

Il teorema di Bayes ed i falsi positivi

Il teorema di Bayes è utile per capire come, nel caso di malattie relativamente rare (Aids, Tbc, Epatite virale), esistano elevate probabilità di trovare persone sane, positive ad analisi cliniche e a test diagnostici.

Immaginiamo che in una piccola città esistano due gruppi di persone: 10.000 individui sani e 200 soggetti malati. Il rapporto tra sani e malati sarà allora di 98% contro 2%. Fissiamo all'1% la probabilità di ottenere risultati errati dal test diagnostico.

Essendo la patologia relativamente rara saranno positivi 198 soggetti malati (99% di 200) e 100 individui sani (1% di 10.000). Positivi al test risulteranno pertanto moltissimi malati e non pochi sani.

Sia:

$$P(M) = 200 / (200 + 10.000) = 0,02 = 2\% \text{ la probabilità di trovare un malato}$$

$$P(S) = 10.000 / (200 + 10.000) = 0,98 = 98\% \text{ la probabilità di trovare un sano}$$

$$P(M/P) = 99\% \text{ la probabilità che un malato sia positivo al test clinico}$$

$$P(S/P) = 1\% \text{ la probabilità che una persona sana sia positiva al test}$$

La probabilità di trovare una persona "falsamente positiva" sarà:

$$P(P/S) = \frac{P(S) \cdot P(S/P)}{P(S) \cdot P(S/P) + P(M) \cdot P(M/P)}$$

$$= \frac{0,98 \cdot 0,01}{0,98 \cdot 0,01 + 0,02 \cdot 0,99} = 0,33 \approx 33\%$$

Il teorema di Bayes ci permette di calcolare con precisione il rapporto tra:

$$\frac{\text{Casi favorevoli}}{\text{Casi possibili}} = \frac{\text{Positivi al test tra i sani}}{\text{Totale di positivi al test}} = \frac{100}{100 + 198} \approx 33\%$$