. An efét a val la relassion :

$$\rho_0 \frac{\partial v_x}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}\left[f\left(t - \frac{x}{c}\right)\right] = \frac{1}{c} f'\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

andova *f '* a ìndica la derivà rispét a la variàbil $\left(t - \frac{x}{c}\right)$ e $-1/c$ a l'é la derivà dla variàbil rispét a *x*. Si i dividoma për ρ_0 i l'oma che $\frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{1}{c\,\rho_0} f'\left(t - \frac{x}{c}\right)$. Da sì i arcavoma che $v_x = \frac{1}{c\,\rho_0} f\left(t - \frac{x}{c}\right)$

I l'oma donca, ant ël cas d'onda pian-a ch'as propaga, che pression *p* e velocità v_x a l'han l'istéssa espression, gavà un fator real. A son donca sempe an fase fra 'd lor e sò rapòrt a l'é un nùmer real costant :

$$\frac{p}{v} = c\,\rho_0$$

Sto raport a ven ciamà "***impedensa caraterìstica*** Z_0 ", che a dipend giusta da le caraterìstiche dël mojen ëd propagassion. I l'oma donca che :

$$\frac{p}{v} = c\,\rho_0 = Z_0$$

Cost a l'é un cas particolar, che as àpica a j'onde pian-e che as propago lìbere (sensa riflession, com i vëddroma peui) e as àplica nen, pr'esempi, a j'onde sfériche (i lo vëddroma dòp).

An general ël raport ch'i l'oma dit a l'é nen un nùmer real, përchè a-i é na diferensa 'd fàse fra pression e velocità. L'impedensa, che an sto cas as dis "***impedensa spessìfica***" a dventa un nùmer compléss : $Z_0 = R_0 + i\,X_0$ con R_0 dita "***resistensa spessìfica***" e X_0 dita "***reatansa spessìfica***".

Onde sfériche

I l'oma già vist che, an general, l'onda dël son che as propaga ant lë spassi, cand a l'é arferìa a un sistema d'ass cartesian ortogonaj, a l'ha la forma general:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$$

I podoma serché na solussion ëd costa equassion con la técnica dla separassion dle variàbij, an manera che a l'àbia la forma : $p = X(x)\cdot Y(y)\cdot Z(z)\cdot T(t)$, andova ognidun dij fator a l'é fonsion mach ëd na variàbil sola. Sostituend as oten:

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} + \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} + \frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} = \frac{1}{c^2T}\frac{d^2T}{dt^2}$$

Costa equassion a venta ch'a sia sempe verificà, contut che 'l prim member a sia fonsion mach ëd x, y, z e lë scond member a sia mach fonsion ëd t. Sòn a l'é possìbil mach se ij doi member a son uguaj a na costant. I ciamoma sta costant $-k_1^2$. I l'oma donca le doe equassion:

$$\frac{1}{c^2T}\frac{d^2T}{dt^2} = -k_1^2 \quad \text{vis - a - dì} \quad \frac{d^2T}{dt^2} + c^2\,k_1^2\,T = 0$$

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} + \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} + \frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} = -k_1^2$$

A la sconda equassion i podoma apliché torna l'istéss procediment. An efét i podoma scrivla coma : $\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} + \frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} = -k_1^2 - \frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}$ e, sempe për la rason ëd prima, ij doi member a venta ch'a sio uguaj a na costant. I podoma scrive che :

$$-k_1^2 - \frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = -k_1^2 + k_2^2 \quad \text{vis - a - dì} \quad \frac{d^2X}{dx^2} + k_2^2\,X = 0$$

Ant l'istessa manera, sensa arpete tuti ij passagi, as treuvo j'àutre doe equassion

$$\frac{d^2Y}{dy^2} + k_3^2\,Y = 0 \quad ; \quad \frac{d^2Z}{dz^2} + k_4^2\,Z = 0$$

Ste quatr equassion a peulo esse integrà e a dàn, coma solussion, ant l'órdin :

$$T(t) = A_1 \sin ck_1 t + B_1 \cos ck_1 t$$

$$X(x) = A_2 \sin k_2 x + B_2 \cos k_2 x$$

$$Y(y) = A_3 \sin k_3 y + B_3 \cos k_3 y$$

$$Z(z) = A_4 \sin k_4 z + B_2 \cos k_4 z$$

An costa manera na solussion dl'equassion a arzulta esse :

$$p(x,y,z,t) =$$

$$= \left(A_1 \sin ck_1 t + B_1 \cos ck_1 t\right)\left(A_2 \sin k_2 x + B_2 \cos k_2 x\right)\left(A_3 \sin k_3 y + B_3 \cos k_3 y\right)\left(A_4 \sin k_4 z + B_2 \cos k_4 z\right)$$

An nòstr but is limitoma a consideré la propagassion d'onde sfériche. Se i suponoma na sors ëd vibrassion sonòre che as treuva ant un mojen omogéni e isòtrop e che a emëtta energìa sonora an tute le diression a l'istessa manera, antlora le surfasse d'onda (pont con l'istéssa ampiëssa e istessa fase), a saran surfasse sfériche con senter ant la sors.

An sto cas l'equassion as peul arferì a un sistema 'd coordinà sfériche, dal moment che, dàita la simetrìa dël fenòmeno, tute le grandësse an geugh a dipendo mach dal temp t e da la coordinà radial r che a dà la distansa dël pont genérich dal senter ëd simetrìa.

Le coordinà sfériche, dont i doma n'arpresentassion an figura 12, as peulo arcavé da le coordinà cartesian-e ortogonaj considerand ël pian che a passa për ël genérich pont P e l'ass z. Su sto pian, la distansa fra l'orìgin, comun-a ai doi sistema, e 'l pont P a arpresenta la coordinà r. L'angol che 'l pian a forma con ël pian xz a l'é la coordinà ϕ, mentre l'angol fra l'ass z e 'l ragg vetor r a arpresenta la coordinà θ.

An coste condission la conversion ëd coordinà a l'é dàita da j'equassion:

$$x = r \cdot \sin\theta \cdot \cos\phi$$

$$y = r \cdot \sin\theta \cdot \sin\phi$$

$$z = r \cdot \cos\theta$$

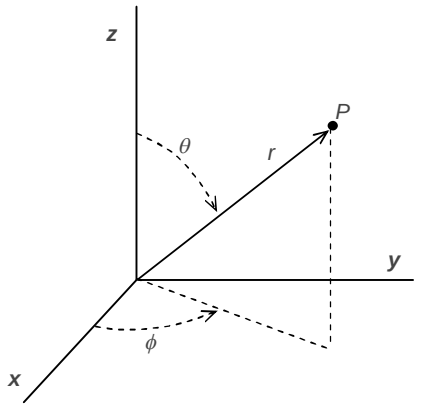


Figura 12 - Coordinà sfériche

La conversion, da 's për chila, a l'é pitòst complicà e sì i la foma nen an tuti ij passagi. I disoma mach che l'equassion d'onda general, na vira convertìa an coste coordinà, a pija la forma:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin\theta^2}\frac{\partial^2 p}{\partial \phi^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r^2\, tg\,\theta}\frac{\partial p}{\partial \theta} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$$

Ant ël cas d'onde con simetrìa sférica, la fonsion *p* a sarà mach dipendenta da *r* e da *t* , e donca a sarà *p(r, t)*. L'equassion general as arduv a :

$$\frac{\partial^2 (rp)}{\partial r^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 (rp)}{\partial t^2}$$

Costa equassion a peul esse 'dcò arcavà da l'equassion general an coordinà cartesian-e tnisend cont che :

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad \text{e che} \quad \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$$

I podoma donca dì che $\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial r}\frac{x}{r}$ e se i derivoma costa espression rispét a *x* i l'avroma :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial r} - \frac{x}{r^2}\frac{\partial p}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{x}{r}\frac{\partial^2 p}{\partial r^2}\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x^2}{r^2}\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \left(\frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3}\right)\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{x^2}{r^2}\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{y^2 + z^2}{r^3}\frac{\partial p}{\partial r}$$

e a l'istessa manera as oten-o le espression :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = \frac{y^2}{r^2}\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{x^2 + z^2}{r^3}\frac{\partial p}{\partial r} \quad ; \quad \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = \frac{z^2}{r^2}\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{x^2 + y^2}{r^3}\frac{\partial p}{\partial r}$$

Da coste tre espression i podoma dì che 'l prim member dl'equassion general a val :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = \frac{x^2}{r^2}\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{y^2 + z^2}{r^3}\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{y^2}{r^2}\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{x^2 + z^2}{r^3}\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{z^2}{r^2}\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{x^2 + y^2}{r^3}\frac{\partial p}{\partial r}$$

Semplificand e cheujend a fator comun i l'oma giusta che :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^2}\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{2\left(x^2 + y^2 + z^2\right)}{r^3}\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial p}{\partial r}$$

I notoma che se i consideroma la fonsion $r \cdot p$, s val la relassion :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial^2 (rp)}{\partial r^2}$$

I notoma peui che *r* a l'é na variàbil andipendenta che a dipend nen dal temp *t*, e donca i l'avroma che : $\frac{\partial^2 (r\,p)}{\partial t^2} = r\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$. Se i andoma a sostituì lòn ch'i l'oma trovà ant l'equassion d'onda $\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$ i otnoma l'espression :

$$\frac{\partial^2 (r\,p)}{\partial r^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 (r\,p)}{\partial t^2}$$

A sta mira, se i consideroma coma fonsion incògnita $r \cdot p$, anvece che mach *p*, i l'oma che le solussion a son dël tipo:

$$r\,p = f\left(t - \frac{r}{c^2}\right) + g\left(t + \frac{r}{c^2}\right)$$

e divident për r as oten la fonsion dla pression p.

$$p = \frac{1}{r} f\left(t - \frac{r}{c^2}\right) + \frac{1}{r} g\left(t + \frac{r}{c^2}\right)$$

Costa solussion a arpresenta doe onde, dont la prima a part dal senter (sors dël son) e a divergg, mentre la sconda a convergg vers la sors. A l'é natural che se 'l son a peul propaghésse lìber, mach la prima onda a l'ha un significà. Le fonsion f e g a dipendo da che përturbassion a ven generà e a la arpresento. La pression sonòra a donca cala con la distansa.

Se la përturbassion generà a l'é na fonsion armònica con na dàita pulsassion ω, antlora la solussion a dventa:

$$p = \frac{P_{max}}{r} cos\left(\omega t - k\,r + \varphi_0\right)$$

andova P_{max} a l'é la pression massima 'd partensa, k a val ω / c e a l'é ciamà "nùmer d'onda " mentre φ_0 a l'é la fase inissial.

Element dl'onda dël son sférica

Për l'onda sférica as definisso tre element d'anterésse che a son : La "***pression acùstica*** " don i l'oma dit. Jë "***spostament dle partìcole*** " dl'element che a propaga l'onda. Peui i l'oma la "***velocità dle partìcole*** ". An fin i l'oma la "***variassion ëd densità*** " che a corispond a la compression ant un pont.

La pression acùstica a l'é cola ch'i l'oma studià sì dzora. Për na përturbassion armònica sempia la pression acùstica a l'é dàita da :

$$p = \frac{P_{max}}{r} cos\left(\omega t - k\,r + \varphi_0\right)$$

J'àutri element definì a son fonsion dla pression. Jë spostament u dle partìcole a son coj da la posission d'echilìbri ch'a l'avrìo sensa la perturbassion acùstica.

$$u = -\left(\frac{1}{r} + i\,k\right)\frac{p}{\omega^2 \rho}$$

La velocità v dle partìcole a ven da la derivà dlë spostament fàita rispét al temp, e a arzulta esse dàita da :

$$v = \left(\frac{1}{r} + i\,k\right)\frac{p}{i\,\omega\,\rho}$$

An fin i definima la compression s coma prima (cas dle onde pian-e), che sì a arzulta esse dàita da:

$$s = \frac{p}{\rho\,c^2}$$

I stoma nen a dé dimostrassion ëd cose relassion.

Intensità dël son

Coma për ël cas dj'onde pian-e, l'intensità acùstica I a l'é la portà media d'energìa acustica për unità 'd surfassa. Ëdcò sì is limitoma a n'onda sferica divergenta e armònica. An sto cas la media a ven fàita su un perìod T dl'ossilassion. Se p a l'é la pression acùstica istantania e v la velocità istantania dle partìcole, i l'oma che :

$$I = \frac{1}{T}\int_0^T p\,v\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T P\cos(\omega t - k\,x)\cdot V\ \cos(\omega t - k\,x - \theta)\cdot dt$$

andova P a l'é la pression massima, V a l'é la velocità massima e θ a l'é l'angol ëd fase fra pression e velocità. Fasend l'integral as oten che $I = \frac{1}{2} P V \cos\theta$.

I podoma dovré, për la pression e la velocità, ij valor eficent, che a son, ant l'órdin $\hat{p} = \frac{P}{\sqrt{2}}$ e $\hat{v} = \frac{V}{\sqrt{2}}$ e antlora i otnoma che $I = \hat{p}\,\hat{v}\cos\theta$.

L'àngol ëd fase θ a l'é dàit da $\theta = arc\cos\left(\frac{k\,r}{\sqrt{1+k^2 r^2}}\right)$

Densità d'energìa

I ciamoma sempe "***densità d'energìa*** " D l'adission dl'energìa cinética Ec e dl'energìa potensial Ep, ant un dàit istant, për unità 'd volum dël mojen sede dla përturbassion.

Se i consideroma 'l volum medi V_0 e la densità media ρ, i l'avroma la massa $m = V_0\,\rho$, che a l'ha na velocità media eficenta v. Soa energìa cinética Ec a sarà : $Ec = \frac{1}{2}\rho V_0\,v^2$ e se i dovroma la velocità eficenta $v = \frac{v_0}{\sqrt{2}}$, con v0 velocità màssima, i l'avroma : $Ec = \frac{1}{4}\rho V_0\,v_0^2$. Che a l'é l'energìa istantània media.

L'energìa potensial Ep istantània, an sto cas, a l'é l'energìa elàstica che a echival al travaj fàit da la pression për modifiché 'l volum, e donca : $Ep = -\int p\,dV$ andova p e V a son pression e volum istantani. La relassion che a anlìa pression p e volum V a l'é : $V = V_0\left(1 - \frac{p}{\rho c^2}\right)$ e donca i l'oma che $dV = -\,p V_0$. L'energìa potensial istantania a l'é donca :

$$Ep = \frac{V_0}{\rho c^2}\int_0^p p\,d\,p\ = \frac{p^2 V_0}{2\rho c^2}$$

Se i dovroma 'l valor eficent për p, con p_0 piàit coma valor màssim, i podoma dì che an media l'energìa potensial istantania a l'é : $Ep\ = \frac{p_0^2 V_0}{4\rho c^2}$.

Adéss i vardoma ij valor për p e v. Sempe considerand n'onda sférica armònica sempia, për la pression p i l'avroma che $p = \frac{A}{r}\cos(\omega t - k\,r) = p_0\cos(\omega t - k\,r)$, mentre për la velocità v i l'avroma

che $v = p\left(\frac{\frac{1}{r}+ik}{i\rho\omega}\right) = \left(\frac{A\sqrt{1+k^2r^2}}{\rho c k r^2}\right)cos(\omega t - kr - \theta)$ e da costa espression a ven che v_0, valor màssim dla velocità, a val $v_0 = \left(\frac{A\sqrt{1+k^2r^2}}{\rho c k r^2}\right)$.

A sta mira i podoma scrive l'espression dla densità d'energìa D coma :

$$D = \frac{Ec + Ep}{V_0} = \frac{1}{4}\rho v_0^2 + \frac{p_0^2}{\rho c^2}$$

e sostituend ij valor ch'i l'oma trovà sì dzora a arzulta, dòp le semplificassion :

$$D = \frac{p_0^2}{2\rho c^2}\left(1 + \frac{1}{2k^2r^2}\right)$$

Impedensa

I l'oma vist che për j'onde pian-e l'impedensa, definìa coma rapòrt fra pression acùstica e velocità dë spostament dle partìcole $\frac{p}{v} = c\rho_0$ a l'é na costant che a dipend da le caraterìstiche dël mojen ëd propagassion, e a l'é un nùmer real.

Se i consideroma adéss n'onda sferica armònica, i podoma scrive l'equassion dla pression, com i l'oma vist ant le nòte 'd matemàtica, ant la forma:

$$p = \frac{P}{r}e^{i(\omega t - kr)}$$

(i a l'é l'unità anmaginària), mentre për le component dla velocità v_x, v_y, v_z dle partìcole a valo le relassion:

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = \rho\frac{\partial v_x}{\partial t} \quad ; \quad -\frac{\partial p}{\partial y} = \rho\frac{\partial v_y}{\partial t} \quad ; \quad -\frac{\partial p}{\partial z} = \rho\frac{\partial v_z}{\partial t}$$

e donca a arzulta che $-\frac{\partial p}{\partial r} = \rho\frac{\partial v}{\partial t}$ andova v a l'é la velocità radial dle partìcole. Donca 'l gradient ëd pression a l'é proporsional diret a l'acelerassion radial. I podoma integré l'equassion e i otnoma la velocità radial v :

$$v = -\frac{1}{\rho}\int\frac{\partial p}{\partial r}dt = -\frac{1}{i\rho\omega}\frac{\partial p}{\partial r} = \left(\frac{1}{r}+ik\right)\frac{p}{i\rho\omega}$$

Se adéss i scrivoma 'l rapòrt dl'impedensa acùstica i l'avroma (i arcordoma che $\omega = c\,k$):

$$Z = \frac{p}{v} = \frac{p}{\left(\frac{1}{r}+ik\right)\frac{p}{i\rho\omega}} = \frac{i\rho\omega}{\frac{1}{r}+ik} = \frac{i\rho c k r}{1+ikr} = \frac{\rho c k^2 r^2}{1+k^2r^2} + i\frac{\rho c k r}{1+k^2r^2}$$

I l'oma donca na part real (ciamà "*resistensa acùstica spessìfica* ") e na part anmaginaria (ciamà "*reatansa acùstica spessìfica* ").